объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-80-129

М.Д.Матеев, М.В.Чижов

ОБОБЩЕННЫЙ КАЛИБРОВОЧНЫЙ ПРИНЦИП В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Направлено в Болгарский физический журнал

1980

§I. Введение

В работах[I,2] на базе обобщенного принципа калибровочной инвариантности, содержащего новый универсальный масштаб – "фундаментальную длину" ℓ , была построена модель электродинамики спинорных полей. Цель настоящей работы – расширение данной модели на случай бозонных полей, в частности, скалярных и векторных. Мы покажем, что в окончательных уравнениях, в отличие от спинорного случая, фундаментальная длина вообще не фигурирует. Однако в теории массивного векторного поля появляется неминимальное взаимодействие паулиевского типа, приводящее к полной компенсации магнитного момента векторной частицы.

§2. Скалярная электродинамика

Уравнения свободных скалярных полей[I,3] можно записать в виде:

$$2\left(i\sigma_3\frac{\partial}{\partial\tau}+\mathrm{ch}\,\mu\right)\varphi(x,\tau)=0\ , \tag{2.1}$$

где $\mathrm{ch}\,\mu=\sqrt{1+\frac{m^2}{M^2}}$, $M=\frac{1}{\ell}$ – "фундаментальная масса", а $\varphi(x,\tau)$ – двухкомпонентная величина:

$$\varphi(x,\tau)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\tau)\\ \varphi_2(x,\tau)\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Переход к физическим полям произведем при помощи "ослабленного" условия де Ситтера*)[2]:

$$\left(\Box-M^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-M^2\right)\varphi(x,\tau)\Big|_{\tau=0}=0\,. \tag{2.3}$$

Условие инвариантности уравнения движения для поля $\varphi(x,\tau)$ относительно обобщенных локальных калибровочных преобразований ([I,2]):

$$\varphi'(x,\tau)=e^{ie\lambda(x,\tau)e^{-i\tau}}\varphi(x,\tau) \tag{2.4}$$

---

*) В Приложении дан пример использования условия де Ситтера при произвольном значении параметра τ .

требует введения пятикомпонентного вектора электромагнитного поля $B_M(x,\tau)$ (M=0,1,2,3,4) и соответствующей замены обычных производных на ковариантные:

$$D_M = \partial_M + ie\,B_M(x,\tau)\,. \tag{2.5}$$

Уравнение движения в 4-пространстве получается затем с помощью проектирования на плоскость $\tau=0$, с учетом калибровочно-инвариантного условия де Ситтера *):

$$\left(D_M D^M - 1\right)\varphi(x,\tau)\Big|_{\tau=0} = 0\,. \tag{2.6}$$

Окончательно будем иметь:

$$\left(D_\mu D^\mu + m^2\right)\varphi(x) = 0\,. \tag{2.7}$$

Следовательно, процедура, которая в спинорном случае приводила к появлению ряда новых взаимодействий, зависящих от ℓ, в скалярной электродинамике не дает ничего нового.

§3. Уравнения движения для свободного массивного векторного поля в новом формализме

В работе /I/ были получены уравнения движения для свободного безмассового векторного поля, согласующиеся с новыми геометрическими требованиями. Здесь мы выпишем аналогичные уравнения для массивных векторных полей.

Естественно предположить, что массивное векторное поле есть пятивектор $\Phi^M(x,\tau) = (\Phi^\mu(x,\tau), \Phi^4(x,\tau))$, каждая компонента которого является дублетом типа (2.2):

$$\Phi^M(x,\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_1^M(x,\tau) \\ \varphi_2^M(x,\tau) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Далее, исходя из пятимерного обобщения уравнения $-\partial_\mu\partial_\nu\Phi^\mu + \partial_\mu\partial^\mu\Phi_\nu + m^2\Phi_\nu = 0$, можно показать, что поле (3.1) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\mathrm{Ch}\,\mu\,\Phi_\nu + i\sigma_3\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial\tau} - i\frac{\partial\Phi_4}{\partial x^\nu} = 0 \tag{3.2}$$

*) В дальнейшем перейдем к системе единиц, где вместе с $\hbar$ и c, $M=\ell=1$.

$$\mathrm{Ch}\,\mu\,\Phi_4 - i\sigma_3\frac{\partial\Phi_4}{\partial\tau} + i\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0\,. \tag{3.3}$$

Вследствие (3.2) и (3.3) компонента $\Phi_4(x,\tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left(\Box - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \mathrm{Ch}^2\mu\right)\Phi_4(x,\tau) = 0, \tag{3.4}$$

и, как можно убедиться, не является независимой динамической степенью свободы.

Лагранжиан, приводящий к уравнениям (3.2)-(3.3) для массивных векторных полей, имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(x,\tau) = {}& \mathrm{Ch}\,\mu\left[\theta_M^+\Phi^M + \Phi_M^+\theta^M\right] + \\ &+ \frac{i}{2}\left[\theta_\mu^+\sigma_3\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta_\mu^+}{\partial\tau}\sigma_3\Phi^\mu + \Phi_\mu^+\sigma_3\frac{\partial\theta^\mu}{\partial\tau} - \frac{\partial\Phi_\mu^+}{\partial\tau}\sigma_3\theta^\mu\right] - \\ &- \frac{i}{2}\left[\theta_4^+\sigma_3\frac{\partial\Phi^4}{\partial\tau} - \frac{\partial\theta_4^+}{\partial\tau}\sigma_3\Phi^4 + \Phi_4^+\sigma_3\frac{\partial\theta^4}{\partial\tau} - \frac{\partial\Phi_4^+}{\partial\tau}\sigma_3\theta^4\right] + \\ &+ i\left[\theta_\mu^+\frac{\partial\Phi^4}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\theta_4^+}{\partial x^\mu}\Phi^\mu + \Phi_\mu^+\frac{\partial\theta^4}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\Phi_4^+}{\partial x^\mu}\theta^\mu\right],\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\theta^M(x,\tau) = \sigma_1\Phi^M(x,-\tau)\,. \tag{3.6}$$

Если на поле $\Phi_\mu(x,\tau)$ наложено условие де Ситтера (2.3), то уравнения (3.2)-(3.3) эквивалентны свободным уравнениям движения обычной теории:

$$\partial_\nu G_{\mu\nu} + m^2\Phi_\mu(x) = 0\,, \tag{3.7}$$

где

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu\Phi_\mu(x) - \partial_\mu\Phi_\nu(x)\,. \tag{3.8}$$

§4. Электродинамика массивного векторного поля

Введение взаимодействия с электромагнитным полем, естественно, основано на требовании инвариантности по отношению к локальным калибровочным преобразованиям

$$\Phi_M(x,\tau) \to e^{ie\lambda(x,\tau)e^{-i\tau}}\Phi_M(x,\tau) \tag{4.1}$$

$$\theta_\mu(x,\tau) \to e^{ie\lambda^+(x,\tau)} e^{i\tau}\,\theta_\mu(x,\tau) \quad . \tag{4.2}$$

Этот принцип однозначно приводит к следующему лагранжиану:

$$\mathcal{L}_{\text{полный}}(x,\tau) = \mathcal{L}_0(x,\tau) + \mathcal{L}_{\text{максвелл}}(x,\tau) + \mathcal{L}_{\text{вз}}(x,\tau) \ , \tag{4.3}$$

где $\mathcal{L}_0(x,\tau)$ определяется формулой (3.5), $\mathcal{L}_{\text{максвелл}}$ – формулой (57) из /2/ и

$$\mathcal{L}_{\text{вз}}(x,\tau) = eB^\mu(\theta_\mu^+\Phi_4 + \theta_4^+\Phi_\mu) + eB_\mu^+(\Phi^{+\mu}\theta_4 + \Phi_4^+\theta^\mu) - eB_4(\theta_\mu^+\sigma_3\Phi^\mu - \theta_4^+\sigma_3\Phi^4) - eB_4^+(\Phi_\mu^+\sigma_3\theta^\mu - \Phi_4^+\sigma_3\theta^4) . \tag{4.4}$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$Ch\mu\,\Phi_\nu + \sigma_3\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - eB_4\right)\Phi_\nu - \left(i\frac{\partial}{\partial x^\nu} - eB_\nu\right)\Phi_4 = 0 \tag{4.5}$$

$$Ch\mu\,\Phi_4 - \sigma_3\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - eB_4\right)\Phi_4 + \left(i\frac{\partial}{\partial x^\nu} - eB_\nu\right)\Phi^\nu = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial\tau} - \frac{\partial B_4}{\partial x^\mu} = ie(\Phi_\mu^+\theta_4 + \Phi_4^+\theta_\mu) \tag{4.7}$$

$$2B_4 - i\frac{\partial B_4}{\partial\tau} + i\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu} = e(\Phi_4^+\sigma_3\theta^4 - \Phi_\mu^+\sigma_3\theta^\mu) \quad . \tag{4.8}$$

Налагая калибровочно-инвариантное условие де Ситтера (2.6) на поле Φ_μ, получаем уравнения движения в четырехмерном пространстве-времени:

$$D_\nu\mathcal{G}^{\mu\nu} + m^2\Phi^\mu + ieF^{\mu\nu}\Phi_\nu + ie\sigma_3\cdot F^{\mu4}\Phi_4 = 0 \ , \tag{4.9}$$

где

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = D^\nu\Phi^\mu - D^\mu\Phi^\nu \ , \tag{4.10}$$

а $F^{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля.

Из системы уравнений (4.9) нельзя однозначно определить все 5 компонент поля Φ^μ. Поэтому мы дополним эту систему еще одним уравнением:

$$\left(D_\mu D^\mu - Ch^2\mu\right)\Phi_4(x,\tau)\Big|_{\tau=0} = 0 \ , \tag{4.11}$$

которое получается из (3.4) в результате перехода к ковариантным производным. Из (4.11) и (4.5), (4.6) вытекает, что

$$F_{\mu4}(x,0)\cdot\Phi^\mu(x,0) = 0 \ . \tag{4.12}$$

Это соотношение в дальнейшем будет играть роль уравнения "связи".

Другие связи возникают при проектировании (4.7) и (4.8) на плоскость $\tau = 0$ с учетом (3.6):

$$F_{\mu4}(x,0) = ie\left(\Phi_\mu^+\sigma_3\Phi_4 + \Phi_4^+\sigma_3\Phi_\mu\right) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial B_\nu(x,0)}{\partial x_\nu} = i\left(2B_4 - i\frac{\partial B_4}{\partial\tau}\right) - e\left(\Phi_\mu^+\sigma_3\Phi^\mu - \Phi_4^+\sigma_3\Phi^4\right) . \tag{4.14}$$

Искомые уравнения движения полей должны получаться в результате варьирования интеграла действия с учетом всех связей. Это эквивалентно использованию лагранжиана:

$$\mathcal{L}_{\text{полный}} = -\frac12\mathcal{G}^+_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu} + m^2\Phi_\mu^+\Phi^\mu - \frac14 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + ieF^{\mu\nu}\Phi_\mu^+\Phi_\nu + ieF^{\mu4}(\Phi_\mu^+\sigma_3\Phi_4 + \Phi_4^+\sigma_3\Phi_\mu) + F^{\mu4}\eta^+\Phi_\mu + F^{+\mu4}\Phi_\mu^+\eta + \xi_\mu\left[F^{\mu4} + ie(\Phi^{+\mu}\sigma_3\Phi_4 + \Phi_4^+\sigma_3\Phi^\mu)\right] \ , \tag{4.15}$$

где η и ξ_μ – множители Лагранжа. Варьируя по всем полям как по независимым переменным, находим:

$$D_\nu\mathcal{G}^{\mu\nu} + m^2\Phi^\mu + ieF^{\mu\nu}\Phi_\nu + ieF^{\mu4}\sigma_3\Phi_4 - F^{\mu4}\eta + ie\xi^\mu\sigma_3\Phi_4 = 0 \tag{4.16}$$

$$F^{\mu4}\sigma_3\Phi_\mu + \xi^\mu\sigma_3\Phi_\mu = 0 \tag{4.17}$$

$$ie\left(\Phi_\mu^+\sigma_3\Phi_4 + \Phi_4^+\sigma_3\Phi_\mu\right) + \eta^+\Phi_\mu + \Phi_\mu^+\eta + \xi_\mu = 0 \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = ie\left[\Phi^{+\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu} - \mathcal{G}^+_{\mu\nu}\Phi^\nu + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\Phi_\mu^+\Phi_\nu - \Phi_\nu^+\Phi_\mu\right)\right] . \tag{4.19}$$

Учитывая далее условия связи (4.12) и (4.13), будем иметь:

$$\xi_\mu = 0 \qquad (4.20)$$

$$\eta = ie\sigma_3\Phi_4. \qquad (4.21)$$

В итоге можно получить следующую форму для полного лагранжиана рассматриваемой теории:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{G}^{+\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu} + m^2\Phi^+_\mu\Phi^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + ieF^{\mu\nu}\Phi^+_\mu\Phi_\nu. \qquad (4.22)$$

Это выражение имеет тот же самый вид и в единицах $\hbar = c = 1$. Таким образом, параметр ℓ выпадает из конечного результата. Единственным следом пятимерных уравнений (4.5)-(4.8), в которых фундаментальная длина явно содержалась, является новое неминимальное взаимодействие $-ieF^{\mu\nu}\Phi^+_\mu\Phi_\nu$. Оно приводит к аномальному магнитному моменту для поля $\Phi_\mu(x)$ уже в низшем порядке теории возмущений. Чтобы убедиться в этом, исследуем нерелятивистский предел уравнений движения для поля Φ_μ:

$$D_\nu\mathcal{G}^{\mu\nu} + m^2\Phi^\mu + k\,ieF^{\mu\nu}\Phi_\nu = 0\ ,\ k = 1 \qquad (4.23)$$

считая электромагнитное поле A_μ классическим. Пусть

$$A_0(x) = \frac{\partial}{\partial x_0}\vec{A}(x) = \partial_\mu A^\mu = 0 \qquad (4.24)$$

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{2}[\vec{H}\times\vec{r}\,].$$

Сохраняя старшие члены по $\frac{1}{c}$ и используя дополнительное условие

$$D_\mu\Phi^\mu = 0, \qquad (4.25)$$

для $\vec{\Phi}$ получим

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Phi} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\vec{\Phi} = -\frac{e}{2mc}(\vec{H}\cdot\vec{L})\vec{\Phi} - \frac{ie\hbar}{2mc}(1-k)\vec{H}\times\vec{\Phi}. \qquad (4.26)$$

Первый член в правой части (4.26) описывает взаимодействие магнитного поля с орбитальным моментом $\vec{L}$, а второй член соответствует взаимодействию $\vec{H}$ со спином. В нашем случае коэффициент k перед аномальным магнитным моментом равен единице и, следовательно, в данной модели векторная частица обладает нулевым магнитным моментом.

Авторы искренне благодарны В.Г.Кадышевскому за многочисленные обсуждения разных аспектов квантовой электродинамики с фундаментальной длиной.

<u>Приложение</u>: Взаимодействие скалярного и внешнего электромагнитных полей

Рассмотрим систему уравнений:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - eB_4 + \sigma_3 Ch\mu\right)\varphi(x,\tau) = 0 \qquad (\text{П}.1)$$

$$\left[(i\partial_\mu - eB_\mu)(i\partial^\mu - eB^\mu) + 1\right]\varphi(x,\tau) = 0. \qquad (\text{П}.2)$$

Решение первого уравнения есть:

$$\varphi(x,\tau) = e^{i\sigma_3 Ch\mu\,\tau}\, e^{-ie\int_{\tau_0}^{\tau} B_4(x,t)\,dt}\cdot f(x). \qquad (\text{П}.3)$$

Подставляя (3) в (2), получим уравнение для $f(x)$:

$$\left\{\left[\partial_\mu + ieA_\mu(x,\tau)\right]\left[\partial^\mu + ieA^\mu(x,\tau)\right] + m^2\right\} f(x) = 0, \qquad (\text{П}.4)$$

где

$$A_\mu(x,\tau) = B_\mu(x,\tau) - \int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\partial B_4(x,t)}{\partial x^\mu}\,dt. \qquad (\text{П}.5)$$

Заметим, что

$$F_{\mu 4}(x,\tau) = \frac{\partial A_\mu(x,\tau)}{\partial\tau}. \qquad (\text{П}.6)$$

Так как для внешнего поля

$$F_{\mu 4}(x,\tau) = 0, \qquad (\text{П}.7)$$

тогда

$$A_\mu(x,\tau) \equiv A_\mu(x), \qquad (\text{П}.8)$$

а уравнение (4) запишется в виде:

$$\left\{\left[\partial_\mu + ieA_\mu(x)\right]\left[\partial^\mu + ieA^\mu(x)\right] + m^2\right\} f(x) = 0. \qquad (\text{П}.9)$$

Это уравнение совпадает с обычным уравнением для взаимодействующего скалярного поля.

Литература

I. V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., 1978, B141, p.477.
2. В.Г.Кадышевский. ЭЧАЯ, I980, II, №I, с.5.
3. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. Болгарский физический журнал, I974, I, стр. 58, I50, 233; I975, 2, с.3; Труды математического института им. В.А.Стеклова, I975, I36, с.85.

Рукопись поступила в издательский отдел
I5 февраля I980 года.