

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



7995

ЭКЗ. ЧИТ. ЗАЛ
Р2 - 7995

Л.С.Дульян, Р.Н.Фаустов

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7995

Л.С.Дульян,* Р.Н.Фаустов

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в ТМФ

* Институт математики АН Арм. ССР

Введение

Хорошо известны преимущества квазипотенциального метода Логунова и Тавхелидзе^{/1/} в задаче о связанном состоянии двух частиц^{/2/} по сравнению с другими подходами. Этот метод позволяет совмещать простоту и наглядность трехмерного /одновременного/ описания нерелятивистской квантовой механики /уравнения Шредингера/ с ковариантным аппаратом квантовой теории поля /функций Грина и диаграмм Фейнмана/^{/3/}. Квазипотенциальное уравнение было с успехом применено для вычисления тонкой и сверхтонкой структуры водородоподобных атомов^{/2/}.

Квазипотенциальный метод универсален и симметричен в описании обеих частиц. Благодаря этому он применим для рассмотрения любой системы частиц с произвольными массами. В нерелятивистском пределе квазипотенциальное уравнение переходит в обычное уравнение Шредингера. Однако известно^{/4/}, что операция приравнивания времен не позволяет, вообще говоря, получить уравнение Дирака для одной из частиц, когда масса другой устремляется к бесконечности. Это происходит из-за наличия лишних положительно-частотных, проекционных операторов в правой части уравнения. В то же время при рассмотрении таких водородоподобных атомов, в которых ядро обладает большим зарядом и большой массой, бывает удобно воспользоваться в качестве исходного приближения точными решениями уравнения Дирака с кулоновским потенциалом.

Такого рода метод под названием "модели эффективного потенциала" был предложен Гротчем и Йенни^{/5/}.

Однако, как отмечают сами авторы работы /5/, в рамках их схемы не сформулированы последовательно уравнения для связанных состояний и процедура построения оператора потенциала /именно поэтому использован термин модель/. Аналогичное уравнение рассматривалось Гроссом /6/.

В настоящей работе мы покажем, как в рамках квантовой теории поля, используя идеи квазипотенциального подхода Логунова и Тавхелидзе, можно построить самоогласованный трехмерный формализм, приводящий к модифицированному уравнению Дирака.

1. Релятивистская волновая функция

Рассмотрим двухвременную волновую функцию связанного состояния двух частиц с массами m_1 и m_2 и спином $1/2$:

$$\Psi_B(x_1, x_2) = \langle 0 | T \{ \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \} | B \rangle. \quad /1.1/$$

где $\psi_{1,2}(x_{1,2})$ - гейзенберговские операторы взаимодействующих полей электрона и протона соответственно; $|B\rangle = |M, J, P_B\rangle$ - вектор связанного состояния с определенной массой, спином и импульсом; $E_B = \sqrt{M^2 + \vec{P}_B^2}$.

Вместо того, чтобы, следуя обычному квазипотенциальному методу, приравнять временные аргументы операторов ψ_1 и ψ_2 , устремим t_2 к бесконечности и перейдем к пределу. Для обеспечения релятивистской ковариантности этот предельный переход можно совершать в системе центра масс, а при переходе к произвольной системе, где полный четырехимпульс связанного состояния есть P_B , надо потребовать, чтоб к бесконечности стремилась величина $P_B \cdot x_2 / M$, которая играет роль "собственного времени".

Как известно /7/, в пределе при $t \rightarrow \pm\infty$ /здесь предел понимается в смысле слабой сходимости/ операторы взаимодействующих полей, о которых мы ничего не знаем, кроме одновременных перестановочных соотношений,

совпадают с операторами асимптотических полей или так называемыми ((out)) - и ((in)) - операторами, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям и дифференциальным уравнениям теории свободных полей /в нашем случае - свободному уравнению Дирака/.

Таким образом, мы можем в определении /1.1/ $\psi_2(x_2)$ заменить на

$$\psi_2^{out}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m_2^2) \theta(k^0) \times \quad /1.2/$$

$$\times \sum_{\lambda} \{ u_{\lambda}^{\lambda}(k) a_{\lambda}^{out}(k) e^{-ikx_2} + v_{\lambda}^{\lambda}(k) b_{\lambda}^{out}(k) e^{ikx_2} \},$$

где $u^{\lambda}(k)$ и $v^{\lambda}(k)$ - решения уравнения Дирака с положительной и отрицательной частотой и поляризацией λ , нормированные условием $\bar{u}u = -\bar{v}v = 2m_2$;

Подставим разложение /1.2/ в равенство /1.1/, учитывая, что теперь, в силу определения T-произведения, оператор $\psi_2^{out}(x_2)$ будет стоять слева от $\psi_1(x_1)$. В результате для волновой функции /1.1/ получим следующее выражение:

$$\Psi_B(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m_2^2) \theta(k^0) e^{-ikx_2} \sum_{\lambda} u^{\lambda}(k) \times \quad /1.3/$$

$$\times \langle k, \lambda | \psi_1(x_1) | B \rangle.$$

В дальнейшем нам будет удобнее работать с волновой функцией в импульсном представлении

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - P) \chi_B(p_1, \vec{p}_2) = \int e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \Psi_B(x_1, x_2) d^4x_1 d^4x_2. \quad /1.4/$$

Используя трансляционную инвариантность, найдем

$$\chi_B(p_1, \vec{p}_2) = 2\pi \delta(p_2^2 - m_2^2) \theta(p_2^0) \sum_{\lambda} u^{\lambda}(p_2) \langle \vec{p}_2, \lambda | \psi_1(0) | B \rangle. \quad /1.5/$$

Зависимость χ_B от энергии протона дается множителем $2\pi\delta(p_2^2 - m_2^2)\theta(p_2^0)$, показывающим, что протон находится на массовой поверхности. В дальнейшем этот множитель мы будем опускать, помня, что

$$p_2^0 = \epsilon_2(\vec{p}_2) = +\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2}. \quad /1.6/$$

Кроме того, волновую функцию удобно спроецировать на подпространство положительно-частотных состояний протона

$$2\pi\delta(p_2^2 - m_2^2)\theta(p_2^0)\Psi_B(p_1, \vec{p}_2) = \quad /1.7/$$

$$= \frac{1}{2m_2\sqrt{2\epsilon_2(\vec{p}_2)}} u^\lambda(p_2)\chi_B(p_1, \vec{p}_2)$$

$$\Psi_B(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_2(\vec{p}_2)}} \langle \vec{p}_2, \lambda | \psi_1(0) | B \rangle. \quad /1.8/$$

Перейдем теперь к переменным полного и относительного импульса:

$$p_1 = \eta_1 \mathcal{P} + p \quad \mathcal{P} = p_1 + p_2 \quad /1.9/$$

$$p_2 = \eta_2 \mathcal{P} - p \quad p = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2.$$

$$p_2^2 = m_2^2$$

Здесь η_1 и η_2 связаны условием $\eta_1 + \eta_2 = 1$. В частности, их можно выбрать в виде

$$\eta_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M^2}$$

$$\eta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M^2},$$

Тогда $(p \cdot \mathcal{P}) = \frac{1}{2}(p_1^2 - m_1^2)$. На массовой поверхности $p_1^2 = m_1^2$,

$(p \cdot \mathcal{P}) = 0$ - вектор p переходит в четырехвектор относительного импульса Гединга и Вайтмана. Волновую функцию /1.8/, зависящую от новых переменных, будем обозначать $\Psi_{\mathcal{P}}(\vec{p})$.

Рассмотрим трансформационные свойства волновой функции /1.8/ при преобразованиях Лоренца. Пусть Λ - преобразование Лоренца, переводящее 4-вектор $\{M, \vec{0}\}$ в $\{E(\vec{\mathcal{P}}), \vec{\mathcal{P}}\}$. Тогда векторы состояний канонического базиса и оператор поля, входящие в волновую функцию /1.8/, преобразуются по формулам /3,7/

$$\langle \vec{p}_2 | U(\Lambda) = D_2^{1/2}(R_{\Lambda p_2}^W) \langle \vec{\Lambda}^{-1} p_2 |,$$

$$U(\Lambda) | \vec{\mathcal{P}} \rangle = | \vec{0} \rangle, \quad /1.11/$$

$$U^{-1}(\Lambda) \psi(0) U(\Lambda) = S_1(\Lambda) \psi_1(0),$$

где $U(\Lambda)$ - оператор бесконечномерного представления группы Лоренца; $S_1(\Lambda)$ - матрица спинорного представления группы Лоренца; $D_2^{1/2}(R)$ - матрица конечного вращения, а вигнеровское вращение

$$R_{\Lambda p_2}^W = L_{p_2}^{-1} \Lambda L_{\Lambda p_2}^{-1}.$$

На основании формул /1.11/ получаем закон преобразования волновой функции /1.8/

$$\sqrt{2\epsilon_2(\vec{p}_2)} \Psi_{\mathcal{P}}(\vec{p}) = \langle \vec{p}_2 | \psi_1(0) | \vec{\mathcal{P}} \rangle$$

$$= D_2^{1/2}(R_{\Lambda p_2}^W) S_1(\Lambda) \langle \vec{\Lambda}^{-1} p_2 | \psi_1(0) | \vec{0} \rangle = \quad /1.12/$$

$$= D_2^{1/2}(R_{\Lambda p_2}^W) S_1(\Lambda) \sqrt{2\epsilon_2(\vec{\Lambda}^{-1} p_2)} \Psi_M(\vec{\Lambda}^{-1} p).$$

2. Двухчастичная функция Грина

В следующем разделе мы построим уравнение, которому подчиняется волновая функция /1.7/. С этой целью, следуя квазипотенциальному методу в квантовой теории поля /1/, введем двухчастичную функцию Грина /3,7/

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = -i \langle 0 | T \{ \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \bar{\psi}_1(y_1) \bar{\psi}_2(y_2) \} | 0 \rangle. \quad /2.1/$$

Используя прием, описанный в разделе 1, перейдем к пределу $x_2^0 \rightarrow \infty, y_2^0 \rightarrow -\infty$. В результате получим:

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = -i \langle 0 | \psi_2^{\text{out}}(x_2) T \{ \psi_1(x_1) \bar{\psi}_1(y_1) \} \bar{\psi}_2^{\text{in}}(y_2) | 0 \rangle. \quad /2.2/$$

После подстановки сюда выражения /1.3/ для $\psi_2^{\text{out}}(x_2)$ и аналогичного выражения для $\bar{\psi}_2^{\text{in}}(y_2)$ под интегралом получим матричный элемент T -произведения $\langle p_2 | T \{ \psi_1(x_1) \bar{\psi}_1(y_1) \} | q_2 \rangle$, который при помощи θ -функций и полного набора стационарных состояний можно записать в виде:

$$\langle \vec{p}_2 | T \{ \psi_1(x_1) \bar{\psi}_1(y_1) \} | \vec{q}_2 \rangle = \quad /2.3/$$

$$= -i \theta(x_1^0 - y_1^0) \sum_n \langle \vec{p}_2 | \psi_1(x_1) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_1(y_1) | \vec{q}_2 \rangle +$$

$$+ i \theta(y_1^0 - x_1^0) \sum_n \langle \vec{p}_2 | \bar{\psi}_1(y_1) | n \rangle \langle n | \psi_1(x_1) | \vec{q}_2 \rangle.$$

Теперь удобнее перейти в импульсное пространство:

$$(2\pi)^4 \delta^4(\mathcal{P} - \mathcal{Q}) G(p_1, \vec{p}_2; q_1, \vec{q}_2) =$$

$$= \int e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2 - iq_1 y_1 - iq_2 y_2} G(x_1, x_2; y_1, y_2) \times \quad /2.4/$$

$$d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2$$

Множители $2\pi \delta(p_2^2 - m_2^2) \theta(p_2^0)$ и $2\pi \delta(q_2^2 - m_2^2) \theta(q_2^0)$, которые при этом появятся, опустим, помня, что

$$p_2^0 = \epsilon_2(\vec{p}_2) = +\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2}, \quad q_2^0 = \epsilon_2(\vec{q}_2) = +\sqrt{\vec{q}_2^2 + m_2^2}.$$

Кроме того, спроецируем функцию Грина на подпространство положительно-частотных состояний частицы 2, так же, как мы поступили с волновой функцией. В дальнейшем под G мы будем понимать функцию

$$G^{(+)} = \frac{\bar{u}_2(\vec{p}_2)}{\sqrt{2\epsilon_2(\vec{p}_2)}} G \frac{u_2(\vec{q}_2)}{\sqrt{2\epsilon_2(\vec{q}_2)}}.$$

Используя трансляционную инвариантность и интегральное представление θ -функции, нетрудно получить спектральное представление функции Грина в импульсном пространстве /в переменных /1.9//:

$$G(\vec{p}, \vec{q}, \mathcal{P}) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_2(\vec{p}_2)\epsilon_2(\vec{q}_2)}} \int dE' \left\{ \frac{I(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\mathcal{P}}, E')}{E - E' + i0} + \frac{\bar{I}(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\mathcal{P}}, E')}{E + E' - i0} \right\}, \quad /2.5/$$

где

$$I(\vec{p}, \vec{q}, \mathcal{P}, E) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(E - E_n) \times \quad /2.5a/$$

$$\times \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{P}_n) \langle \vec{p}_2 | \psi_1(0) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_1(0) | \vec{q}_2 \rangle$$

/2.5b/

$$\bar{I}(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\mathcal{P}}, E) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(E - E_n) \times$$

$$\times \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_1 + \vec{P}_n) \langle \vec{p}_2 | \bar{\psi}_1(0) | n \rangle \langle n | \psi_1(0) | \vec{q}_2 \rangle$$

Допустим, что среди набора $|n\rangle$ есть связанное состояние $|B\rangle$ с энергией $E_B = \sqrt{M^2 + \vec{P}_B^2}$, $M < m_1 + m_2$. В этом случае, как следует из спектрального представления /2.5/, функция Грина имеет полюс в точке $E = E_B$, и вблизи него после введения переменных /1.9/

$$G(\vec{p}, \vec{q}, \mathcal{P}) = \frac{\Psi_{\mathcal{P}}(\vec{p}) \otimes \bar{\Psi}_{\mathcal{P}}(\vec{q})}{2E_B(E - E_B)} \quad /2.6/$$

Из этого представления следует, что если мы найдем неоднородное уравнение, которому удовлетворяет функция Грина, то соответствующему однородному уравнению будет удовлетворять волновая функция.

3. Модифицированное уравнение Дирака

Определим теперь V оператор квазипотенциала

$$G^{-1} = G_0^{-1} - V, \quad /3.1/$$

где G_0 - функция Грина для свободных невзаимодействующих частиц. Подставляя определение /3.1/ в очевидное тождество $G^{-1}G = 1$, получим

$$(G_0^{-1} - V)G = 1. \quad /3.2/$$

Здесь под 1 понимается соответствующий единичный оператор. Это и есть неоднородное уравнение для функции Грина. Значит, в силу последнего утверждения раздела 2, волновая функция /1.7/ будет удовлетворять однородному уравнению:

$$G_0^{-1}\Psi_B = V\Psi_B. \quad /3.3/$$

Умножение в этих формулах понимается в операторном смысле как интегрирование по пространству трехмерных импульсов.

Найдем явный вид оператора G_0 . Для этого воспользуемся спектральным представлением /2.5/. Подставим в /2.5/ явный вид /1.2/ операторов свободных полей $\psi_1(0)$ и $\psi_1(\vec{0})$. Ясно, что вклад, отличный от нуля, дадут только двухчастичные состояния $|n\rangle = |\vec{k}_1, \lambda_1; \vec{k}_2, \lambda_2\rangle$.

После несложных выкладок мы приходим к следующему результату:

$$G_0 = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_2) \frac{1}{2\epsilon_1(p_1)} \times \\ \times \left\{ \frac{\sum_{\lambda} u^{\lambda}(\vec{p}_1) \times \bar{u}^{\lambda}(\vec{p}_1)}{E_1 - \epsilon_1(p_1)} + \frac{\sum_{\lambda} v^{\lambda}(-\vec{p}_1) \otimes \bar{v}^{\lambda}(-\vec{p}_1)}{E_1 + \epsilon_1(p_1)} \right\}, \quad /3.4/$$

$$E_1 = E - \epsilon_2(\vec{p}_2).$$

Как известно /3/, в используемой здесь нормировке

$$\sum_{\lambda} u^{\lambda}(\vec{p}_1) \otimes \bar{u}^{\lambda}(\vec{p}_1) = \gamma^0 \epsilon_1(p_1) - \vec{\gamma} \vec{p}_1 + m_1$$

$$\sum_{\lambda} v^{\lambda}(-\vec{p}_1) \otimes \bar{v}^{\lambda}(-\vec{p}_1) = \gamma^0 \epsilon_1(p_1) - \vec{\gamma} \vec{p}_1 - m_1,$$

поэтому, приводя оба слагаемых в /3.4/ к общему знаменателю, получим

$$G_0(\vec{p}, \vec{q}, \mathcal{P}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_2) \times \\ \times \frac{\gamma^0 E_1 - \vec{\gamma} \vec{p}_1 + m_1}{E_1^2 - \epsilon_1^2(\vec{p}_1)} = \frac{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_2)}{\hat{p}_1 - m_1} \quad /3.5/$$

$$\hat{p}_1 = E_1 \gamma^0 - \vec{p}_1 \vec{\gamma}.$$

Этот результат можно было бы получить, исходя из других соображений. Для невзаимодействующих частиц матричный элемент в левой части /2.3/ распадается на

произведение $\langle \vec{p}_2, \lambda | \vec{q}_2, \sigma \rangle \times \langle 0 | \Pi \psi_1(x_1) \bar{\psi}_1(y_1) | 0 \rangle$. Первый сомножитель в силу выбранной нормировки векторов состояний равен $(2\pi)^3 2\epsilon_2(\vec{p}_2) \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_2)$, а второй представляет

собой одночастичную функцию Грина. Нетрудно найти обратный оператор G_0^{-1} :

$$G_0^{-1}(\vec{p}, \vec{q}, \mathcal{P}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{q}_2) (\hat{p}_1 - m_1), \quad /3.6/$$

или, в переменных /1.9/

$$G_0^{-1}(\vec{p}, \vec{q}, \mathcal{P}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) (\eta_1 \hat{\mathcal{P}} + \hat{p} - m). \quad /3.7/$$

Подставляя выражение /3.7/ в уравнение /3.3/, получим в результате искомое уравнение для волновой функции:

$$(\eta_1 \hat{\mathcal{P}} + \hat{p} - m_1) \Psi_{\vec{p}}^{\rightarrow}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \Psi_{\vec{q}}^{\rightarrow}(\vec{q}) d^3 q. \quad /3.8/$$

Покажем теперь, что при $m_2 \rightarrow \infty$ это уравнение переходит в уравнение Дирака для частицы 1 во внешнем поле. Предельный переход будем совершать в системе центра масс, где $\vec{\mathcal{P}} = 0$, $\mathcal{P}^0 = M$.

Как следует из равенств /1.10/, в пределе при $m_2 \rightarrow \infty$ и $M - m_2 = \text{const}$, $\eta_1 \rightarrow 0$, $\eta_2 \rightarrow 1$ и

$$p = p_1 = \mathcal{P} - p_2 = \{M - m_2, \vec{p}\}.$$

Следовательно,

$$\eta_1 \hat{\mathcal{P}} + \hat{p} - m = \gamma^0 E_1 - \vec{\gamma} \vec{p} - m, \quad /3.9/$$

$$E_1 = M - m_2,$$

т.е. в левой части /3.8/ будет стоять обычный дираковский оператор:

$$\{\gamma^0 E_1 - \vec{\gamma} \vec{p} - m_1\} \Psi_0^{\rightarrow}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \Psi_0^{\rightarrow}(\vec{q}) d^3 q. \quad /3.10/$$

Таким образом, мы показали, что в приближении $m_2 \rightarrow \infty$ построенное нами уравнение переходит в уравнение Дирака для частицы во внешнем поле, которое определяется выбором оператора квазипотенциала V . Этот результат

является специфическим следствием развитого нами метода /см. Введение/.

4. Квазипотенциал в приближении однофотонного обмена

Мы определили квазипотенциал V при помощи соотношения /3.1/. Часто бывает удобно выражать оператор квазипотенциала через амплитуду рассеяния T вне массовой поверхности, определенную следующим образом:

$$G = G_0 + G_0 T G. \quad /4.1/$$

Тогда вместо равенства /3.1/ получим эквивалентное определение

$$V = T(1 + G_0 T)^{-1}. \quad /4.2/$$

Обычно это определение используется в виде разложения по теории возмущений

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} + \dots; \quad T = T^{(1)} + T^{(2)} + \dots$$

$$V^{(1)} = T^{(1)}; \quad V^{(2)} = T^{(2)} - T^{(1)} G_0 T^{(1)}. \quad /4.3/$$

В нашем случае можно воспользоваться методом построения амплитуды T с помощью элементов матрицы рассеяния на массовой поверхности ^{1,2/}. Причем, как и функцию Грина, ее надо спроецировать на положительно-частотные состояния протона:

$$T^{(+)} = \frac{\bar{u}(\vec{p}_2)}{\sqrt{2\epsilon_2(\vec{p}_2)}} T \frac{u(\vec{q}_2)}{\sqrt{2\epsilon_2(\vec{q}_2)}}. \quad /4.4/$$

В низшем порядке теории возмущений взаимодействие электрона с протоном описывается однофотонным обменом, который можно представить в виде диаграммы рис. 1.

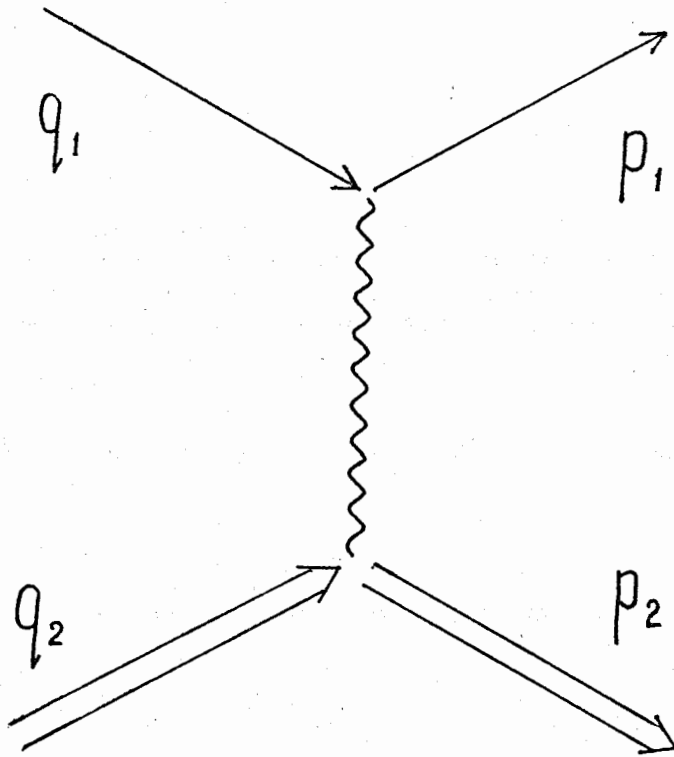


Рис. 1

Согласно равенствам /4.3/ и /4.4/, квазипотенциал в первом приближении равен

$$V^{(1)} = e^2 \frac{u_2(\vec{p}_2)}{\sqrt{2\epsilon_2(\vec{p}_2)}} \gamma_\mu^{(2)} \frac{u_2(\vec{q}_2)}{\sqrt{2\epsilon_2(\vec{q}_2)}} D^{\mu\nu}(k) \gamma_\nu^{(1)} \quad /4.5/$$

$$k = p_2 - q_2 = q_1 - p_1 = \{0, \vec{p} - \vec{q}\}.$$

Фотонный пропагатор $D^{\mu\nu}(k)$ удобно выбрать в так называемой кулоновской калибровке:

$$D^{00}(k) = \frac{1}{\vec{k}^2}; \quad D^{ij}(k) = -\frac{1}{k^2} (\delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2});$$

$$D^{oi} = D^{io} = 0.$$

Используя явный вид спиноров $u_2(\vec{p})$

$$u_2(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2(\vec{p}) + m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\sigma} \vec{p} \\ \epsilon_2(\vec{p}) + m_2 \end{pmatrix} \omega,$$

произведем в равенстве /4.5/ разложение по \vec{p}_2^2/m_2^2 и

оставим лишь члены первого порядка по этому параметру:

$$V^{(1)} \approx -\frac{e^2}{\vec{k}^2} \left\{ \left(1 - \frac{\vec{k}^2}{8m_2^2}\right) \gamma_0^{(1)} + \frac{(\vec{p}_2 + \vec{q}_2) \vec{\gamma}_1^{(1)}}{2m_2} + \right. \\ \left. + i \frac{\vec{\sigma}_2 [\vec{p}_2 \times \vec{q}_2]}{4m_2^2} \gamma_0^{(1)} - i \frac{[\vec{\sigma}_2 \times \vec{k}] \vec{\gamma}_1^{(1)}}{2m_2} \right\}, \quad /4.6/$$

где

$$\vec{\gamma}_1^{(1)} = \gamma^{(1)} - \frac{(\vec{\gamma}^{(1)} \vec{k}) \vec{k}}{\vec{k}^2}; \quad \vec{\gamma}_1 \vec{k} = 0.$$

Поскольку в разложении участвуют члены, линейные по $\frac{p}{m}$, слагаемые, квадратичные по этому параметру, отбросим. Член $\frac{1}{2m_2} [\vec{\sigma}_2 \times \vec{k}] \vec{\gamma}_1^{(1)}$ приводит к сверхтонкому расщеплению уровней, а так как мы этот эффект сейчас не рассматриваем, его тоже можно опустить.

Чтобы оценить слагаемое $\frac{1}{2m_2} (\vec{p}_2 + \vec{q}_2) \vec{\gamma}_1^{(1)}$, заметим, что

$$\text{его среднее значение порядка } \frac{\langle p^2 \rangle}{m_2} \sim \frac{m_1^2}{m_2} a^2 \left(a \approx \frac{1}{137} \right)$$

постоянная тонкой структуры/. Поскольку оно входит в выражение для квазипотенциала умноженным на кулоновский член e^2/k^2 , среднее значение которого по теореме вириала имеет порядок $m_1 a^2$, то приводит к поправкам порядка $m_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right) a^4$. Поправками такого порядка мы будем в дальнейшем пренебрегать. В результате оператор однофотонного квазипотенциала в указанном выше приближении сводится к обыкновенному кулоновскому потенциалу:

$$V^{(1)}(\vec{k}) = -\frac{e^2 \gamma_0^{(1)}}{k^2} = V_C(\vec{k}) .$$

5. Приближенное решение модифицированного уравнения Дирака

Запишем уравнение /3.10/ в системе центра масс

$$\begin{aligned} & \{ \gamma^0 (M - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}^2}) - \vec{\gamma} \vec{p} - m_1 \} \Psi_{\vec{p}}(\vec{p}) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V_C(\vec{p} - \vec{q}) \Psi_{\vec{q}}(\vec{q}) d^3 q . \end{aligned} \quad /5.1/$$

В атоме водорода протон можно рассматривать как нерелятивистскую частицу, так как среднее значение импульса намного меньше его массы

Поэтому с той же точностью, с которой был определен потенциал в правой части уравнения, квадратный корень в левой части можно разложить в ряд, оставив только первые два члена. Тогда уравнение /5.1/ запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \{ \gamma^0 (M - m_2 - \frac{\vec{p}^2}{2m_2}) - \vec{\gamma} \vec{p} - m_1 \} \Psi_{\vec{p}}(\vec{p}) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V_C(\vec{p} - \vec{q}) \Psi_{\vec{q}}(\vec{q}) d^3 q . \end{aligned} \quad /5.2/$$

Для решения этого уравнения воспользуемся теорией возмущений. Оператором возмущения будем считать $(-\frac{\gamma^0 p^2}{2m_2})$. Невозмущенное уравнение /в пределе при $m_2 \rightarrow \infty$ и $M - m_2 = \text{const}$ / совпадает с уравнением Дирака для частицы во внешнем кулоновском поле. Его решения хорошо известны /8/, а для уровней энергии оно приводит к следующему результату:

$$M - m_2 = m_1 f, \quad /5.3/$$

где

$$f(n, j) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{a}{n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - a^2}} \right]^2}}$$

Поправка первого порядка к энергии равна среднему значению оператора возмущения. Для среднего значения квадрата относительного импульса известно следующее нерелятивистское выражение:

$$\langle p^2 \rangle = -2m_1 W, \quad W = M - m_1 - m_2 . \quad /5.4/$$

На основании равенств /5.2/, /5.3/ и /5.4/ имеем:

$$m_1 + W + 2 \frac{m_1}{m_2} W = m_1 f, \quad /5.5/$$

откуда нетрудно получить зависимость энергии связи W от масс частиц и квантовых чисел:

$$W = \mu (f - 1). \quad /5.6/$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса. Таким образом,

в нашем приближении масса атома водорода

$$M = m_1 + m_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [f(n, j) - 1] + O\left(\frac{m_1^2}{m_2} \alpha^4\right). \quad /5.7/$$

Аналогичная зависимость была найдена в работе^{/5/} более сложным способом.

Авторы выражают благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логунову, Р.М.Мурадян, И.Т.Тодорову, А.Н.Тавхелидзе за полезные обсуждения.

Литература

1. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе. *Nuovo Cim.*, 29, 380 (1963).
2. Р.Н.Фаустов. *ЭЧАЯ*, 3, 238 /1972/.
3. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва, 1974.
4. E.E.Salpeter. *Phys.Rev.*, 87, 328 (1952).
5. H.Grotch, D.R.Yennie. *Rev.Mod.Phys.*, 41, 350 (1969).
6. F.Gross. *Phys.Rev.*, 186, 1448 (1969).
7. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров. *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля*. Наука, Москва, 1969.
8. Г.Бете, Э.Солпитер. *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*. Физматгиз, Москва, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1974 года.