

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



C3243

Г-376

P2 - 7976

2627/2-74

В.П.Гердт, В.А.Мещеряков

ЛОКАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕК ПОКОЯ
УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7976

В.П.Гердт, В.А.Мещеряков

ЛОКАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕК ПОКОЯ
УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Summary

The method of investigating the Chew-Low equations suggested earlier is applied to the crossing-symmetry matrix $A(1,1)$. It is based on the use of a number of notions from the theory of differential equations, such as stationary point, invariant manifold, etc. The vicinities of the stationary points of a system of autonomous nonlinear difference equations for this matrix are considered. They are studied on the basis of an abelian one-parameter group of continuous transformations which is associated with the initial difference equations. The detailed quantitative picture of invariant curves can be obtained from group differential equations. In the vicinity of a degenerate stationary point ($X=Y=1$, §3), being of most physical interest, the first formal integral of group differential equations is found. The invariant curves can approach the degenerate stationary point only along definite directions. This directions are indicated by some invariant curves on Fig.1, which separate sets of curves with different properties.

The structure of hyperbolic stationary points $(X_0, -1)$ and $(X_0, 1)$ is clarified and the appropriate invariant curves passing through these points are plotted on Fig.1. The geometrical interpretation of invariant curves on the phase plane makes the following statement obvious:

Solutions with the Born term and correct threshold behavior are absent.

§ I. Введение

В работе /1/ краевая задача на матричные элементы S -матрицы, эквивалентная уравнениям Чу-Лоу, была сведена к системе автономных нелинейных разностных уравнений, для анализа которой весьма плодотворными оказались понятия точки покоя и инвариантного многообразия.

Исследование, проведенное в /1/ для трехрядной матрицы Чу-Лоу, применимо, в частности, и к матрице перекрестной симметрии $A(I, I)$

$$A(1,1) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

Целью настоящей работы является локальный количественный анализ решений системы уравнений, входящих в точки покоя (§ 2), для этой матрицы. Основные результаты анализа содержатся в § 3,4. В § 5 сделаны некоторые заключения о поведении траекторий на всей фазовой плоскости. Приложение содержит следствия условий кроссинг-симметрии для групповых дифференциальных уравнений /1/.

§ 2. Исходные уравнения. Точки покоя

Нелинейные разностные уравнения на матричные элементы S -матрицы имеют вид

$$S_i(w+1) = 1/A_{ij} S_j(w) \quad (1)$$

$$S_i(w) S_i(1-w) = 1 \quad (2)$$

В проективных координатах

$$X(w) = \frac{S_1(w)}{S_2(w)} \quad Y(w) = \frac{S_3(w)}{S_2(w)} \quad (3)$$

получаем

$$X(w+1) = \frac{-2X(w) + 5Y(w) + 3}{2X(w) + 10Y(w) - 6} \quad Y(w+1) = \frac{-2X(w) + 5Y(w) + 3}{2X(w) + Y(w) + 3} \quad (4)$$

$$X(w)X(1-w) = 1 \quad Y(w)Y(1-w) = 1. \quad (5)$$

Уравнения (4) имеют три различные точки покоя. Одна из них,

$$X = Y = 1,$$

особенно важна, поскольку в нее должны входить решения, обладающие правильным пороговым поведением /I/.

Две другие точки покоя

$$X = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \equiv x_0, \quad Y = -1 \quad (6)$$

$$X = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \equiv \bar{x}_0, \quad Y = -1$$

удовлетворяют соотношениям

$$X^2 - 7X + 1 = 0 \quad x_0 \bar{x}_0 = 1. \quad (7)$$

Ниже точки (6) будем называть седловыми точками покоя (см. § 4).

§ 3. Точка покоя $X=Y=1$

Следуя работе /I/, выделим симметричные и антисимметричные части функций $S_i(w)$

$$S(w) = S_1(w) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} S_2(w) \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2Y(w) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$S_1(w) = S_1(-w) \quad S_2(w) = S_2(-w) \quad Y(w) = -Y(-w)$$

и рассмотрим переменные

$$x(w) = \frac{Y(w)}{S_1(w)} \quad y(w) = \frac{S_2(w)}{S_1(w)},$$

связанные с функциями (3) проективным преобразованием

$$X = \frac{1-4x + \frac{15}{4}y}{1-2x - \frac{5}{4}y} \quad Y = \frac{1+2x + \frac{3}{4}y}{1-2x - \frac{5}{4}y} \quad (9)$$

Из (9) видно, что в переменных x, y точка покоя совпадает с началом координат. Перепишем систему уравнений (4)-(5) в новых переменных

$$x' = F(x, y) \quad F(x, y) = \frac{x + 3x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{5}{4}y^2}{1 + 4x + \frac{15}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2} \quad (10)$$

$$y' = R(x, y) \quad R(x, y) = \frac{-y + 2x^2 + 2xy - \frac{5}{4}y^2}{1 + 4x + \frac{15}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2}$$

$$x = x(w) \quad x' = x(w+1) \quad x(w) = -x(-w) \quad (11)$$

$$y = y(w) \quad y' = y(w+1) \quad y(w) = y(-w).$$

Будем рассматривать уравнения (10) как преобразование плоскости x, y

$$(x', y') = T(x, y). \quad (12)$$

Каждой точке окрестности начала координат соответствуют две кривые, инвариантные относительно четных степеней преобразования T , в то время как нечетные степени T переводят одну кривую в другую. Иначе говоря, под действием преобразования T точка окрестности начала координат движется, перескакивая с одной кривой на другую /I/.

Каждая из кривых удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$P(x, y) dx - Q(x, y) dy = 0, \quad (13)$$

в котором функции P и Q представляются степенными рядами, сходящимися абсолютно и равномерно в некоторой окрестности начала координат

$$P(x, y) = -6xy + 4x^3 - xy^2 - 15x^2y + \frac{15}{4}xy^3 + O_5(x, y)$$

$$Q(x, y) = -x^2 - \frac{5}{4}y^2 - \frac{15}{4}x^2y + \frac{15}{16}y^3 + 5x^4 + \frac{275}{48}x^2y^2 - \frac{335}{192}y^4 + O_5(x, y). \quad (I4)$$

Здесь и ниже $O_n(x, y)$ означает члены $n^{\text{го}}$ порядка и выше по x и y .

В Приложении доказываются следующие свойства этих функций

$$P(x, y) = -P(-x, y)$$

$$Q(x, y) = Q(-x, y), \quad (I5)$$

являющиеся следствием условия перекрестной симметрии. Ниже ограничимся изучением решений уравнения (I3), входящих в начало координат, так как только они представляют физические решения. Так же как в случае трехрядной матрицы Чу-Лоу, для матрицы $A(I, I)$ существует три направления (исключительные направления), вдоль которых траектории могут входить в точку покоя $x = y = 0$

$$y = 0$$

$$y = \pm 2x. \quad (I6)$$

С помощью подстановки

$$x = (A + B\eta)\xi$$

$$y = (C + D\eta)\xi$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0 \quad (I7)$$

уравнение (I3) приводится к известному уравнению Брио и Буке^{/2/}

$$\xi \frac{d\eta}{d\xi} = b\eta + a_{10}\xi + \sum_{m+n \geq 2} a_{mn}\xi^m \eta^n \quad (I8)$$

Для изучения решений уравнения (I3), входящих в точку покоя вдоль направлений (I6), удобно выбрать параметры подстановки (I7) так, чтобы соответствующая кривая в переменных ξ, η входила в начало координат $\xi = \eta = 0$.

Простейший вариант такой подстановки для направления $y = 0$

$$x = \xi$$

$$y = 2\xi$$

с учетом (I4) приводит уравнение (I3) к уравнению (I8) следующего вида

$$\xi \frac{d\eta}{d\xi} = 5\eta - 4\xi - 36\xi^3 + 60\xi^2\eta - \frac{33}{2}\xi\eta^2 - \frac{15}{2}\eta^3 + O_5(\xi, \eta). \quad (I9)$$

Отсутствие в правой части (I9) квадратичных, равно как членов любой четной степени по ξ, η связано со свойством (I5) уравнения (I3).

Тот факт, что в уравнении (I9) коэффициент $b = 5$ есть целое положительное число, позволяет утверждать^{/2/}, что общее решение этого уравнения, входящее в начало координат $\xi = \eta = 0$, дается сходящимся рядом

$$\eta = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i+1} \xi^{2i+1}$$

Коэффициенты этого ряда α_1 и α_2 одинаковы для всех решений,

α_3 произвольно, а остальные коэффициенты однозначно выражаются через α_3 . Таким образом, общее решение уравнения (I9), входящее в точку $\xi = \eta = 0$, имеет вид

$$\eta = \xi + C\xi^5 + \sum_{i \geq 3} \alpha_{i+1}(C)\xi^{2i+1}, \quad (20)$$

где $C \equiv \alpha_3$. Коэффициенты $\alpha_i (i \geq 4)$ при заданном C находятся подстановкой (20) в (I9). В переменных x, y это дает общее решение уравнения (I3), входящее в точку покоя вдоль оси абсцисс

$$y = x^2 + Cx^6 + \sum_{i \geq 4} \alpha_i(C)x^{2i}. \quad (21)$$

Семейство кривых (21) содержит известное решение^{/3/}

$$y = x^2, \quad (22)$$

соответствующее значению $C = 0$. Таким образом,

$$\alpha_i(0) = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь направления

$$y = \pm 2x. \quad (24)$$

Для изучения кривых, входящих в начало координат вдоль этих направлений, выберем параметры подстановки (17) следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= (2 \pm 2)\xi, \end{aligned}$$

после чего из уравнения (13) получим уравнение (18) с $b = -5/3$. Это значение коэффициента b приводит ^{/2/} к существованию, единственности и голоморфности решения (18), входящего в начало координат.

В переменных x, y эти свойства переносятся на решения уравнения (13), входящие в точку покоя вдоль направлений (24). Нетрудно убедиться в том, что соответствующими кривыми являются сами прямые (24). Этот результат вытекает из другой формы соотношений (9)

$$y' - 2x' = -(y + 2x) \frac{1 + 2x - \frac{5}{4}y}{1 + 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2} \quad (25)$$

$$y' + 2x' = -(y - 2x) \frac{1 + 4x + \frac{15}{4}y}{1 + 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2}.$$

Покажем, что (21) и (24) можно объединить в одно семейство кривых, т.е. построить общий интеграл уравнения (13). С этой целью будем искать решение (13) в виде

$$y - x^2 = C_0 \Phi(x^2, y), \quad C_0 = \text{const}. \quad (26)$$

Такая структура общего решения, входящего в начало координат, предполагается соотношениями (15), (21) и (23). Будем искать $\Phi(x^2, y)$

в виде степенного ряда, определяя его коэффициенты из дифференциального уравнения (13). В результате получим

$$\Phi(x^2, y) = [(y^2 - 4x^2) \Psi(x^2, y)]^3, \quad (27)$$

где $\Psi(x^2, y)$ есть степенной ряд

$$\Psi(x^2, y) = 1 - \frac{5}{3}y + \frac{8}{3}x^2 + \frac{65}{64}y^2 + O_3(x, y).$$

Окончательно получаем из (26) и (27) общий интеграл в виде

$$\frac{y - x^2}{[(y^2 - 4x^2) \Psi(x^2, y)]^3} = C_0. \quad (28)$$

Действительно, конечные C_0 приводят к семейству кривых (21) с

$$C = -64C_0, \quad (29)$$

в то время как значение $C_0 = \infty$ дает в силу $\Psi(0,0) \neq 0$ кривую

$$y^2 - 4x^2 = 0,$$

распадающуюся на прямые (24).

Вернемся теперь к уравнениям (10)-(11). Из изложенного ранее следует, что преобразование T устанавливает соответствие между парами кривых семейства (27). В частности, прямые (24) соответствуют друг другу (см. (25)). Рассмотрим две кривые, связанные преобразованием T из семейства (21), которые задаются постоянными C_1 и C_2 и имеют вид

$$y = f_1(x^2) \quad y = f_2(x^2).$$

Эти кривые должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} f_2 [F^2(x, f_1(x^2))] &= R(x, f_1(x^2)) \\ f_1 [F^2(x, f_2(x^2))] &= R(x, f_2(x^2)). \end{aligned} \quad (30)$$

Подстановка в уравнения (30) разложений (21) дает

$$C_1 = -C_2.$$

Отсюда, согласно (29), получаем, что кривые (28) инвариантны относительно преобразования T , если считать C_0 функцией w , обладающей свойством

$$C_0(w+1) = -C_0(w). \quad (31)$$

Кроме того, в силу соотношений (II) и четности левой части формулы (28) по x функция $C_0(w)$ четна по w

$$C_0(w) = C_0(-w). \quad (32)$$

Таким образом, вблизи точки покоя $x=y=0$ траектория, входящая в эту точку, имеет вид (28) с функцией $C_0 = C_0(w)$, удовлетворяющей условиям (31) и (32).

§ 4. Седловые точки покоя

Рассмотрим точку покоя $(x_0, -1)$. Для этого в уравнениях (4)-(5) перейдем к переменным Ψ и Υ

$$X = \frac{x_0 + \Psi}{1 + x_0 \Psi} \quad Y = \frac{\Upsilon - 1}{\Upsilon + 1}, \quad (33)$$

в которых точка $(x_0, -1)$ имеет нулевые координаты $\Psi = \Upsilon = 0$. В новых переменных уравнения (4)-(5) принимают вид

$$\begin{aligned} \Psi' &= \frac{x_0 \Psi - \frac{x_0+4}{9} \Psi + \frac{1-2x_0}{9} \Psi \Upsilon}{1 + \frac{x_0-2}{9} \Psi - \frac{1+4x_0}{9} \Psi \Upsilon} \\ \Upsilon' &= x_0^{-1/2} \Upsilon \frac{1 + x_0 \Psi}{1 + \Psi + \frac{2x_0-7}{9} \Psi(1-\Psi)} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(w) & \Psi' &= \Psi(w+1) & \Psi(w)\Psi(1-w) &= 1 \\ \Upsilon &= \Upsilon(w) & \Upsilon' &= \Upsilon(w+1) & \Upsilon(w) + \Upsilon(1-w) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Разложим правые части уравнений (34) в ряды по степеням Ψ и Υ

$$\begin{aligned} \Psi' &= x_0 \Psi - \frac{x_0+4}{9} \Psi + \frac{2-7x_0}{9} \Psi \Upsilon + \frac{x_0-1}{9} \Psi^2 + \Psi O_2(\Psi, \Upsilon) \\ \Upsilon' &= x_0^{-1/2} \Upsilon + \frac{2x_0-7}{3} \Psi \Upsilon + \frac{6-x_0}{3} \Psi^2 + \Upsilon O_2(\Psi, \Upsilon). \end{aligned} \quad (36)$$

Собственные значения $\lambda_1 = x_0$ и $\lambda_2 = x_0^{-1/2}$ линейного приближения преобразования (36)

$$\begin{aligned} \Psi' &= x_0 \Psi - \frac{x_0+4}{9} \Psi \\ \Upsilon' &= x_0^{-1/2} \Upsilon \end{aligned}$$

удовлетворяют условию

$$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2.$$

В этом случае ^{/4/} точка покоя $\Psi = \Upsilon = 0$ аналогична седловой точке в теории дифференциальных уравнений ^{/5/}, в частности, существует ровно две инвариантные кривые, проходящие через эту точку. Указанную аналогию можно сделать максимально полной, если допустить правомерность перехода от разностных уравнений (36) к групповым дифференциальным уравнениям. Ниже будем считать такой переход, обоснованный для точки $X=Y=1$, справедливым и для точек (6).

Следуя рецептам работы ^{/1/}, получим дифференциальное уравнение (аналог уравнения (13))

$$P(\Psi, \Upsilon, x_0) d\Psi - Q(\Psi, \Upsilon, x_0) d\Upsilon = 0, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} P(\Psi, \Upsilon, x_0) &= \{ x_0 \left[-\frac{1}{2} \Upsilon + \Psi \Upsilon - \frac{7-2x_0}{72} \Psi^2 + \Upsilon O_2(\Psi, \Upsilon) \right] \\ Q(\Psi, \Upsilon, x_0) &= \{ x_0 \left[\Psi + \frac{7-2x_0}{24} \Psi + \frac{5(7-2x_0)}{72} \Psi \Upsilon + \frac{1}{24} \Psi^2 + \Upsilon O_2(\Psi, \Upsilon) \right] \}, \end{aligned} \quad (38)$$

из которого видно, что точка покоя с координатами $\Psi = \Upsilon = 0$ есть седло. Функции (38) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} P(\Psi, \Psi, x_0) &= P(\Psi, -\Psi, \bar{x}_0) \\ Q(\Psi, \Psi, x_0) &= -Q(\Psi, -\Psi, \bar{x}_0), \end{aligned} \quad (39)$$

где $\bar{x}_0 = 1/x_0$ согласно (7). Соотношения (39) так же как (15), являются следствием условия кроссинг-симметрии (см. Приложение).

Найдем траектории уравнения (36), входящие в точку покоя (начало координат). Вид одной из них

$$\Psi = 0 \quad (40)$$

можно установить непосредственно из уравнений (37)–(38), а также из преобразования (34). Другую траекторию, входящую в начало координат, представим в виде ряда

$$\Psi = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \Psi^i$$

коэффициенты которого находятся из уравнения (37) или из исходных разностных уравнений (36). В результате получим

$$\Psi = -\frac{7-2x_0}{36} \Psi + \frac{7}{144} \Psi^2 + O_3(\Psi). \quad (41)$$

Все сказанное в этом параграфе о точке $(x_0, -1)$ тривиальной заменой $x_0 \rightarrow \bar{x}_0$ переносится на точку покоя $(\bar{x}_0, -1)$.

§ 5. Общий вид траекторий на фазовой плоскости

Рассмотрим фазовую плоскость (рис. 1) исходной системы уравнений (4)–(5). Инвариантная кривая (22) в переменных (3) имеет вид

$$Y = \frac{3-X}{3X-1}. \quad (22')$$

Прямые $y = \pm 2x$ (см. (24)) под действием преобразования (9) пере-

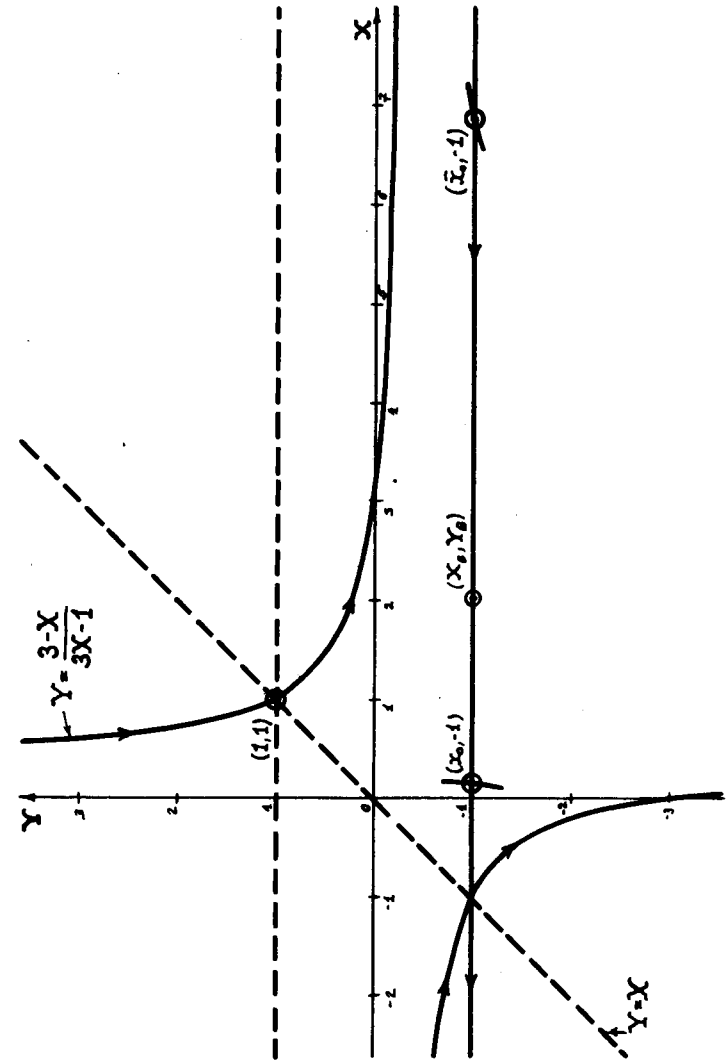


Рис. 1.

ходят соответственно в прямые

$$Y = X \quad \text{и} \quad Y = 1, \quad (24')$$

в то время как решение (40), согласно соотношениям (33), есть прямая

$$Y = -1. \quad (40')$$

Заметим, что, в отличие от (22'), (24') и (40'), инвариантная кривая (41) известна лишь локально в окрестности точек (6).

Точка (X_B, Y_B) , соответствующая "борновскому члену" для матрицы $A(I, I)$, как нетрудно видеть из разложения (8), имеет координаты

$$X_B = 2 \quad Y_B = -1,$$

то есть лежит на инвариантной кривой (40'), не проходящей через точку покоя $X = Y = 1$.

Таким образом, не существует решений статических уравнений для матрицы $A(I, I)$ с "борновским членом" и правильным пороговым поведением.

Приложение

Докажем справедливость соотношений (15) и (39). Рассмотрим сначала (15) и воспользуемся результатами работы ^{/I/}, где было показано, что с четными степенями преобразования (12) можно связать абелеву однопараметрическую группу непрерывных преобразований G . Элемент этой группы

$$g(\alpha) \in G \quad g^{-1}(\alpha) = g(-\alpha), \quad (A.1)$$

действуя на точку (x, y) , переводит ее в точку $(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})$

$$g(\alpha)(x, y) = (x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}). \quad (A.2)$$

Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в уравнении (13) определяются следующим образом:

$$\left. \frac{dx^{(\alpha)}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = Q(x, y) \quad (A.3)$$

$$\left. \frac{dy^{(\alpha)}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = P(x, y).$$

Для малых α из (A.2) и (A.3) получаем

$$g(\alpha)(x, y) = (x + \alpha Q(x, y), y + \alpha P(x, y)). \quad (A.4)$$

Теперь заметим, что преобразование, обратное (10), в соответствии с условиями кроссинг-симметрии (II) имеет вид

$$x = F^{-1}(x', y') \quad F^{-1}(x, y) = \frac{x - 3x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{5}{4}y^2}{1 - 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2} \quad (A.5)$$

$$y = R^{-1}(x', y') \quad R^{-1}(x, y) = \frac{-y + 2x^2 - 2xy - \frac{5}{4}y^2}{1 - 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2}$$

Вводя преобразование инверсии относительно оси y

$$\bar{I}_y(x, y) = (-x, y) \quad (A.6)$$

и сравнивая (А.5) с (I0), получаем следующее свойство преобразования (I2)

$$\bar{I}_y T \bar{I}_y^{-1} = T, \quad (\text{A.7})$$

откуда с учетом (А.1) имеем

$$\bar{I}_y g(\alpha) \bar{I}_y^{-1} = g(-\alpha). \quad (\text{A.8})$$

Действуя обеими частями равенства (А.8) на точку (x, y) и используя (А.4) с (А.6), получим для малых α

$$(x - \alpha Q(-x, y), y + \alpha P(-x, y)) = (x - \alpha Q(x, y), y - \alpha P(x, y)),$$

что и дает соотношения (I5).

Обратимся теперь к преобразованию (34), для которого введем обозначение

$$(\Psi', \Upsilon') = T(x_0)(\Psi, \Upsilon).$$

Комбинируя (34) и (35), получим преобразование, обратное (34)

$$\Psi = \frac{\bar{x}_0 \Psi' + \frac{\bar{x}_0 + 4}{9} \Upsilon' - \frac{1 - 2\bar{x}_0}{9} \Psi' \Upsilon'}{1 - \frac{\bar{x}_0 - 2}{9} \Upsilon' + \frac{1 + 4\bar{x}_0}{9} \Psi' \Upsilon'} \quad (\text{A.9})$$

$$\Upsilon = \frac{\frac{1}{\bar{x}_0} \Upsilon' - \frac{1 + \bar{x}_0}{9} \Psi'}{1 + \Upsilon' - \frac{2\bar{x}_0 - 7}{9} \Psi' (1 - \Upsilon')}$$

Вводя аналогично (А.6) преобразование инверсии относительно оси

$$I_\Psi(\Psi, \Upsilon) = (\Psi, -\Upsilon),$$

из (А.9) и (34) найдем

$$I_\Psi T(x_0) I_\Psi^{-1} = T^{-1}(\bar{x}_0),$$

откуда посредством тех же рассуждений, которые велись при доказательстве (I4), приходим к соотношениям (39).

Л и т е р а т у р а

1. Мещеряков В.А. Препринт ОИЯИ, P2-5906, 1971 г.; P2-7047, 1973 г.
2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Наука и техника, Минск, 1972 г.
3. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., в сб. ЭЧАЯ, т.5, вып. I, М., Атомиздат, 1974 г., с. 172.
4. Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable. Warsaw, Pol.Scienc. Publ., 1968.
5. Понтрягин А.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Наука, Москва, 1974 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 мая 1974 года.