ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7972

Г.В. Исаев

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ С МАССОЙ И ПОВЕРХНОСТЬ ГОРИЗОНТА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7972

Г.В. Исаев

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ С МАССОЙ И ПОВЕРХНОСТЬ ГОРИЗОНТА

Направлено в сб. "Проблемы теории гравитации
и элементарных частиц"

В последнее время в литературе обсуждается вопрос о поведении различных полей в процессе гравитационного сжатия центрально-симметричного тела. Приводятся соображения, согласно которым некоторые поля /скалярное, массивное, векторное/ в процессе сжатия излучаются так, что у образующейся статической центрально-симметричной "черной дыры" нет соответствующего внешнего поля.

В частности, в работе /2/ делается утверждение: Центрально-симметричная статическая "черная дыра" не может обладать внешним массивным векторным полем.

Доказательство этого утверждения основано на следующих предположениях:

1. Существует горизонт.

2. Поверхность его является несущественной особенностью.

3. Потенциал ограничен на горизонте.

4. Никаких особенностей вне горизонта нет.

Под термином "горизонт", по определению, понимается 2-гиперповерхность $F(x^{\mu}) = \mathrm{const}$, удовлетворяющая условию:

$$n^{\mu} n^{\mu} = 0,$$

где $n_{\mu} = F_{,\mu}(x^{\nu})$ - нормаль к 2-гиперповерхности /запятой обозначена производная по соответствующей координате/. Несущественной особенностью называется такая особенность, когда инвариантные величины, например, скалярная кривизна $(R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta})^{1/2}$ и определитель метрического тензора g несингулярны и не обращаются в нуль.

Покажем, что предположения 1/-4/ совместимы с уравнениями Эйнштейна для массивного векторного поля только в случае, если потенциал равен нулю на горизонте.

Далее приняты обозначения: греческие индексы пробегают значение 0,1,2,3; латинские - 1,2,3.

Уравнения массивного векторного поля с массой m

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} - m^2 A^{\mu} = -4\pi j^{\mu} \qquad /1/$$

/точкой с запятой обозначена ковариантная производная по соответствующей координате/, получаются из лагранжевой плотности

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{8\pi} A_{\mu} A^{\mu} - j^{\mu} A_{\mu} \qquad /2/$$

Тензор энергии-импульса, вычисленный по этой лагранжевой плотности,

$$T^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi}[-F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \qquad /3/$$

$$+ m^2 A_{\mu} A^{\nu} - \frac{m^2}{2} \delta^{\nu}_{\mu} A_{\alpha} A^{\alpha} .$$

В центрально-симметричном статическом случае массивное векторное поле описывается одной компонентой $A_0 \equiv \Phi$. Доказательство этого дано в работе /2/.

Выберем интервал в виде:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) .$$

Тогда уравнение /1/ в пустоте имеет вид

$$\Phi''(r) + [\frac{2}{r} - \frac{\lambda'(2) + \nu'(2)}{2}]\Phi'(r) - e^{\lambda(2)} m^2 \Phi(r) = 0,$$

где штрихом обозначена производная $\frac{d}{dr}$. Два независимых уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса в виде /3/ получаются так:

$$-e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}) + \frac{1}{r^2} = k e^{-\nu}[e^{-\lambda}(\Phi')^2 + m^2 \Phi^2],$$

$$-e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}) + \frac{1}{r^2} = k e^{-\nu}[e^{-\lambda}(\Phi')^2 - m^2 \Phi^2].$$

В статическом центрально-симметричном случае уравнение поверхности горизонта: $r = r_0$,

$$n_\mu = F_{,\mu}(r) = (0, 1, 0, 0),$$

$$n^\mu = F^{,\mu}(r) = (0, -e^{-\lambda}, 0, 0).$$

Из предположения 1/ следует:

$$n_\mu n^\mu = -\frac{1}{e^\lambda}\Big|_{r = r_0} = 0 .$$

Следовательно, $e^\lambda \underset{r \to r_0}{\to} \infty$, , /*рис. 1*/

$$\lambda'(2)\Big|_{r \to r_0} < 0 . \qquad /6/$$

Из предположения 2/ следует ограниченность определителя метрического тензора на горизонте

$$g = -e^{(\lambda+\nu)} r^4 \sin^2\theta \Big|_{r \to r_0} < \infty .$$

Отсюда, а также из поведения e^λ при $r \to r_0$ *рис.1*/ следует, что:

$$e^\nu \underset{r \to r_0}{\to} 0 .$$

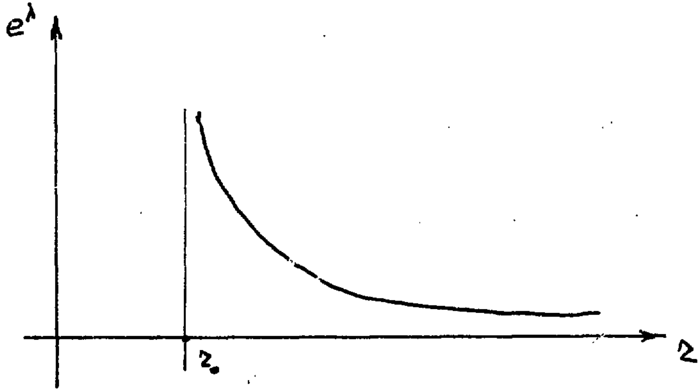

Рис. 1

Тогда в уравнении /4/ можно пренебречь членом $e^{-\lambda}\frac{1}{r^2}\Big|_{r\to r_0}$. Получим:

$$\frac{\lambda'}{r}e^{-\lambda}+\frac{1}{r^2}=k\,e^{-(\lambda+\nu)}(\Phi')^2+k\,e^{-\nu}m^2\Phi^2\ . \qquad /7/$$

Правая часть /7/ положительна и, если $\Phi|_{r=r_0}\neq 0$, неограниченно возрастает. Тогда с необходимостью

$$\lambda'(2)\,\Big|_{r\to r_0}>0\ .$$

Получено противоречие с условием /6/.

Покажем теперь, что если $\Phi|_{r=r_0}=0$, то $\Phi|_{r>r_0}\equiv 0$, т.е. поля не существует. В этом случае противоречия не возникает, что естественно, т.к. вне $r=r_0$ — это шварцшильдовское поле, в котором горизонт есть.

Умножим уравнения поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,k}}\right)_{,k}-\frac{\partial L}{\partial A_\mu}=0$$

/$k=1;\ 2,3$, т.к. в статическом случае производные по x^0 тождественно равны нулю/ на $A_\mu\sqrt{-g}$ и проинтегрируем по пространству вне сферы $r=r_0$

$$-\int A_\mu\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,k}}\sqrt{-g}\,(d^2x)_k+\int\left(A_{\mu,k}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,k}}+A_\mu\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\right)\sqrt{-g}\,d^3x=0\,,$$

где

$$(d^2x)_1=dx^2\,dx^3\quad \text{и т.д.}$$

Подставим L в виде /2/ $(j^\mu=0)$

$$\frac{1}{4\pi}\int A_\mu F^{\mu k}\sqrt{-g}\,(d^2x)_k+\frac{1}{4\pi}\int\left[\left(-A_{\mu,k}F^{k\mu}\right)+m^2A_\mu A^\mu\right]\sqrt{-g}\,d^3x=0$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{-\int e^{-\left(\frac{\lambda+\nu}{2}\right)}A_0(A_0)'dS_1}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int\left[e^{-(\lambda+\nu)}(A_0')^2+m^2e^{-\nu}(A_0)^2\right]\sqrt{-g}\,d^3x}_{\mathrm{II}}=0. \qquad /8/$$

Интегрирование в I ведется по поверхности, охватывающей область вне сферы $r = r_0$. На бесконечности $0 \leq < A_0' < \text{const}\cdot\frac{1}{r}\, e^{-mr}$, поэтому вклад от интегрирования по бесконечно удаленной сфере равен нулю. Интегрирование по сфере $r=r_0$ дает

$$I = e^{-\left(\frac{\lambda+\nu}{2}\right)} A_0 (A_0)' \cdot 4\pi r_0^2 .$$

При $A_0|_{r_0} = 0$, $I = 0$. Тогда из /8/ следует, что $II = 0$, а так как подынтегральное выражение в II положительно определено, то

$$A_0 \equiv 0, \quad (A_0)' \equiv 0.$$

Итак, в рамках статического рассмотрения и предположения об отсутствии существенных особенностей везде, кроме точки $r = 0$, существует два равноправных варианта.

1. Существует устранимый горизонт. Поле на горизонте и вне его тождественно равно нулю /*рис. 2*/.

2. Внешнее поле существует, поверхности горизонта нет ни при каком конечном r /*рис. 3*/. В этом случае можно применять статическую систему отсчета и, следовательно, использовать уравнения /4/, /5/ при любых конечных r, которые находятся вне вещества. Поэтому соображение о том, что в процессе гравитационного сжатия заряженного центрально-симметричного тела образуется "черная дыра", не обладающая внешним массивным векторным полем, по-видимому, нельзя считать доказанным.

Более того, существование второго варианта говорит в пользу того, что массивное векторное поле, которое на начальной стадии сжатия заведомо существует, "разрушает" горизонт, и черная дыра не образуется, а поле не исчезает.

Корректное решение задачи требует динамического рассмотрения. Но это уже было указано М.М.Марковым /1/.

Благодарю Р.А.Асанова за предложенную тему.

Рис. 2

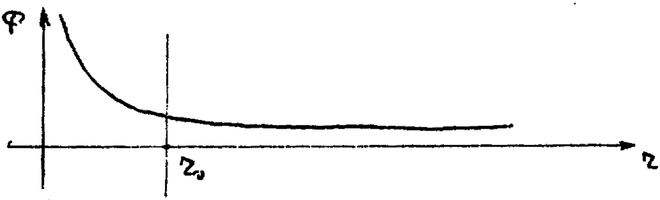

Рис. 3

Литература

1. *M.A.Markov. Global properties of collapsing matter. Preprint JINR, E2-6831, Dubna, 1972.*
2. *J.D.Bekenstein. Phys.Rev., D5, 1239 (1972).*

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, Наука, М., /1973/.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1974 года.