ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Р2 - 7937



К.В.Рерих, М.П.Чавлейшвили, М.Б.Шефтель



# ОБ ОДНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ АМПЛИТУД БИНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 7937

К.В.Рерих, М.П.Чавлейшвили[1], М.Б.Шефтель[2]

# ОБ ОДНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ АМПЛИТУД БИНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Направлено в "Труды Тбилисского государственного университета"

[1] Тбилисский государственный университет.

[2] Северо-Западный заочный политехнический институт, Ленинград.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты по рассеянию частиц высоких энергий показывают, что с ростом передаваемого импульса экспоненциальное падение дифференциального сечения переходит в некоторый более пологий режим. Существует несколько эмпирических параметризаций дифференциального сечения в довольно широком интервале передаваемых импульсов /см., например, /1/. Предпринимаются также попытки теоретического объяснения этих закономерностей. В последнее время единую картину рассеяния на малые и большие углы удалось получить в рамках квазипотенциального подхода /2/.

Обычно амплитуды бинарных процессов рассматривают как функцию энергии при фиксированном передаваемом импульсе $\Delta$. Это позволяет представить амплитуду как функцию на малой группе 4-вектора $\Delta_\mu$. Такое рассмотрение приводит к разложению амплитуды по представлениям этой малой группы /O(3) в прямом канале, O/2.1/ - в кросс-канале/. Здесь существенно следующее обстоятельство. В кросс-канале квадрат передачи импульса $t=-\Delta^2$ меняет знак, проходя через нуль в физической области. При этом вектор $\Delta_\mu$ из пространственноподобного переходит в изотропный и во времениподобный, структура малой группы меняется скачком от O/2.1/ к E(2) и O/3/, а базис и коэффициенты разложения имеют в соответствующих точках кинематические особенности при неравных массах.

В принципе, от таких недостатков может быть свободна следующая схема. Амплитуда рассеяния рассматривается при фиксированном векторе

$$V_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P_1^\nu P_2^\rho P_3^\sigma , \qquad /1.1/$$

определяющем нормаль к гиперплоскости реакции.

Идея рассмотрения вектора нормали $V_\mu$ к гиперплоскости реакции принадлежит, по-видимому, T.W.B.Kibble(1960). Квадрат этого вектора $V^2 = V_\mu V^\mu = -\Phi$,

где $\Phi$ - функция Киббла, которая в физической области любого канала неотрицательна, причем обращается в ноль только для коллинеарных процессов /на границе физической области каждого канала/ /см., например, /3/, §68, где рассмотрено большое число кинематически различных процессов/.

Разложение амплитуды рассеяния по представлениям малой группы вектора $V_\mu$ /группа O/2.1// приводит к представлению типа Зоммерфельда-Ватсона-Редже в новых переменных. Структура малой группы не меняется при переходе из физической области одного канала в физическую область другого, а базис и коэффициенты разложения не имеют кинематических особенностей в физической области. Различают два типа кинематических особенностей. Особенности первого типа возникают /если рассматриваются частицы со спином/ при разложении ковариантных спинорных амплитуд по инвариантным амплитудам. Здесь же имеются в виду особенности второго типа, которые появляются у реджеэованных парциальных амплитуд $f_\ell(t)$, если рассматриваются частицы с неравными массами. Это приводит ко многим усложнениям в методе Редже /конспирации полюсов, дочерним траекториям и т.п./ /11/.

В последнее время появился ряд работ /4-7/, авторы которых не без некоторого успеха эксплуатировали свойства функции Киббла в рамках редже-феноменологического описания адронных процессов при высоких энергиях.

Однако такое "фитирование" (fit) является преждевременным, поскольку нельзя согласиться с тем, что только введение одной новой переменной на основе функции Киббла и использование одной из переменных $s$ или $t$ в зависимости от канала полностью решает проблему отделения кинематики от динамики в адронных процессах, как это делается в работах /4–7/.

В настоящей работе мы пытаемся ввести новую систему инвариантных переменных вместо $s, t, u$ в качестве первого шага к решению этой проблемы. Подобная попытка была предпринята ранее /8/, но и она была также поспешной в указанном выше смысле, ибо в работе /9/ было показано, что физические следствия такого рассмотрения содержатся и в обычных дисперсионных соотношениях /10/ по $s$ при фиксированном $t$.

## 2. ВВЕДЕНИЕ НОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введем новые переменные $\Omega$ и $\Lambda$ следующим образом:

$$\Omega = \sqrt{-\chi} \qquad /2.1/$$

$$\Lambda = \frac{\Phi}{\chi}, \qquad /2.2/$$

где

$$\chi = st + su + ut + as + bt + cu - d \qquad /2.3/$$

$$\Phi = stu - sh_1^2 - th_2^2 - uh_3^2 + 2h_1h_2h_3 \qquad /2.4/$$

$$h_1 = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) \qquad /2.5а/$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) \qquad /2.5б/$$

$$h_3 = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2). \qquad /2.5в/$$

Интересным свойством переменной $\Lambda$ является тот факт, что в каждом канале при стремлении соответствующей полной энергии к бесконечности и фиксировании передачи импульса, она переходит в квадрат этого переданного импульса.

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ t=\text{фикс.}}} \Lambda = t\,, \qquad \lim_{\substack{s\to\infty\\ u=\text{фикс.}}} \Lambda = u \tag{2.6а}$$

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ s=\text{фикс.}}} \Lambda = s\,, \qquad \lim_{\substack{t\to\infty\\ u=\text{фикс.}}} \Lambda = u \tag{2.6б}$$

$$\lim_{\substack{u\to\infty\\ s=\text{фикс.}}} \Lambda = s\,, \qquad \lim_{\substack{u\to\infty\\ t=\text{фикс.}}} \Lambda = t \tag{2.6в}$$

В области же асимптотических энергий и фиксированных углов рассеяния $\Lambda$ переходит в переменную типа Криша /12/. Например, в $s$ -канале:

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ \theta_s=\text{фикс.}}} \Lambda = \frac{-\frac{1}{4}\, s \sin^2\theta_s}{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta_s}\,. \tag{2.7}$$

Эмпирическая переменная Криша отличается от формулы /2.7/ лишь множителем $(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta_s)$, весьма близким к единице.

Переменная $\Omega$ при асимптотических энергиях, например, $s$ -канала, имеет следующий вид:

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ t=\text{фикс.}}} \Omega = \lim_{\substack{s\to\infty\\ u=\text{фикс.}}} \Omega = s\,; \quad \lim_{\substack{s\to\infty\\ \theta_s=\text{фикс.}}} \Omega = \frac{s}{2}\sqrt{3+\cos^2\theta_s} \tag{2.8}$$

Выбранная нами переменная $\Omega$ такова, что она положительна в физической области каждого канала и отнормирована таким образом, что на порогах всех трех каналов принимает одно и то же значение $\Omega_0 = \sqrt{-\chi_0}$, где

$\chi_0$- значение $\chi_0$ на пороге любого канала. /см. Приложение/.

## 3. O/2.1/- РАЗЛОЖЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ $\Lambda$ *

В физической области любого канала $\Lambda \leq 0$ и вектор $V_\mu$ - пространственноподобен, или изотропен. Если же рассматривать коллинеарные процессы /т.е. исключить точки на границе физической области/, то $\Lambda < 0$, вектор $V_\mu$ - пространственноподобен, и при фиксированном $V_\mu$ амплитуда рассеяния есть функция на его малой группе O/2.1/**.

Преобразования из группы O/2.1/ параметризуются тремя углами Эйлера - двумя азимутальными и одним гиперболическим. Если выбрать плоскость реакции началом отсчета азимутальных углов, то остается зависимость только от одного параметра буста

$$\mathrm{ch}\,\chi_\Omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}. \qquad /3.1/$$

Рассмотрим сейчас s -канал. Если бы амплитуда рассеяния была квадратично-интегрируемой функцией по s, то можно было бы разложить ее по унитарным неприводимым представлениям группы O/2.1/. Это разложение есть фоновый интеграл в представлении Зоммерфельда-Ватсона-Редже, в котором интегрирование в плоскости комплексного момента J /нумерующего неприводимые представления O/2.1// производится по прямой $\mathrm{Re}\,J = -1/2$. Однако рост амплитуды при больших энергиях и малых передачах импульса приводит к тому, что она не принадлежит к классу $L_2$ и разлагается в интеграл по прямой $\mathrm{Re}\,J = J_0 > 0$

---

* Рассмотрение этого раздела опирается на книгу /13/.

** Рассеяние строго вперед и строго назад мы здесь не рассматриваем.

$$T(\Omega,\Lambda) = \frac{-1}{2i}\int_{J_0-i\infty}^{J_0+i\infty} \frac{dJ(2J+1)}{\sin\pi J}\, T_J(\Lambda) P_J(\mathrm{ch}\chi_\Omega), \qquad /3.2/$$

здесь $P_\ell(\mathrm{ch}\chi_\Omega)$ - функции Лежандра.

## 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Рассмотрим для определенности асимптотику амплитуды при высоких энергиях в $s$-канале /аналогичные рассуждения справедливы и в кросс-каналах/. При больших значениях $s$ переменная $\mathrm{ch}\chi_\Omega$ растет как $s$. Поэтому, если предположить мероморфность функции $T_J(\Lambda)$ в комплексной $J$-плоскости, то при высоких энергиях доминирующий вклад в амплитуду будет давать самый правый полюс $J^{(0)}$ функции $T_J(\Lambda)$. В этом случае формула /3.2/ дает:

$$T(\Omega,\Lambda) \underset{\mathrm{ch}\chi_\Omega\to\infty}{\sim} \frac{-2\pi i}{2i}(2J^{(0)}+1)\frac{b(\Lambda)}{\sin\pi J^{(0)}} P_{J^{(0)}}(\mathrm{ch}\chi_\Omega). \qquad /4.1/$$

Здесь $b(\Lambda)$ - вычет функции $T_J(\Lambda)$ в точке $J=J^{(0)}(\Lambda)$. Используя асимптотику функций Лежандра, получим:

$$T(\Omega,\Lambda) \underset{\mathrm{ch}\chi_\Omega\to\infty}{\sim} -\pi(2J^{(0)}+1)\frac{b(\Lambda)}{\sin\pi J^{(0)}}\frac{\Gamma(J^{(0)}+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(J^{(0)}+1)}(\mathrm{ch}\chi_\Omega)^{J^{(0)}}. \qquad /4.2/$$

Рассмотрим далее три интересных предельных случая:

1/ рассеяние на малые углы при фиксированном $t$;

2/ рассеяние на углы, близкие к $\pi$ при фиксированном $u$;

3/ рассеяние на большие фиксированные углы.

Предположим, что положение полюса $J^{(0)}$ является линейной функцией $\Lambda$:

$$J^{(0)}(\Lambda)=a+b\Lambda. \qquad /4.3/$$

Анализ формулы /4.2/ с учетом формул /2.6/, /2.8/ показывает, что амплитуда рассеяния при высоких энергиях обладает редж евской асимптотикой при фиксированных $t$ или $u$. Как хорошо известно, это поведение соответствует экспериментально наблюдаемому дифференциальному сечению при малых передачах.

В области больших фиксированных углов рассеяния полученное с помощью формулы /4.2/ дифференциальное сечение имеет поведение, близкое к эмпирической параметризации Криша [/12/]:

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim e^{-d p_\perp^2 \left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta_s\right)^{-1}} . \qquad /4.4/$$

Переменные $(\Omega,\Lambda)$ могут быть полезными для описания двухчастичных процессов при асимптотических энергиях в любом канале. Можно потребовать большего: найти переменные $(\Omega,\Lambda)$, изменяющиеся в тех же интервалах $1<\mathrm{ch}\chi_\Omega<\infty$, $-\infty<\Lambda<0$, такие, чтобы любому значению $(\Omega,\Lambda)$ из этих интервалов взаимно однозначно соответствовало одно физическое значение переменных $(s,t,u)$*. Такое отображение существует, и свойства новых переменных будут исследованы отдельно.

Авторы выражают глубокую благодарность Д.И.Блохинцеву, В.А.Мещерякову, Я.А.Смородинскому, А.Н.Тавхелидзе и Д.В.Ширкову за ценные замечания, интерес к работе и поддержку, а также В.Р.Гарсеванишвили, В.Г.Кадышевскому, В.А.Матвееву, Р.М.Мурадяну и А.А.Хелашвили - за плодотворные дискуссии по затронутым здесь вопросам.

* Отображение $(\Omega,\Lambda) \leftrightarrow (s,t,u)$ не является взаимно однозначным.

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

Найдем пороговое значение $\chi_0$ переменной

$$\chi = st + su + ut + as + bt + cu - d\ .$$

Коэффициенты $a$, $b$ и $c$ будем выбирать из условия, чтобы $\Omega$ принимала одно и то же значение $\Omega_0 = \sqrt{d}$ во всех трех каналах. Из этого требования на коэффициенты $a, b, c$ получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} a s_0 + b t_0^s + c u_0^s &= A_s \\ a s_0^t + b t_0 + c u_0^t &= A_t \\ a s_0^u + b t_0^u + c u_0 &= A_u , \end{aligned} \qquad /\text{П.1}/$$

где $A_s$, $A_t$, $A_u$ есть

$$A_s = -s_0 u_0^s - t_0^s u_0^s - t_0^s s_0$$

$$A_t = -s_0^t u_0^t - t_0 u_0^t - t_0 s_0^t$$

$$A_u = -s_0^u u_0 - t_0^u u_0 - t_0^u s_0^u .$$

Решением системы /П.1/ является

$$a = \frac{\Delta_s}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_t}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \qquad /\text{П.2}/$$

---

* Здесь $(s_0, t_0^s, u_0^s)$ - значения $s$, $t$, $u$ на пороге $s$-канала, $(t_0, s_0^t, u_0^t)$ - значения $t$, $s$, $u$ на пороге $t$-канала $(u_0, s_0^u, t_0^u)$ - значения $u$, $s$, $t$ на пороге $u$-канала.

где

$$\Lambda = \det\begin{pmatrix} s_0, & t_0^s, & u_0^s \\ s_0^t & t_0 & u_0^t \\ s_0^u & t_0^u & u_0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_s = \det\begin{pmatrix} A_s & t_0^s & u_0^s \\ A_t & t_0 & u_0^t \\ A_u & t_0^u & u_0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_t = \det\begin{pmatrix} s_0 & A_s & u_0^s \\ s_0^t & A_t & u_0^t \\ s_0^u & A_u & u_0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_u = \det\begin{pmatrix} s_0 & t_0^s & A_s \\ s_0^t & t_0 & A_t \\ s_0^u & t_0^u & A_u \end{pmatrix}.$$

Коэффициент $d$ определим из требования, чтобы $\chi$ обращалась в ноль только в одной точке мандельстамовской плоскости. Совершая тождественные преобразования с использованием известного соотношения $s+t+u=\sum_{i=1}^{4} m_i^2=\Sigma$, получим

$$\chi = -3\left(\frac{\Sigma-s}{2}+\frac{1}{3}\left(a-\Sigma-\frac{b+c}{2}\right)\right)^2-\left(\frac{t-u}{2}-\frac{b-c}{2}\right)^2+$$

$$+a\Sigma+\frac{1}{3}\left(a-\Sigma-\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2-d\,. \qquad /\text{П}.3/$$

Отсюда

$$d=a\Sigma+\frac{1}{3}\left(a-\Sigma-\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2. \qquad /\text{П}.4/$$

Для иллюстрации приведем значения $a$, $b$, $c$ и $d$ в случае равных масс. Подставляя в /П.2/ $s_0=t_0=u_0=4m^2$ и $s_0^t=s_0^u=t_0^s=t_0^u=u_0^t=u_0^s=0$, получим $a=b=c=0$, а из /П.4/ находим

$$d=\frac{16}{3}m^4\,.$$

## Литература


1. J.Allaby. Rapporteur's talk at the XV International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970.
   К.Д.Толстов. ЭЧАЯ, т.2, вып. 1, стр. 321, Атомиздат, Москва, 1971.
2. V.R.Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 29B, 191 (1969); Phys. Rev., D4, 845 (1971).
3. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, т. 4, ч. 1, "Наука", Москва, 1968.
4. E.Leader, M.R.Pennington. Phys.Rev.Lett., v. 27, No. 19, p. 1325 (1971), preprint LBL-1042, 1972.
5. L.D.Krase, R.H.Good, Jr. Phys.Rev., D6, No. 3, p. 937 (1972).
6. Uri Maor. Phys.Rev., D6, No.7, p. 2052 (1972).
7. S.S.Pinsky. Phys.Rev.Lett., v. 29, No. 22, p. 1548 (1972).
8. G.Wanders. Phys.Lett., v. 19, No. 4, p. 331; "Helv. phys. acta", v.39, No. 3, p. 228 (1966).
9. И.И.Орлов, Д.В.Ширков. ЯФ, 6, 638 /1967/.
   I.I.Orlov, D.V.Shirkov. Preprint TF-27, Novosibirsk (1967).
10. Д.В.Ширков, В.В.Серебряков, В.А.Мещеряков. Дисперсионная теория сильных взаимодействий при низких энергиях. "Наука", Москва, 1967.
11. G.Cohen-Tannoudji, A.Morel, M.Navelett. Ann.Phys., 46, p. 239 (1968).
12. A.D.Krisch. Phys.Lett., 19, 1149 (1967).
13. П.Коллиндз, Э.Сквайрс. Полюса Редже в физике частиц. "Мир", Москва, 1971.



Рукопись поступила в издательский отдел
13 мая 1974 года.