СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7896

И.В.Полубаринов

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7896

И.В.Полубаринов

О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Полубаринов И.В.

P2 - 7896

О когерентных состояниях.

Работа представляет собой обзор по методу когерентных состояний в теории поля. Рассматриваются когерентные состояния скалярного, векторного и спинорного полей. Обсуждается эволюция средних от операторов полей в таких состояниях.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

Polubarinov I.V.

P2 - 7896

On Coherent States

Some aspects of the coherent states in quantum field theory are reviewed. The coherent states of the scalar, vector and spinor fields are considered. Evolution of expectation values of the field operators in such states is discussed.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

I. ВВЕДЕНИЕ

Хотя когерентные состояния (минимизирующие пакеты) известны в квантовой механике уже давно, их стали интенсивно использовать во всех областях квантовой теории /I-8/ только в последнее время (в работах /I-7/ можно найти дальнейшие ссылки, см. также более ранние работы /9-I3/). По сути дела, квантовая теория обогатилась новым методом, который придает ей далеко идущее сходство с классической теорией. В обычной ковариантной квантовой теории поля когерентные состояния применялись в работах /9,II,8/, причем работа /8/ была посвящена динамике замкнутой системы взаимодействующих полей.

В настоящей работе дается обзор некоторых вопросов метода когерентных состояний на стандартном языке релятивистской квантовой теории полей. В пп.2 и 3 дано определение когерентных состояний. Они записаны в терминах x-пространства в двух формах. Вторая указывает на связь метода когерентных состояний с методом источников /9,I4,I5/.

В п. 4 обсуждается эволюция матричных элементов свободных полей между когерентными состояниями. Подчеркивается классический и причинный характер эволюции средних и возможность существования у них волнового фронта, что остается справедливым и для взаимодействий с внешним током или с внешним полем (п. 5). Это, по сути дела, есть обобщение теоремы Эренфеста на квантовую теорию поля.

2. ПЕРВАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

а) Когерентные состояния нейтрального скалярного поля

Пусть $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ – вещественные q-числовое и с-числовое скалярные поля, удовлетворяющие одному и тому же уравнению Шредингера-Фока-Клейна-Гордона (ШФКГ)

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \qquad (\Box - m^2)\varphi'(x) = 0, \tag{I}$$

а $\varphi^{(-)}(x)$, $\varphi'^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$, $\varphi'^{(+)}(x)$ суть положительно-частотные и отрицательно-частотные части этих полей

$$\varphi(x) = \varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x), \qquad \varphi'(x) = \varphi'^{(-)}(x) + \varphi'^{(+)}(x) \tag{2}$$

причем $\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$ – операторы уничтожения и рождения. Определяющее соотношение для когерентного состояния (условие минимизации соотношений неопределенности) есть

$$\varphi^{(-)}(x)\,|\varphi'\rangle = \varphi'^{(-)}(x)\,|\varphi'\rangle . \tag{3}$$

Явный вид когерентного состояния для скалярного поля есть

$$|\varphi'\rangle = e^{-(\varphi',\varphi)}\,|0\rangle, \tag{4}$$

где (φ',φ) – обычное скалярное произведение для уравнения ШФКГ

$$(\varphi',\varphi) = \int d^3x \left[\partial_4\varphi'(x)\ \varphi(x) - \varphi'(x)\partial_4\varphi(x)\right], \tag{5}$$

не зависящее от времени вследствие (I). Очевидны нормировка

$$\langle\varphi'|\varphi'\rangle = 1 \tag{6}$$

и тот важный факт, что с-числовое поле $\varphi'(x)$ есть среднее q-числового поля $\varphi(x)$ в состоянии (4)

$$\langle\varphi'|\,\varphi(x)\,|\varphi'\rangle = \varphi'(x). \tag{7a}$$

Очевидно, то же верно и для импульсов полей

$$\langle\varphi'|\,\partial_4\varphi(x)\,|\varphi'\rangle = \partial_4\varphi'(x). \tag{7б}$$

Недиагональный элемент поля $\varphi(x)$ между состояниями, определяемыми

двумя полями $\varphi_1'(x)$ и $\varphi_2'(x)$, равен

$$\langle\varphi_2'|\,\varphi(x)\,|\varphi_1'\rangle = \varphi_{21}'(x)\langle\varphi_2'|\varphi_1'\rangle, \tag{8a}$$

где

$$\varphi_{21}'(x) = \varphi_1'^{(-)}(x) + \varphi_2'^{(+)}(x) \tag{8б}$$

– комплексная функция. Для матричных элементов от N-произведений имеем

$$\langle\varphi'|:\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n):|\varphi'\rangle = \varphi'(x_1)\varphi'(x_2)\cdots\varphi'(x_n) \tag{9}$$

$$\langle\varphi_2'|:\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n):|\varphi_1'\rangle = \varphi_{21}'(x_1)\varphi_{21}'(x_2)\cdots\varphi_{21}'(x_n)\langle\varphi_2'|\varphi_1'\rangle. \tag{10}$$

Некоторые другие формулы см. в Приложении А.

б) Когерентные состояния нейтрального векторного поля

Пусть q-числовое и с-числовое нейтральные векторные поля $A_\mu(x)$ и $A_\mu'(x)$ тоже подчиняются уравнению ШФКГ (а не Прока) и одновременным перестановочным соотношениям

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0, \qquad [A_\mu(x), \partial_4 A_\nu(y)] = \delta_{\mu\nu}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad (x_0 = y_0), \tag{II}$$

так что все компоненты поля $A_\mu(x)$ независимы. Определяющее соотношение для когерентных состояний и сами состояния в явной форме запишутся как

$$A_\mu^{(-)}(x)\,|A'\rangle = A_\mu'^{(-)}(x)\,|A'\rangle \tag{I2}$$

$$|A'\rangle = e^{-(A',A)}\,|0\rangle, \tag{I3}$$

где

$$(A',A) = \int d^3x \left[\partial_4 A_\mu'(x) A_\mu(x) - A_\mu'(x)\partial_4 A_\mu(x)\right]. \tag{I4}$$

Если для исключения лишних степеней свободы наложить на $|A'\rangle$ условие Гупты

$$\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x)\,|A'\rangle = 0, \tag{I5}$$

то, очевидно, оно равносильно наложению условия Лоренца на с-числовое поле $A'_\mu(x)$

$$\partial_\mu A'_\mu(x) = 0 \, . \tag{I6}$$

Этим путем мы возвращаемся к уравнению Прока при $m \neq 0$ и к уравнениям Максвелла при $m = 0$. Аналогично случаю скалярного поля имеем

$$\langle A' | A' \rangle = 1 \tag{I7}$$

$$\langle A' | A_\mu(x) | A' \rangle = A'_\mu(x) \tag{I8}$$

$$\langle A'_2 | A_\mu(x) | A'_1 \rangle = A'_{\mu 21}(x) \langle A'_2 | A'_1 \rangle \tag{I9a}$$

$$A'_{\mu 21}(x) \equiv A'^{(-)}_{\mu 1}(x) + A'^{(+)}_{\mu 2}(x) \tag{I9б}$$

$$\langle A' | : A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) : | A' \rangle = A'_{\mu_1}(x_1) \cdots A'_{\mu_n}(x_n) \tag{20}$$

$$\langle A' | : A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) : | A' \rangle = A'_{\mu_1 21}(x_1) \cdots A'_{\mu_n 21}(x_n) \langle A'_2 | A'_1 \rangle . \tag{2I}$$

в) Когерентные состояния спинорного поля

Пусть имеется обычное q-числовое дираковское поле $\psi(x), \overline{\psi}(x)$ и "с-числовое" $\psi'(x), \overline{\psi}'(x)$, антикоммутирующее с q-числовым полем и само с собой.

$$(\gamma\partial + m)\psi(x) = 0 , \qquad (\gamma\partial + m)\psi'(x) = 0 \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\{\psi(x), \psi(y)\} = 0 , && \{\psi(x), \overline{\psi}(y)\} = \gamma_4 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ &\{\psi'(x), \psi'(y)\} = 0 , && \{\psi'(x), \overline{\psi}'(y)\} = 0 \qquad (x_0 = y_0) \\ &\{\psi'(x), \psi(y)\} = 0 , && \{\psi'(x), \overline{\psi}(y)\} = 0 . \end{aligned} \tag{23}$$

Определяющие соотношения для когерентных состояний запишутся

$$\psi^{(-)}(x) | \psi' \psi'_c \rangle = \psi'^{(-)}(x) | \psi' \psi'_c \rangle \tag{24}$$

$$\overline{\psi}^{(-)}(x) | \psi' \psi'_c \rangle = \overline{\psi}'^{(-)}(x) | \psi' \psi'_c \rangle , \tag{25}$$

где $\psi'_c = C\overline{\psi}'$ – зарядово-сопряженный спинор (аналогично $\psi_c = C\overline{\psi}$).

Явный вид когерентных состояний спинорного поля следующий:

$$| \psi' \psi'_c \rangle = e^{-(\psi', \psi) + (\psi, \psi')} | 0 \rangle = \tag{26a}$$

$$= e^{(\psi_c, \psi'_c) + (\psi, \psi')} | 0 \rangle , \tag{26б}$$

где

$$(\psi', \psi) = \int d^3x \, \overline{\psi}'(x) \gamma_4 \psi(x) , \qquad (\psi, \psi') = \int d^3x \, \overline{\psi}(x) \gamma_4 \psi'(x) . \tag{27}$$

Далее имеем

$$\langle \psi' \psi'_c | \psi' \psi'_c \rangle = 1 \tag{28}$$

$$\langle \psi' \psi'_c | \psi(x) | \psi' \psi'_c \rangle = \psi'(x) \tag{29}$$

$$\langle \psi' \psi'_c | \overline{\psi}(x) | \psi' \psi'_c \rangle = \overline{\psi}'(x) \tag{30}$$

$$\langle \psi'_2 \psi'_{c2} | \psi(x) | \psi'_1 \psi'_{c1} \rangle = \psi'_{21}(x) \langle \psi'_2 \psi'_{c2} | \psi'_1 \psi'_{c1} \rangle \tag{3Ia}$$

$$\psi'_{21}(x) \equiv \psi'^{(-)}_1(x) + \psi'^{(+)}_2(x) \tag{3Iб}$$

$$\langle \psi'_2 \psi'_{c2} | \overline{\psi}(x) | \psi'_1 \psi'_{c1} \rangle = \overline{\psi}_{21}(x) \langle \psi'_2 \psi'_{c2} | \psi'_1 \psi'_{c1} \rangle \tag{32a}$$

$$\overline{\psi}'_{21}(x) \equiv \overline{\psi}'^{(-)}_1(x) + \overline{\psi}'^{(+)}_2(x) . \tag{32б}$$

Для матричных элементов от N-произведений

$$\langle \psi' \psi'_c | : \psi(x_1) \cdots \psi(x_n) : | \psi' \psi'_c \rangle = \psi'(x_1) \cdots \psi'(x_n) \tag{33}$$

$$\langle \psi'_2 \psi'_{c2} | : \psi(x_1) \cdots \psi(x_n) : | \psi'_1 \psi'_{c1} \rangle = \psi'_{21}(x_1) \cdots \psi'_{21}(x_2) \langle \psi'_2 \psi'_{c2} | \psi'_1 \psi'_{c1} \rangle \tag{34}$$

и аналогично при замене части операторов ψ на $\overline{\psi}$.

3. ВТОРАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

а) Когерентные состояния нейтрального скалярного поля можно также записать в виде

$$| J \rangle = e^{iJ\cdot\varphi} | 0 \rangle , \tag{35}$$

где

$$J \cdot \varphi = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \, J(x) \varphi(x) . \tag{36}$$

Чтобы установить связь с первым определением, воспользуемся формулой (48) следующего раздела, выражающей $\varphi(x)$ в произвольный момент времени через значение $\varphi(x)$ в некоторый фиксированный момент времени. Ясно, что мы можем отождествить

$$\varphi'(x) = -\int_{t_1}^{t_2} d^4x'\, \Delta(x-x')\, J(x')\,; \tag{37}$$

при этом

$$|J\rangle = |\varphi'\rangle. \tag{38}$$

Нормировка состояния (35) очевидна:

$$\langle J|J\rangle = 1 \tag{39}$$

Другие свойства непосредственно следуют из соотношений п. 2а с учетом соотношения (37). Некоторые дополнительные соотношения приведены в Приложении Б.

б) Когерентные состояния нейтрального векторного поля можно аналогично записать в виде

$$|J\rangle = e^{iJ\cdot A}\,|0\rangle, \tag{40}$$

где

$$J\cdot A = \int_{t_1}^{t_2} d^4x\, J_\mu(x) A_\mu(x). \tag{41}$$

С помощью формулы (49) следующего раздела можно отождествить

$$A'_\mu(x) = -\int_{t_1}^{t_2} d^4x'\, \Delta(x-x')\, J_\mu(x') \tag{42}$$

$$|J\rangle = |A'\rangle. \tag{43}$$

Для выполнения условия Лоренца (16) достаточно, чтобы ток $J_\mu(x)$ сохранялся и исчезал на границах интегрирования. Другие соотношения можно получить из соотношений п. 2б.

в) Когерентные состояния спинорного поля можно также записать в виде

$$|\eta\eta_c\rangle = e^{-i\eta\cdot\psi + i\psi\cdot\eta}\,|0\rangle = \tag{44а}$$

$$= e^{i\psi_c\cdot\eta_c + i\psi\cdot\eta}\,|0\rangle, \tag{44б}$$

где

$$\eta\cdot\psi = \int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \bar\eta(x)\psi(x)\,, \qquad \psi\cdot\eta = \int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \bar\psi(x)\eta(x). \tag{45}$$

С помощью формул (50) и (51) можно отождествить

$$\bar\psi'(x) = \int_{t_1}^{t_2} d^4x'\, \bar\eta(x') S(x'-x)\,, \qquad \psi'(x) = -\int_{t_1}^{t_2} d^4x'\, S(x-x')\eta(x') \tag{46}$$

$$|\eta\eta_c\rangle = |\psi'\psi'_c\rangle. \tag{47}$$

Обозначения в настоящем разделе подчеркивают связь когерентных состояний с теорией внешних источников.

4. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ПРИЧИННОСТЬ В СВОБОДНОМ СЛУЧАЕ

Эволюция во времени для свободных операторов поля может быть представлена в форме решения задачи Коши при помощи известных формул

$$\varphi(x) = i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta(x-x')\,\varphi(x') - \Delta(x-x')\,\partial_4\varphi(x')\right] \tag{48}$$

$$A_\mu(x) = i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta(x-x')\,A_\mu(x') - \Delta(x-x')\,\partial_4 A_\mu(x')\right] \tag{49}$$

$$\psi(x) = -i\int d^3x'\, S(x-x')\,\gamma_4\,\psi(x') \tag{50}$$

$$\bar\psi(x) = i\int d^3x'\, \bar\psi(x')\,\gamma_4\, S(x'-x) \tag{51}$$

или эквивалентно для $x_0 \geqslant x_0'$:

$$\varphi(x) = -i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta_{ret}(x-x')\,\varphi(x') - \Delta_{ret}(x-x')\,\partial_4\varphi(x')\right] \tag{52}$$

$$A_\mu(x) = -i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta_{ret}(x-x')\,A_\mu(x') - \Delta_{ret}(x-x')\,\partial_4 A_\mu(x')\right] \tag{53}$$

$$\psi(x) = i\int d^3x'\, S_{ret}(x-x')\,\gamma_4\,\psi(x') \tag{54}$$

$$\bar\psi(x) = i\int d^3x'\, \bar\psi(x')\,\gamma_4\, S_{adv}(x'-x)\,. \tag{55}$$

Отталкиваясь от формул (48)-(5I), можно представить эволюцию свободных операторов поля и с помощью других функций Грина. Однако именно формулы (48)-(5I) или (52)-(55) вместе с обычными перестановочными соотношениями наиболее явно выражают причинность свободной теории квантованных полей . Все следствия для матричных элементов, вытекающие из причинности теории, суть следствия этих соотношений. Разумеется, сами эти соотношения - следствие гиперболического характера уравнений движения для операторов поля.

Если от соотношений (48)-(5I) взять средние по когерентным состояниям (4),(I3) и (26), получим

$$\varphi'(x) = i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta(x-x')\,\varphi'(x') - \Delta(x-x')\,\partial_4\varphi'(x')\right] \tag{56}$$

$$A'_\mu(x) = i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta(x-x')\,A'_\mu(x') - \Delta(x-x')\,\partial_4 A'_\mu(x')\right] \tag{57}$$

$$\psi'(x) = -i\int d^3x'\, S(x-x')\,\gamma_4\,\psi'(x') \tag{58}$$

$$\bar\psi'(x) = i\int d^3x'\, \bar\psi'(x')\,\gamma_4\, S(x'-x)\,. \tag{59}$$

Для недиагональных матричных элементов получим такие же соотношения

$$\varphi'_{21}(x) = i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta(x-x')\,\varphi'_{21}(x') - \Delta(x-x')\,\partial_4\varphi'_{21}(x')\right] \tag{60}$$

$$A'_{\mu 21}(x) = i\int d^3x' \left[\partial_4' \Delta(x-x')\,A'_{\mu 21}(x') - \Delta(x-x')\,\partial_4 A'_{\mu 21}(x')\right] \tag{6I}$$

$$\psi'_{21}(x) = -i\int d^4x'\, S(x-x')\,\gamma_4\,\psi'_{21}(x') \tag{62}$$

$$\bar\psi'_{21}(x) = i\int d^3x'\, \bar\psi'_{21}(x')\,\gamma_4\, S(x'-x)\,. \tag{63}$$

Формулы (56)-(59) выглядят как обычные формулы для причинной эволюции классических (с-числовых) полей. Разумеется, такой вид имеют и формулы для матричных элементов поля между любыми состояниями, не обязательно когерентными. Однако для когерентных состояний начальные значения $\varphi'(x')$ и $\partial_4\varphi'(x')$ заведомо могут выбираться независимо друг от друга в виде совершенно произвольных функций $\vec{x}'$ и, в частности, финитными. В последнем случае поле $\varphi'(x)$ (56) будет обладать волновым фронтом (например, при $\varphi'(x')=0,\ \partial_4\varphi'(x') = i\,\delta(\vec{x}'-\vec{y})$ имеем $\langle\varphi'|\varphi(x)|\varphi'\rangle = \varphi'(x) = \Delta(x-y)$, а $\langle 0|\varphi(x)|\varphi'\rangle = \Delta^{(-)}(x-y)\,\langle 0|\varphi'\rangle$). Этого, вообще говоря, нет для произвольных матричных элементов $\varphi(x)$ (см. Приложение Б).

Соотношения (56)-(59) представляют не что иное, как теорему Эренфеста в квантовой теории свободных полей (ср. Приложение В) и имеют свойственную этой теореме область применимости.

Отметим, что с помощью (9),(20) и (33) легко вычисляются средние от операторов, представленных в нормальной форме. Например, средние от оператора плотности энергии и от оператора 4-импульса скалярного поля равны

$$\langle\varphi'|T_{00}(x)|\varphi'\rangle = \langle\varphi'|\tfrac{1}{2} : m^2\varphi(x)\varphi(x) + \partial_k\varphi(x)\partial_k\varphi(x) - \partial_4\varphi(x)\partial_4\varphi(x) : |\varphi'\rangle =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(m^2\varphi'(x)\varphi'(x) + \partial_k\varphi'(x)\partial_k\varphi'(x) - \partial_4\varphi'(x)\partial_4\varphi'(x)\right) \tag{64}$$

$$\langle\varphi'|P_\nu|\varphi'\rangle = \langle\varphi'|\int d^3x : \partial_4\varphi\,\partial_\nu\varphi - \tfrac{1}{2}\delta_{4\nu}(\partial_\lambda\varphi\,\partial_\lambda\varphi + m^2\varphi^2) : |\varphi'\rangle =$$
$$= \int d^3x\left(\partial_4\varphi'\,\partial_\nu\varphi' - \tfrac{1}{2}\delta_{4\nu}(\partial_\lambda\varphi'\,\partial_\lambda\varphi' + m^2\varphi'\varphi')\right) \tag{65}$$

т.е. имеют ту же форму, что и в классической теории поля.

С помощью соотношения полноты для когерентных состояний

$$\int |\varphi'\rangle\,\delta^2\varphi'\,\langle\varphi'| = 1 \tag{66}$$

(где функциональный интеграл берется по $\mathrm{Re}\,\varphi'^{(-)}$ и $\mathrm{Im}\,\varphi'^{(-)}$ или по φ' и $\dot\varphi'$) от $\langle\varphi_2'|\varphi(x)|\varphi_1'\rangle$ можно вернуться к оператору $\varphi(x)$ (и от уравнений (60)-(63) к уравнениям (48)-(5I) для операторов). Элементы $\langle\varphi_2'|\varphi(x)|\varphi_1'\rangle$ можно выразить через $\langle\varphi_1'|:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n):|\varphi_1'\rangle$. Поэтому, зная средние

$\langle\varphi'|:\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n):|\varphi'\rangle$ для всех n и всех φ' и $\dot{\varphi}'$, мы полностью знаем оператор $\varphi(x)$, и наоборот. Возможно, справедливо и более сильное утверждение, что оператор однозначно определяется своими диагональными матричными элементами (см. /2/, стр. 187).

5. ПРИМЕНЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ В СЛУЧАЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Обратимся к уравнениям Челлена-Янга-Фелдмана

$$\varphi(x) = \varphi(x) + \int_{t_1} d^4x' \, \Delta_{ret}(x-x')\mathring{j}(x') \qquad \left(= \mathcal{S}^{-1}(x_0,t_1)\varphi(x)\mathcal{S}(x_0,t_1)\right) \tag{67}$$

$$A_\mu(x) = A_\mu(x) + \int_{t_1} d^4x' \, \Delta_{ret}(x-x')\mathring{j}_\mu(x') \qquad \left(= \mathcal{S}^{-1}(x_0,t_1)A_\mu(x)\mathcal{S}(x_0,t_1)\right) \tag{68}$$

$$\psi(x) = \psi(x) - ie\int_{t_1} d^4x' \, S_{ret}(x-x')\hat{A}(x')\psi(x') \quad \left(= \mathcal{S}^{-1}(x_0,t_1)\psi(x)\mathcal{S}(x_0,t_1)\right) \tag{69}$$

где $\hat{A}(x') = \gamma_\mu A_\mu$, а $\varphi(x)$, $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ построены из начальных значений $\varphi(x)$, $\partial_4\varphi(x)$, $A_\mu(x)$, $\partial_4 A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ с $x_0 = t_1$ по прежним формулам (48)-(50) (или (52)-(54)). Эти уравнения вместе с одновременными перестановочными соотношениями содержат исчерпывающую информацию о причинности. Выражения в скобках объединяют результат итераций уравнений и могут служить для нахождения $\mathcal{S}$-матрицы в терминах $\varphi(x)$, $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$.

Мы не будем касаться случая замкнутой системы взаимодействующих полей (этому посвящена работа /8/), а лишь кратко остановимся на простейших случаях взаимодействия: а) с внешним током $\mathring{j}(x')$ (или $\mathring{j}_\mu(x')$) и б) с внешним полем $A_\mu(x')$. Ниже, говоря о когерентных состояниях, мы подразумеваем состояния, построенные по рецептам пп. 2 и 3 из операторов $\varphi(x)$, $A_\mu(x)$ или $\psi(x)$.

<u>а) Взаимодействие с внешним током</u>. Среднее от оператора $\varphi(x)$ по когерентному состоянию (4), согласно уравнению (67), равно

$$\langle\varphi(x)\rangle = \varphi'(x) + \int_{t_1} d^4x' \, \Delta_{ret}(x-x')\mathring{j}(x') \tag{70}$$

и ведет себя в точности так, как классическое поле, в частности, при

определенных свойствах финитности $\varphi'(x)$ и $\mathring{j}(x)$ в пространстве представляет сигнал с фронтом.

Отметим, что в обсуждаемом случае оператор $\mathcal{S}(t_2,t_1)$ приводится к очень простой форме

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(t_2,t_1) &= \langle 0|\mathcal{S}(t_2,t_1)|0\rangle :e^{i\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \varphi(x)\mathring{j}(x)}: = \\ &= \langle 0|\mathcal{S}(t_2,t_1)|0\rangle\, e^{i\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \varphi^{(+)}(x)\mathring{j}(x)}\, e^{i\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \varphi^{(-)}(x)\mathring{j}(x)} = \\ &= e^{\frac{i}{2}\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, d^4x'\, \mathring{j}(x)\bar{\Delta}(x-x')\mathring{j}(x')}\, e^{i\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \varphi(x)\mathring{j}(x)}\end{aligned} \tag{71}$$

$$\left(\langle 0|\mathcal{S}(t_2,t_1)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, d^4x'\, \mathring{j}(x)(-i)\Delta_+(x-x')\mathring{j}(x')}\right),$$

где $\bar{\Delta}$ и Δ_+ – симметричная и фейнмановская функции Грина свободного уравнения ШФКГ. Очевидно, что

$$\mathcal{S}(t_2,t_1)|0\rangle \sim e^{i\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \varphi(x)\mathring{j}(x)}|0\rangle \tag{72}$$

есть когерентное состояние (в форме (35)), т.е. взаимодействие с классическим внешним током рождает чисто когерентное состояние /1,2/.

Случай уравнения (68) аналогичен.

<u>б) Взаимодействие с внешним полем</u>. Взяв от уравнения (69) среднее по когерентному состоянию (26), получаем уравнение

$$\langle\psi(x)\rangle = \psi'(x) - ie\int_{t_1} d^4x' \, S_{ret}(x-x')\hat{A}(x')\langle\psi(x')\rangle, \tag{73}$$

тоже аналогичное классическим уравнениям. Решения уравнений (69) и (73) представимы в виде

$$\psi(x) = i\int d^3x' \, S^A_{ret}(x,x')\gamma_4\psi(x'), \tag{74}$$

$$\langle\psi(x)\rangle = i\int d^3x' \, S^A_{ret}(x,x')\gamma_4\psi'(x'), \tag{75}$$

где $S^A_{ret}(x,x')$ – запаздывающая функция Грина во внешнем поле. Если N-упорядочивание относится к операторам $\psi(x)$, то, очевидно, что

$$\langle:\psi(x_1)\dots\psi(x_n):\rangle = i^n\int d^3x'_1\dots d^3x'_n \, S^A_{ret}(x_1,x'_1)\gamma_4\psi'(x'_1)\dots S^A_{ret}(x_n,x'_n)\gamma_4\psi'(x'_n). \tag{76}$$

Уравнения (70) и (73) снова имеют смысл теоремы Эренфеста.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

К соотношениям пунктов 2а и 3а добавим соотношения[x)]

$$|\varphi'\rangle = e^{-(\varphi'^{(-)},\varphi^{(-)})-(\varphi'^{(+)},\varphi^{(+)})}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}(\varphi'^{(-)},\varphi'^{(-)})}\, e^{-(\varphi'^{(+)},\varphi^{(+)})}|0\rangle \tag{A.1}$$

$$\langle 0|\varphi'\rangle = e^{-\frac{1}{2}(\varphi'^{(-)},\varphi'^{(-)})} \tag{A.2}$$

$$\langle \varphi'_2|\varphi'_1\rangle = e^{-\frac{1}{2}(\varphi_1'^{(-)},\varphi_1'^{(-)})-\frac{1}{2}(\varphi_2'^{(-)},\varphi_2'^{(-)})+(\varphi_2'^{(-)},\varphi_1'^{(-)})} \tag{A.3}$$

$$|J\rangle = e^{iJ\cdot\varphi^{(-)}+iJ\cdot\varphi^{(+)}}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta^{(1)}(x-y)J(y)}\; e^{iJ\cdot\varphi^{(+)}}|0\rangle \tag{A.4}$$

$$\langle 0|J\rangle = e^{-\frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta^{(1)}(x-y)J(y)} \tag{A.5}$$

$$\langle J_2|J_1\rangle = e^{-\frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, d^4y\,(J_1(x)-J_2(x))\Delta^{(1)}(x-y)(J_1(y)-J_2(y)) - \frac{i}{2}\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, d^4y\, J_1(x)\Delta(x-y)J_2(y)} \tag{A.6}$$

При их получении используются формулы

$$\partial_4 \varphi^{(\mp)}(x) = \mp\sqrt{-\Delta+m^2}\,\varphi^{(\mp)}(x) \tag{A.7}$$

$$[\varphi^{(\mp)}(x),\varphi^{(\pm)}(y)] = \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega}\, e^{\pm ik(x-y)} = i\Delta^{(\mp)}(x-y) \tag{A.8}$$

$$\Delta(x) = \Delta^{(-)}(x)+\Delta^{(+)}(x)\,, \qquad \Delta^{(1)}(x) = i[\Delta^{(-)}(x)-\Delta^{(+)}(x)] \tag{A.9}$$

[x)] Для комплексных величин $(g,f) = \int d^3x\,(\partial_4 g^* f - g^*\partial_4 f)$.

и тождество

$$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}\, e^{\beta}\, e^{-\frac{1}{2}[\alpha,\beta]}\,, \tag{A.10}$$

верное при $[\alpha[\alpha,\beta]] = [\beta[\alpha,\beta]] = 0$.

Разбиение на положительно- и отрицательночастотные части можно осуществить следующими способами:

$$\varphi^{(\mp)}(x) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\tau}{\tau\mp i\varepsilon}\,\varphi(\vec{x},t-\tau) \qquad (\varepsilon\to 0_+) \tag{A.11}$$

$$\varphi^{(\mp)}(x) = i\int d^3x'\left[\partial'_4\Delta^{(\mp)}(x-x')\varphi(x') - \Delta^{(\mp)}(x-x')\partial_4\varphi(x')\right] \tag{A.12}$$

$$\varphi^{(\mp)}(x) = \frac{1}{2}\left(1\mp\frac{\partial_4}{H}\right)\varphi(x) \qquad \left(H=\sqrt{-\Delta+m^2}\right), \tag{A.13}$$

например,

$$\Delta^{(\mp)}(x) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\tau}{\tau\mp i\varepsilon}\,\Delta(\vec{x},t-\tau). \tag{A.14}$$

Аналогичные формулы можно записать и для других полей.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Матричный элемент $\langle 0|\varphi(x)|1\rangle$, представляющий одночастичное состояние, есть положительночастотная функция

$$\partial_4\langle 0|\varphi(x)|1\rangle = -\sqrt{-\Delta+m^2}\,\langle 0|\varphi(x)|1\rangle \quad \text{или} \quad \partial_4\langle x|\;\rangle = -H\langle x|\;\rangle\,, \tag{Б.1}$$

где запись $\langle x|\;\rangle \equiv \langle 0|\varphi(x)|1\rangle$ отвечает формализму квантовой механики одночастичных состояний. Поэтому начальные условия не могут быть заданы независимо, причем, если одно из них выбрано финитным, другое не будет финитным, например,

$$\langle 0|\varphi(x')|1\rangle = \delta(\vec{x}'-\vec{y})\,, \quad \partial_4\langle 0|\varphi(x')|1\rangle = -\sqrt{-\Delta'+m^2}\,\delta(\vec{x}'-\vec{y}). \tag{Б.2}$$

Эволюцию $\langle 0|\varphi(x)|1\rangle$ можно записать в следующих четырех формах:

$$\langle 0|\varphi(x)|1\rangle = i\int d^3x'\left[\partial'_4\Delta(x-x')\langle 0|\varphi(x')|1\rangle - \Delta(x-x')\partial_4\langle 0|\varphi(x')|1\rangle\right] = \tag{Б.3}$$

$$= i\int d^3x'\left[\partial'_4\Delta^{(-)}(x-x')\langle 0|\varphi(x')|1\rangle - \Delta^{(-)}(x-x')\partial_4\langle 0|\varphi(x')|1\rangle\right] = \tag{Б.4}$$

$$= -2i\int d^3x'\,\Delta^{(-)}(x-x')\partial_4\langle 0|\varphi(x')|1\rangle = \tag{Б.5}$$

$$= 2i\int d^3x'\,\partial'_4\Delta^{(-)}(x-x')\langle 0|\varphi(x')|1\rangle \tag{Б.6}$$

(как для любого положительночастотного решения уравнения ШФКГ). С точки зрения эволюции по уравнению Шредингера естественна форма (Б.6), но в рамках уравнения Шредингера мы наталкиваемся на трудность с причинностью. Действительно, для состояния $\langle x | \rangle$, согласно (Б.I), эволюцию можно записать в виде

$$\langle x | \rangle = \int d^3x' \langle x | x' \rangle \langle x' | \rangle = e^{-iH(t-t')} \langle \vec{x}\, t' | \rangle , \qquad (Б.7)$$

где функция преобразования $\langle x | x' \rangle$ есть

$$\langle x | x' \rangle = e^{-iH(t-t')} \delta(\vec{x}-\vec{x}') = \qquad (Б.8)$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{m}{2\pi i (t-t')}\right]^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m}{2}\frac{(\vec{x}-\vec{x}')^2}{t-t'}} & \text{при } H = -\dfrac{\Delta}{2m} \text{ (нерелятивистский случай)} \qquad (Б.9) \\ 2i\partial_4' \Delta^{(-)}(x-x') & \text{при } H = \sqrt{-\Delta+m^2} \text{ (релятивистский случай)} \qquad (Б.10) \end{cases}$$

Функция преобразования $\langle x | x' \rangle$ есть амплитуда перехода из x' в x и, казалось бы, вследствие причинности должна равняться нулю при пространственноподобных $x-x'$. Однако этого нет даже в релятивистском случае. Локализованное в начальный момент t' состояние, скажем, с

$$\langle x' | \rangle = \delta(\vec{x}'-\vec{y}) \qquad (Б.II)$$

мгновенно расплывается. Итак, если состояние (Б.II) локализованное, то теория непричинна, а если теория причинна, то это состояние не локализованное.

С точки зрения квантовой теории поля квантовая механика одночастичных состояний, удовлетворяющих уравнению Шредингера, – лишь составная часть полной теории, в основе которой лежит уравнение ШФКГ с присущей ему причинностью. Из четырех равноценных записей эволюции (Б.3)-(Б.6) наиболее прозрачна первая, отражающая причинный характер теории и позволяющая объяснить кажущееся нарушение причинности нелокальностью начальных условий, например, (Б.2).

Существование решений волнового уравнения, не обладающих фронтом,

таких, например, как плоская волна, для которой к тому же при аномальной дисперсии фазовая скорость может превышать скорость света[x)], вызвало опасения за причинность еще в классической волновой теории вскоре после создания специальной теории относительности. Проблема была разрешена Зоммерфельдом и Бриллуэном в I910 г. в том смысле, что не всякое решение есть сигнал, способный переносить информацию[I6,I7]. Так, решение с фронтом – сигнал, а плоская волна, равномерно заполняющая все пространство, не есть сигнал. Группа волн с пространственной неоднородностью, даже не обладающая фронтом, способна переносить информацию, которая распространяется с групповой скоростью, не превосходящей скорости света.

Поскольку квантам по определению соответствуют положительночастотные плоские волны или суперпозиции таких волн, то уничтожение и рождение конечного числа квантов описывается нефинитными функциями. Возможно, этим объясняется кажущееся нарушение причинности в работе[/I8/].

Вопрос о существовании явно причинных амплитуд и плотности вероятности в x-пространстве пока остается открытым[xx)].

---

x)Как и для плоской волны $e^{i\vec{k}\vec{x}-i\sqrt{\vec{k}^2+m^2}\,t}$, удовлетворяющей уравнению ШФКГ.

xx)Такие амплитуды должны быть суперпозициями положительно- и отрицательночастотных решений уравнения ШФКГ, а потому, по-видимому, должны задаваться не одной, а парой функций, например, $\varphi(x') = \Delta(x'-y)$ и $\partial_4\varphi(x') = \partial_4' \Delta(x'-y)$. Роль плотности вероятности, по-видимому, должна играть плотность энергии

$$T_{00}(x) = \frac{1}{2}\left[m^2 \varphi(x)\varphi(x) + \partial_k\varphi(x)\partial_k\varphi(x) - \partial_4\varphi(x)\partial_4\varphi(x)\right], \qquad (Б.I2)$$

которая годится и для вещественных, и для комплексных полей и равна нулю там, куда сигнал не дошел. (Отметим, что T_{00} положительна даже в теориях со взаимодействием: в теории со связью φ^4, в скалярной электродинамике, в теории Янга-Миллса, в теории тяготения и т.д.)

В классической оптике и радиофизике вместо вещественных напряженностей, вещественного "сигнала", и обычной плотности энергии (для простоты пусть это будут скалярное поле $\varphi(x)$ и плотность энергии (Б.I2)) часто используют более грубые, но упрощающие расчеты вели-

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Уравнение Шредингера описывает только положительные частоты и позволяет выразить все производные по времени от искомой функции, а следовательно, и саму функцию через ее начальное значение. Уравнение второго порядка описывает частоты двух знаков и позволяет выразить через начальное значение только четные производные. Для вычисления нечетных необходимо задать первую производную по времени. В соответствии с этим,

$$\varphi(x) = e^{i(t-t')\partial_4}\varphi(\vec{x},t') = \left\{\cos[(t-t')\partial_4] + \frac{\sin[(t-t')\partial_4]}{\partial_4} i\partial_4\right\}\varphi(\vec{x},t'). \tag{B.I}$$

Используя уравнение ШФКГ, получаем

$$\varphi(x) = \cos\left[\sqrt{-\Delta+m^2}\,(t-t')\right]\varphi(\vec{x},t') + \frac{\sin\left[\sqrt{-\Delta+m^2}\,(t-t')\right]}{\sqrt{-\Delta+m^2}}\, i\partial_4\varphi(\vec{x},t') \ , \tag{B.2}$$

что совпадает с формулой (48) после учета

$$\Delta(x-x') = -\frac{\sin\left[\sqrt{-\Delta+m^2}\,(t-t')\right]}{\sqrt{-\Delta+m^2}}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{B.3}$$

Формула (48), записанная в символической форме (В.2), совершенно

чины: "аналитический сигнал" $\psi(t)$, который определяют как положительночастотную часть вещественного сигнала

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\tau}{\tau-i\varepsilon}\,\varphi(\vec{x},t-\tau)$$

и интенсивность $I=|\psi|^2$. Очевидно сходство с квантовой механикой: аналитический сигнал - аналог волновой функции (и тоже удовлетворяет "уравнению Шредингера"), а интенсивность - аналог плотности вероятности. Использованные без ограничений, эти понятия могли бы сильно исказить картину. В частности, аналитический сигнал и интенсивность лишены причинных свойств (нефинитны), в отличие от вещественного сигнала φ и плотности энергии T_{00}. Так, для $\varphi(x)=\Delta(x-x')$ имеем $\psi=\Delta^{(-)}(x-x')$ и $I=|\Delta^{(-)}(x-x')|^2$ (хотя вряд ли кто-либо решился бы применить эти понятия к столь широкополосному сигналу). Не являются ли такие объекты, как волновая функция, плотность вероятности, а, возможно, и вероятностная интерпретация в квантовой теории тоже упрощенными понятиями с ограниченной областью применимости (скажем, применимыми только к "узкополосным сигналам")?

аналогична закону эволюции оператора координаты квантово-механического осциллятора

$$x(t) = \cos[\omega(t-t')]\,x(t') + \frac{\sin[\omega(t-t')]}{\omega}\,\frac{p(t')}{m}\ . \tag{B.4}$$

Точно так же, формула (56) аналогична теореме Эренфеста для осциллятора

$$\bar{x}(t) = \cos[\omega(t-t')]\,\bar{x}(t') + \frac{\sin[\omega(t-t')]}{\omega}\,\frac{\bar{p}(t')}{m}\ . \tag{B.5}$$

Литература

I. Р.Глаубер. Лекции в книге "Квантовая оптика и квантовая радиофизика", М., Мир, 1966.

2. Дж.Клаудер, Э.Сударшан. Основы квантовой оптики, М., Мир, 1970.

3. Сборник статей "Когерентные состояния в квантовой теории", серия НФФ, вып. I, М., Мир, 1972.

4. T.W.B.Kibble. Phys.Rev. 175,1624, 1968.

5. Х.Д.Попов, Д.Ц. Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ I2, 370, 1972.

6. Т.М.Махвиладзе, Л.А.Шелепин. ЯФ I5, I082, 1972; ЖЭТФ 62, 2066, 1972.

7. А.М.Переломов. ТМФ I6, 303, 1973. Comm.Math.Phys.26,222(1972).

8. I.Bialynicki-Birula. Ann.Phys.(New York) 67,252,1971.

9. Ю.Швингер. Теория квантованных полей, М., ИЛ, 1956.

I0. М.А.Марков. ДАН СССР 5I,, 5I, 1955; Supp.Nuovo Cim.3,760,1956. М.А.Марков. Гипероны и К-мезоны, М., ГИФМЛ, 1958.

II. J.M.Knight. Journ.Math.Phys. 2,459,1961.

I2. О.А.Хрусталев. Сообщения ОИЯИ Р-II26, Дубна, 1962.

I3. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р-269I, Дубна, 1966.

I4. Ю.Швингер. Частицы, источники, поля, М., Мир, 1973.

I5. K.Symanzik. Journ.of Math.Phys. 1,249,1960; Lectures in theor. phys., vol.3, ed.W.E.Britten et al., Interc.Publ., New York, 1961, p. 490; Symposia on theoretical physics, 3, Plenum Press, New York, 1967, p. 121.

I6. А.Зоммерфельд. Оптика, М., ИЛ, 1953, стр. I54.

I7. L.Brillouin. Wave Propagation and Group Velocity Academic Press, New York - London, 1960.

I8. М.И.Широков, Сообщения ОИЯИ Е-I252, Дубна, 1963; И.А.Еганова, М.И.Широков. Сообщения ОИЯИ Р2-4645, Дубна, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 апреля 1974 года.