ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Р2 - 7879

В.Г.Малышкин

# ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕНОРМИРОВКИ МОДЕЛИ $\pi$ - N - ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С ПСЕВДОВЕКТОРНОЙ СВЯЗЬЮ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7879

В.Г.Малышкин*

# ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕНОРМИРОВКИ МОДЕЛИ $\pi$-N-ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С ПСЕВДОВЕКТОРНОЙ СВЯЗЬЮ

*Направлено в* ***Nuclear Physics***

---

* Саратовский государственный университет

I. Хорошо известно/I/, что единственная теория с взаимодействием <u>только</u> $\pi$ -мезонов и нуклонов при обычной связи типа Юкавы, которая воспроизводит результаты алгебры токов, - это псевдовекторная теория с лагранжианом взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{f}{m} :\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau_i \Psi \frac{\partial^{*} \varphi_i}{\partial x_\mu}: . \qquad (I)$$

Хотя такая модель имеет много привлекательных черт , детальный её анализ (например, учёт высших порядков теории возмущений) осложняется двумя фактами:

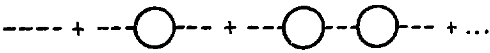
а) константа связи велика;

б) модель неперенормируема.

В настоящей работе делается попытка устранить последнюю из перечисленных трудностей.

Рассмотрим формально ряд теории возмущений, соответствующий лагранжиану взаимодействия (I). Этот ряд представляется совокупностью диаграмм Фейнмана, составленных из мезонных и нуклонных линий по известным правилам.

Обозначим через $G(p^2)$ сумму диаграмм вида:

$G(p^2) =$ 

$$= G_0(p^2) + G_0(p^2)\Pi(p^2)G_0(p^2) + \ldots , \qquad (2)$$

---

Мы используем следующие обозначения:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2 g_{\alpha\beta} , \qquad \gamma_5 = i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 ,$$

$$g_{\alpha\beta} = diag(1,-1,-1,-1) , \qquad \gamma_5 = \gamma_5^{+}$$

где $\Pi(p^2)$ – оператор поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений. Ряд теории возмущений можно перегруппировать так, что он будет составлен из всех обычных диаграмм Фейнмана, исключая диаграммы, содержащие оператор поляризации вакуума второго порядка. При этом мезонной линии мы должны сопоставлять не свободный пропагатор $G_0(p^2)$, а функцию $G(p^2)$, задаваемую формальным разложением (2).

2. Следует заметить, однако, что такая перегруппировка ряда теории возмущений не является удовлетворительной. При формальном суммировании цепочки (2) мы придём к выражению для мезонной функции Грина

$$i\,G(p^2) = \frac{1}{m^2 - p^2 + \Pi(p^2)}, \tag{3}$$

содержащему наряду с нормальными особенностями (мезонный полюс и разрез с $4M^2$; $M$ –масса нуклона) дополнительные нефизические полюса в комплексной плоскости $p^2$. Методы, предложенные в работах[2,3], позволяют избавиться от ложных полюсов. В частности, если постулировать принцип суммирования под знаком спектрального интеграла[2], можно прийти к выражению

$$i\,G(p^2) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \int\limits_{4M^2}^{\infty} \frac{dz\,\rho(z)}{z - p^2 - i\epsilon}, \tag{4}$$

где

$$\pi\rho(z) = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{m^2 - z + \Pi(z)}\right\}. \tag{5}$$

Функция Грина (4), хотя и обладает правильными аналитическими свойствами, но перенормируемости теории не обеспечивает.

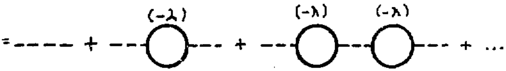
Действительно, так как $\rho(z)_{z \gg M^2} = O\left(\frac{1}{z^3}\right)$, справедлива оценка

$$|G(p^2)|_{p^2 \gg M^2} = \frac{1}{|p^2|}\left|1 + \int\limits_{4M^2}^{\infty} dz\,\rho(z)\right| + O\left(\frac{1}{|p^4|}\right). \tag{6}$$

Спектральная плотность $\rho(z)$, задаваемая выражением (5), положительна, поэтому асимптотическое поведение функции $G(p^2)$ совпадает с поведением пропагатора $G_0(p^2)$.

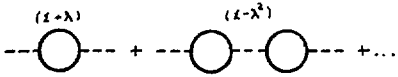
3. Мы ставим задачу: существует ли способ суммирования ряда (2), позволяющий сопоставить ( в духе методов суммирования асимптотических рядов) ему или его части такую функцию $G_\lambda(p^2)$, которая, обладая правильными аналитическими свойствами, убывала бы при $Re\, p^2 \to \infty$ не медленнее, чем $O(1/p^4)$. Именно такое поведение обеспечит перенормируемость модели (I).

Вернемся к ряду (2) и разобьём его на две чаоти

$G_\lambda(p^2) =$ 


$$= G_0(p^2) - \lambda G_0(p^2)\Pi(p^2)G_0(p^2) + \ldots \tag{7a}$$

и

$G'_{s\lambda}(p^2) =$ 


$$= (1+\lambda)G_0\Pi G_0 + (1-\lambda^2)G_0\Pi G_0\Pi G_0 + \ldots$$

$$= G_\lambda(p^2)(1+\lambda)\Pi(p^2)G_\lambda(p^2) + G_\lambda^3(p^2)[(1+\lambda)\Pi(p^2)]^2 + \ldots \tag{7б}$$

Очевидно, что если удастся просуммировать ряд (7а) так, чтобы функция $G_\lambda(p^2)$ обладала правильными аналитическими свойствами и имела асимптотическое поведение, подобное $O(1/p^4)$, то каждый член ряда (7б) также сохранит эти свойства. Более того, любая другая диаграмма из ряда теории возмущений для лагранжиана взаимодействия (I), вычисленная с помощью частичной функции Грина $G_\lambda(p^2)$, становится перенормируемой, так как по индексу расходимости теория (I) будет эквивалентна теории Юкавы с псевдоскалярной связью/4/.

4. Применим гипотезу Редмонда-Боголюбова-Логунова-Ширкова к набору диаграмм (7а). Тогда

$$i\,G_\lambda(p^2) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \int_{4M^2}^{\infty} \frac{dz\,\rho_\lambda(z)}{z - p^2 - i\epsilon}\,. \tag{8}$$

Здесь

$$\pi\rho_\lambda(z) = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{m^2 - z - \lambda\Pi(z)}\right\} = \frac{\lambda\,\mathrm{Im}\,\Pi(z)}{[m^2 - z - \lambda\,\mathrm{Re}\,\Pi(z)]^2 + [\lambda\,\mathrm{Im}\,\Pi(z)]^2}\,. \tag{9}$$

Функция $\Pi(z)$ нормирована условиями

$$\Pi(m^2) = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial\Pi(z)}{\partial z}\right|_{z=m^2} = 0 \tag{IO}$$

и имеет вид

$$\begin{aligned}\Pi(p^2) = \frac{f^2M^2}{\pi^2 m^2}\Big\{ & W\frac{(p^2-m^2)^2}{M^2} - (p^2-m^2) \\ & - 2(p^2-m^2)\left(\frac{2M^2}{m^2}-1\right)\left(\frac{4M^2}{m^2}-1\right)^{-1/2}\mathrm{arctg}\left(\frac{4M^2}{m^2}-1\right)^{-1/2} \\ & - 2m^2\left(\frac{4M^2}{m^2}-1\right)^{1/2}\mathrm{arctg}\left(\frac{4M^2}{m^2}-1\right)^{-1/2} \\ & + p^2\left(1-\frac{4M^2}{p^2}\right)^{1/2}\left[2\,\mathrm{Arcth}\left(1-\frac{4M^2}{p^2}\right)^{-1/2} - i\pi\,\vartheta(p^2-4M^2)\right]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{II}$$

где $W$ – неопределённый параметр. Для того, чтобы функция $G_\lambda(p^2)$ имела асимптотику $O\left(\frac{1}{p^4}\right)$, достаточно удовлетворить условию:

$$1 + \int_{4M^2}^{\infty} d\varkappa \, \rho_\lambda(\varkappa) = 0. \tag{12}$$

Численный анализ показывает, что спектральный интеграл в (12) как функция $\lambda$ и $W$ имеет минимум в точке $(\lambda_0, W_0)$, равный $-1-\Delta$, где

$$\begin{aligned} \lambda_0 \frac{f^2 M^2}{\pi^2 m^2} &= 0.366 \\ W_0 &= -0.182 \\ \Delta &= 1.6 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \tag{13}$$

Решения уравнения (12) лежат на замкнутой кривой в плоскости $\lambda$, $W$ диаметра $d = 2\cdot 10^{-3}$ и охватывающей точку $(\lambda_0 W_0)$. Приближённо эти решения можно записать в виде: $\lambda = \lambda_0 \pm d$, $W = W_0 \pm d$; здесь $\lambda_0$ и $W_0$ определены согласно (13).

5. Теперь мы можем сформулировать правила соответствия для перегруппированного ряда теории возмущений, построенного по лагранжиану взаимодействия (1):

а) мезонной линии сопоставляется функция Грина $G_\lambda(p^2)$, определяемая выражением (8) и условиями (13);

б) оператору поляризации вакуума второго порядка сопоставляется величина $(1+\lambda)\Pi(p^2)$, определяемая формулой (11) и условиями (13). Естественно, что наш способ суммирования не единственен. К лагранжиану (1) можно, например, применить технику работ [5,6]. Следует заметить, однако, что в отличии от этих способов, наш результат не содержит ни одного произвольного параметра.

Покажем, что построенный нами способ суммирования приводит к перенормируемой модели $\pi$-$N$ взаимодействий с градиентной связью. Согласно [4], максимальное значение индекса вершины

$$\omega_i^{max} = 0.$$

Поэтому индекс произвольной диаграммы $\mathcal{D}$ даётся выражением

$$\omega(\mathcal{D}) = 4 - \frac{1}{2} \sum_{\ell_{ext}} (r_\ell + 2), \tag{I4}$$

где

$$r_\ell = \begin{cases} 1 & \text{для нуклонов} \\ 0 & \text{для пионов} \end{cases} .$$

На рис. I указаны типы расходящихся диаграмм и соответствующие им индексы

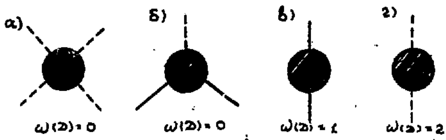



Рис. I. Типы расходящихся диаграмм. Сплошные линии изображают нуклоны, пунктирные – мезоны.

Вводя необходимые контрчлены, мы приходим к полному лагранжиану взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{полн} &= \mathcal{L}_{int} + \Delta\mathcal{L} \\ &= \frac{f}{m} : \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \partial^\mu \vec{\varphi} : + (Z_1 - 1) \frac{f}{m} : \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \partial^\mu \vec{\varphi} : \\ &+ (Z_2 - 1) : \bar{\Psi} (\hat{p} - M) \Psi : - \delta M : \bar{\Psi} \Psi : \\ &+ (Z_3 - 1) : \vec{\varphi} (p^2 - m^2) \vec{\varphi} - \delta m^2 : \vec{\varphi} \vec{\varphi} : \\ &+ Z_4^{(1)} \frac{1}{m^4} : (\partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i)^2 + Z_4^{(2)} \frac{1}{m^4} : \partial_\mu \varphi_i \partial_\nu \varphi_i \partial^\mu \varphi_j \partial^\nu \varphi_j : \end{aligned} \tag{I5}$$

Итак, мы выполнили поставленную задачу и добились перенормируемости модели $\pi$-$N$-взаимодействий с псевдовекторной связью.

Конечно, этот метод не единственен, и, возможно, существует ряд других способов, позволяющих корректно обращаться с лагранжианом (I). Важно заметить, что предложенная нами модель, с одной стороны, не сложнее любой перенормируемой модели, с другой - не имеет ни одного произвольного параметра, кроме наблюдаемых $f$, $M$ и $m$, а также констант связи $\bar{\pi}$ - $\bar{\pi}$ - взаимодействий. Каждый член перегруппированного ряда обладает правильными аналитическими свойствами и может быть сделан конечным с помощью указанных в выражении (I5) вычитаний.

Представляется интересным проанализировать более детально эту модель. Такая работа в настоящее время проводится.

В заключение автор благодарит Д.В. Ширкова за ценные указания при обсуждении первоначального варианта статьи. Глубокую признательность автор выражает Г.В. Ефимову за постоянный интерес к работе, стимулирующие обсуждения и целый ряд критических замечаний.

## Литература:


1. S.Weinberg. Phys. Rev. Letters, 16,879 (1966).
2. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков. ЖЭТФ, 37, 805 (1959).
3. R.J.Redmond.Phys. Rev. 112,1404 (1958).
4. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, 2-е издание. М., Наука, 1973.
5. Г.В. Ефимов, О.А. Могилевский. Препринт ИТФ-71-128Р; Киев, 1971; Nucl. Phys. B44,541 (1971).
6. О.А. Могилевский. Препринт ИТФ-72-130Р, Киев, 1972.



Рукопись поступила в издательский отдел
18 апреля 1974 года.