ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С 323.4
Д-198
2759/2-74

P2 - 7866

Дао Вонг Дык

О РАЗМЕРНЫХ СВОЙСТВАХ ПЛОТНОСТИ ГАМИЛЬТОНИАНА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7866

Дао Вонг Дык

О РАЗМЕРНЫХ СВОЙСТВАХ ПЛОТНОСТИ ГАМИЛЬТОНИАНА

Направлено в ЯФ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Из-за наличия масс у частиц плотность гамильтониана не может иметь определенной масштабной размерности, и в лучшем случае можно ожидать, что она состоит из нескольких частей с различными размерностями. Определение этих размерностей имеет большое значение, особенно при изучении следствий, вытекающих из нарушенных масштабной и киральной инвариантностей, вместе взятых. Этот вопрос рассматривается во многих работах /см., например, [1–9] и цитированную там литературу/. При этом разные подходы дают, вообще говоря, разные результаты, так что окончательного ответа пока еще нет.

В настоящей работе мы обсуждаем некоторые положения, касающиеся этого вопроса.

1. Если какая-нибудь компонента тензора энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ имеет определенную масштабную размерность $\ell_{(\mu\nu)}$, то это означает, что имеет место следующее коммутационное соотношение:

$$[D(x_0), \theta_{\mu\nu}(x)] = -i(\ell_{(\mu\nu)} - x^{\rho}\partial_{\rho})\theta_{\mu\nu}, \qquad /1/$$

где $D(x_0)$ - генератор масштабного преобразования, выражающийся через $\theta_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$D(x_0) = -\int d\vec{x}\, x^{\rho}\, \theta_{0\rho}(x). \qquad /2/$$

С другой стороны, из /2/ следует, что коммутатор в левой части /1/ может быть вычислен, если определены одновременные коммутаторы $[\theta_{0\rho}(x), \theta_{\mu\nu}(y)]_{x_0 = y_0}$ вплоть до швингеровских членов первого порядка. Из законов преобразования тензора $\theta_{\mu\nu}$ под действием преобразований неоднородной группы Лоренца было найдено /см., например, [10,11] /

$$[\theta_{00}(x),\theta_{00}(y)]=-i\partial_0\theta_{00}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y})-2i\theta_{0k}(y)\partial^k(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})+\dots, \qquad /3/$$

$$[\theta_{00}(x),\theta_{0i}(y)]=-i\partial_0\theta_{0i}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y})-i\theta_{ik}(y)\partial^k(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})+$$
$$+i\theta_{00}(y)\partial_i(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}), \qquad /4/$$

$$[\theta_{0i}(x),\theta_{00}(y)]=-i\partial_i\theta_{00}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y})-i\theta_{ik}(y)\partial^k(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})+$$
$$+i\theta_{00}(y)\partial_i(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}), \qquad /5/$$

$$[\theta_{0i}(x),\theta_{0j}(y)]=-i\partial_i\theta_{0j}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y})+i\theta_{0j}(y)\partial_i(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})+$$
$$+i\theta_{0i}(y)\partial_j(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}), \qquad /6/$$

где $x_0=y_0$, $i,j,\dots=1,2,3,$ троеточие означает швингеровские члены начиная со второго порядка.

Чтобы найти $[\theta_{0\mu}(x),\theta_{jk}(y)]$, мы поступаем аналогично. При этом исходим из найденных коммутаторов /3/-/6/, используя тождества Якоби, написанные для трех операторов $\int d\vec{x}\,x^k\,\theta_{0\nu}(0,\vec{x})$, $\theta_{0i}(0)$ и M_{0j} /$M_{\mu\nu}$ - генераторы однородных преобразований Лоренца/. В результате получим:

$$[\theta_{00}(x),\theta_{ij}(y)]=-i\partial_0\theta_{ij}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y})+i\theta_{0i}(y)\partial_j(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})+$$
$$+i\theta_{0j}(y)\partial_i(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})+\dots, \qquad /7/$$

$$[\theta_{0i}(x),\theta_{jk}(y)]=-i\partial_i\theta_{jk}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y})+i[a\,\theta_{i\ell}(y)g_{jk}+(1+a)\theta_{jk}(y)g_{i\ell}+$$
$$+b(\theta_{j\ell}(y)g_{ik}+\theta_{k\ell}(y)g_{ij})+(1+b)(\theta_{ij}(y)g_{k\ell}+\theta_{ik}(y)g_{j\ell})+$$
$$+c\,\theta_{00}(y)g_{jk}g_{i\ell}]\partial^\ell(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})+\dots \qquad /8/$$

Из /2/-/8/ следует

$$[D(x_0),\theta_{0\mu}(x)]=-i(-4-x^\nu\partial_\nu)\theta_{0\mu}-ig_{0\mu}\theta^\nu_\nu(x), \qquad /9/$$

$$[D(x_0),\theta_{ij}(x)]=-i(-(3a+4b+5)-x^\nu\partial_\nu)\theta_{ij}(x)+ig_{ij}(3c\theta_{00}-a\sum_i\theta_{ii}). \qquad /10/$$

Уравнения /9/ и /10/ показывают, что θ_{00} , а также θ_{ii} , вообще говоря, не имеют определенной размерности. θ_{0i} имеет размерность $\ell_{(0i)}=-4$, θ_{ij} $(i\neq j)$ имеет размерность $\ell=-(3a+4b+5)$, вообще говоря, отличную от -4. При помощи тождества Якоби, написанного для трех операторов $D(0)$, $\theta_{0i}(0)$, M_{0j} , легко видеть, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\ell_{(ij)}=-4$, т.е. $3a+4b=-1$, является

$$\int d\vec{x}\,x_i\,[\theta_{0j}(0),\theta^\mu_\mu(0,\vec{x})]=0. \qquad /11/$$

Приведем еще одну формулу для матричных элементов от $\theta_{\mu\nu}$, которая понадобится в дальнейшем. Будем использовать нормировку

$$\langle A(\vec{p}\,',\alpha')\,|\,A(\vec{p},\alpha)\rangle=(2\pi)^3\,\frac{p_0}{\lambda_A}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\delta_{\alpha\alpha'}\,, \qquad /12/$$

где λ_A равно $\frac{1}{2}$, если A - бозонная частица, и равно m_A, если A - фермионная частица, p , p' - импульсы, α , α' - другие квантовые числа, кроме импульса.

Из нормировки /12/ и из того, что $P_\nu \equiv \int d\vec{x}\,\theta_{0\nu}$ является оператором энергии-импульса, следует:

$$<A(\vec{p},\alpha')\,|\theta_{0\nu}(0)|A(\vec{p},\alpha)> = \frac{p_0 p_\nu}{\lambda_A}\delta_{\alpha\alpha'} . \qquad /13/$$

Теперь, продифференцировав уравнение

$$(p'-p)^\mu <A(\vec{p}',\alpha')|\theta_{\mu\nu}(0)|\,A(\vec{p},\alpha)> = 0, \qquad /14/$$

следующее из условия сохранения тензора $\theta_{\mu\nu}$, по p'_k, и затем полагая $\vec{p}'=\vec{p}$, мы получим /с учетом /13//:

$$<A(\vec{p},\alpha')\,|\theta_{\mu\nu}(0)|\,A(\vec{p},\alpha)> = \frac{p_\mu P_\nu}{\lambda_A}\delta_{\alpha\alpha'}. \qquad /15/$$

Формула /15/ показывает, в частности, что матричные элементы от компонент $\theta_{\mu i}$ по состоянию любой покоящейся частицы равны нулю.

2. Переходим теперь к рассмотрению масштабных размерностей членов, входящих в киральный гамильтониан. Допустим, что плотность гамильтониана θ_{00} может быть представлена в виде

$$\theta_{00} = \bar{\theta}_{00} + \delta + u, \qquad /16/$$

где $\bar{\theta}_{00}$ сохраняет одновременно и киральную, и масштабную инвариантности, δ сохраняет только киральную инвариантность и имеет определенную размерность $\ell_\delta \neq -4$, u нарушает киральную инвариантность и имеет определенную размерность ℓ_u. Мы не будем конкретизировать вид u, оно может служить $u_0 + cu_8$, преобразующимся по представлению $(3,\bar{3})+(\bar{3},3)$ киральной группы, или g, преобразующимся по представлению $(8,1)+(1,8)$, и т.д. Разложение /16/ означает, что

$$[D(0), \theta_{00}(0)] = 4i\bar{\theta}_{00} - i\ell_\delta\,\delta - i\ell_u\,u . \qquad /17/$$

Возьмем матричные элементы от обеих частей уравнений /16/ и /17/ по состоянию какой-нибудь покоящейся частицы M из октета псевдоскалярных мезонов. Получим следующую систему уравнений:

$$<M(\vec{0})|\bar{\theta}_{00}|\,M(\vec{0})> + <M(\vec{0})\,|\delta|\,M(\vec{0})> + <M(\vec{0})\,|u|\,M(\vec{0})> = 2m_M^2, \qquad /18/$$

$$4i<M(\vec{0})|\bar{\theta}_{00}|M(\vec{0})> - i\ell_\delta <M(\vec{0})|\delta|M(\vec{0})> - i\ell_u <M(\vec{0})|u|\,M(\vec{0})> = 6im_M^2 . \qquad /19/$$

При этом были использованы равенства /9/ и /15/. Из /18/ и /19/ следует:

$$<M(\vec{0})|\bar{\theta}_{00}|M(\vec{0})> - (\ell_\delta+3)<M(\vec{0})|\delta|M(\vec{0})> - (\ell_u+3)<M(\vec{0})|u|M(\vec{0})> = 0. \qquad /20/$$

Уравнение /20/ показывает, что в приближении инвариантности вакуума относительно SU(3) -преобразований мы должны иметь $\ell_u = -3$. Действительно, в этом приближении два первых члена в левой части /20/ принимают одинаковые значения для всех мезонов октета, в то время как матричный элемент $<M(\vec{0})|u|M(\vec{0})>$ принимает разные значения для разных M, откуда и следует $\ell_u + 3 = 0$. Если, кроме того, мы считаем, что в пределе киральной и масштабной инвариантности псевдоскалярные мезоны являются безмассовыми, то

$$<M(\vec{0})|\bar{\theta}_{00}|\,M(\vec{0})> = 0, \qquad /21/$$

и тогда следует также $\ell_\delta = -3$.

Здесь уместно упомянуть результат работы [6], где было показано, что если продольная структурная функция W_L в неупругом лептон-нуклон рассеянии стремится к нулю в пределе Бьеркена, то размерность каждого члена в части гамильтониана, отвечающей за нарушение масштабной инвариантности, должна удовлетворить условию $\ell \leq -3$, что дает $\ell \simeq -3$, если размерности полевых величин принимают значения, близкие к целым [12,13].

3. В связи с этим докажем следующее утверждение: если размерности всех членов в части гамильтониана, отвечающей за нарушение масштабной инвариантности, равны -3, то размерность любого оператора $F(x)$ /если

для этого оператора она определяется/, который имеет неисчезающий матричный элемент по состоянию покоящегося π -мезона или нуклона,

$$< h(\vec{0}) \,|\, F \,|\, h(\vec{0}) > \neq 0, \qquad /22/$$

где $h \equiv \pi, N$, также равна -3.

Как будет видно, это утверждение носит общий характер, для его доказательства не требуется какого-нибудь дополнительного предположения.

Для удобства в данном случае мы обозначаем ту часть гамильтониана, которая отвечает за нарушение масштабной инвариантности, через θ'_{00}, а ее размерность - через ℓ' и пишем:

$$\theta_{00} = \bar{\theta}_{00} + \theta'_{00}, \qquad \ell' = -3. \qquad /23/$$

Приступим к доказательству. Отметим прежде всего, что из /23/ следует

$$< A(\vec{0}) \,|\, \bar{\theta}_{00}(0) \,|\, A(\vec{0}) > = 0 \qquad /24/$$

для любой частицы А, т.е. в данном случае массы всех частиц обусловлены только частью гамильтониана θ'_{00}. Равенство /24/ является прямым следствием системы уравнений, аналогичных /18/ и /19/ и написанных для гамильтониана вида /23/.

Рассмотрим теперь матричный элемент от коммутатора $[D(0), F(0)]$ по состоянию $h(\vec{0})$. С помощью разложения по полному набору промежуточных состояний пишем:

$$<h(\vec{0}) \,|\, D(0)\,F(0) \,|\, h(\vec{0}) > = \sum_{\alpha} <h(\vec{0}) \,|\, D(0) \,|\, \alpha><\alpha \,|\, F(0) \,|\, h(\vec{0})>. \qquad /25/$$

Используя /2/ и свойство трансляционной инвариантности, выражаем $<h(\vec{0}) \,|\, D(0) \,|\, \alpha>$ в виде

$$<h(\vec{0}) \,|\, D(0) \,|\, \alpha> = -i(2\pi)^3 \frac{\partial}{\partial p_k} \delta(\vec{p}) <h(\vec{0}) \,|\, \theta_{0k}(0) \,|\, \alpha(\vec{p})>. \qquad /26/$$

Подставляя /26/ в /25/ и выделяя из суммы $\sum_{\alpha}$ одночастичное состояние h, имеем:

$$< h(\vec{0}) \,|\, D(0)\,F(0) \,|\, h(\vec{0}) > = i \frac{\lambda_h}{m_h} \frac{\partial}{\partial p_k} <h(\vec{0}) \,|\, \theta_{0k}(0) \,|\, h(\vec{p})>|_{\vec{p}=0} \times$$

$$\times < h(\vec{0}) \,|\, F(0) \,|\, h(\vec{0}) > + i(2\pi)^3 \sum_{\alpha \neq h} \delta(\vec{p}) \frac{\partial}{\partial p_k} < h(\vec{0}) \,|\, \theta_{0k}(0) \,|\, \alpha(\vec{p}) > \cdot$$

$$\cdot < \alpha(\vec{0}) \,|\, F(0) \,|\, h(\vec{0}) > . \qquad /27/$$

При этом мы уже учитывали /12/ и /13/. Из общего выражения для матричных элементов $<h(\vec{p}) \,|\, \theta_{\mu\nu} \,|\, h(\vec{q})>$ нетрудно получить:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} < h(\vec{p}) \,|\, \theta_{0k}(0) \,|\, h(\vec{q}) > |_{\vec{q}=\vec{p}} = \frac{1}{2\lambda_h} \left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{p_0} + 3 p_0 \right). \qquad /28/$$

Далее, на основании закона сохранения $\partial^{\mu} \theta_{\mu\nu} = 0$ можно написать:

$$(E_h - E_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial q_k} <h(\vec{p}) \,|\, \theta_{0k}(0) \,|\, \alpha(\vec{q})>|_{\vec{q}=\vec{p}} = <h(\vec{p}) \,|\, \theta^{\mu}_{\mu}(0) \,|\, \alpha(\vec{p})> \qquad /29/$$

для $\alpha \neq h$. Отметим, что, так как $h \equiv \pi, N$ есть мезон, барион с наименьшей массой, то в /29/ $E_{\alpha} > E_h$ для всех α. Подставляя /28/ и /29/ в /27/, имеем:

$$<h(\vec{0}) \,|\, D(0)\,F(0) \,|\, h(\vec{0}) > = \frac{3}{2} i < h(\vec{0}) \,|\, F(0) \,|\, h(\vec{0}) > -$$

$$-i(2\pi)^3 \sum_{\alpha \neq h} \delta(\vec{p}) \frac{1}{E_{\alpha} - m_h} < h(\vec{0}) \,|\, \theta^{\mu}_{\mu}(0) \,|\, \alpha(\vec{0}) > < \alpha(\vec{0}) \,|\, F(0) \,|\, h(\vec{0}) >.$$

/30/

Аналогичное выражение для матричного элемента $<h(\vec{0}) \,|\, F(0)\,D(0) \,|\, h(\vec{0})>$ выводится таким же образом. Получаем следующую окончательную формулу:

$$\langle h(\vec{0})|[D(0),F(0)]|h(\vec{0})\rangle = 3i\langle h(\vec{0})|F(0)|h(\vec{0})\rangle -$$

$$-i(2\pi)^3\sum_{\alpha\neq h}\delta(\vec{p})\frac{1}{E_\alpha-m_h}\{\langle h(\vec{0})|\theta^\mu_\mu(0)|\alpha(\vec{0})\rangle\langle\alpha(\vec{0})|F(0)|h(\vec{0})\rangle +$$

$$+\langle h(\vec{0})|F(0)|\alpha(\vec{0})\rangle\langle\alpha(\vec{0})|\theta^\mu_\mu(0)|h(\vec{0})\rangle\}. \qquad /31/$$

В частности, при $F=\theta^\mu_\mu$ имеем:

$$\langle h(\vec{0})|[D(0),\theta^\mu_\mu(0)]|h(\vec{0})\rangle = \frac{3im_h^2}{\lambda_h} -$$

$$-2i(2\pi)^3\sum_{\alpha\neq h}\delta(\vec{p})\frac{1}{E_\alpha-m_h}|\langle h(\vec{0})|\theta^\mu_\mu(0)|\alpha(\vec{0})\rangle|^2. \qquad /32/$$

С другой стороны, при помощи вириальной теоремы /которая, в свою очередь, является прямым следствием коммутационного соотношения /4// мы имеем для гамильтониана вида /23/:

$$[D(0),\theta^\mu_\mu(0)] = 3i\theta'_{(0)}, \qquad /33/$$

что вместе с равенством /24/ позволяет написать:

$$\langle h(\vec{0})|[D(0),\theta^\mu_\mu(0)]|h(\vec{0})\rangle = 3i\langle h(\vec{0})|\theta_{(0)}(0)|h(\vec{0})\rangle - \frac{3im_h^2}{\lambda_h}. \qquad /34/$$

Сравнивая /32/ и /34/, мы заключаем, что все недиагональные матричные элементы в правой части /32/ равны нулю:

$$\langle h(\vec{0})|\theta^\mu_\mu(0)|\alpha(\vec{0})\rangle = 0, \quad \alpha\neq h. \qquad /35/$$

Тогда уравнение /31/ перепишется в виде

$$\langle h(\vec{0})|[D(0),F(0)]|h(\vec{0})\rangle = 3i\langle h(\vec{0})|F(0)|h(\vec{0})\rangle, \qquad /36/$$

откуда и следует, что $\ell_F=-3$ /при условии /22//.

Для иллюстрации рассмотрим несколько примеров. В качестве первого примера возьмем компоненты токов. Так как временная компонента векторного тока I^V_0 имеет отличный от нуля матричный элемент по состоянию $\pi(\vec{0})$ /а также $N(\vec{0})$ /, а пространственные компоненты аксиального тока I^A_i имеют отличные от нуля матричные элементы по состоянию $N(\vec{0})$, то заключаем, что их размерность равна -3, если только имеет место /23/. Такое заключение нельзя сделать относительно пространственных компонент векторного тока, а также временной компоненты аксиального тока, так как их матричные элементы по состоянию $\pi(\vec{0})$ и $N(\vec{0})$ равны нулю. Отметим, что из условия сохранения векторного тока также следует, что $\ell_{I^V_0}=-3$ /14,15/.

В качестве второго примера возьмем компоненты θ_{0i}. Они, как было показано выше, имеют определенную размерность $\ell_{(0i)}=-4$, и их матричные элементы по состоянию любой покоящейся частицы /в том числе и π, N / равны нулю, что находится в согласии с высказанным утверждением.

4. Необходимо, однако, отметить следующее. Если все члены в части гамильтониана, отвечающей за нарушение масштабной инвариантности, имеют одинаковую размерность ℓ' /в частности, и $\ell'=-3$ /, то пропагатор для следа тензора энергии-импульса θ^μ_μ равен нулю при значении $p^2=0$:

$$\Delta_\theta(0)=0, \qquad /37/$$

где

$$\Delta_\theta(p^2)=\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|T\{\theta^\mu_\mu(x)\,\theta^\nu_\nu(0)\}|0\rangle. \qquad /38/$$

Действительно, стандартной техникой можно получить

$$\Delta_\theta(0)=\langle 0|[D(0),\theta^\mu_\mu(0)]|0\rangle. \qquad /39/$$

Подставляя сюда равенство

$$[D(0), \theta_\mu^{\ \mu}(0)] = -i\ell' \ \theta_\mu^{\ \mu}(0), \qquad /40/$$

вытекающее из вириальной теоремы, и учитывая равенство

$$\langle 0 | \theta_\mu^{\ \mu} | 0 \rangle = 0, \qquad /41/$$

вытекающее из требования лоренц-инвариантности вакуума, сразу получим /37/.

С другой стороны, из /37/ следует

$$\langle 0 | \theta_\mu^{\ \mu} | a(0) \rangle = 0 \qquad /42/$$

для любого состояния a . Равенство /42/ приводит, в частности, к пренебрежению гравитационной константой связи σ -мезона, определяемой формулой

$$\langle 0 | \theta_{\mu\nu}(0) | \sigma(k) \rangle = \frac{1}{3} F_\sigma m_\sigma^2 (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}).$$

В заключение я выражаю глубокую благодарность проф. Д.И.Блохинцеву за интерес к работе.

Литература

1. H.Fritzsch, M.Gell-Mann. Tracts in Mathematics and the Natural Sciences, 2, 1 (1971).
2. P.Carruthers. Phys.Rev., D2, 2265 (1970).
3. R.Jackiw. Phys.Rev., D3, 1347 (1971).
4. R.Crewther. Phys.Rev., D3, 3152 (1971).
5. J.Ellis, P.Weisz, B.Zumino. Phys.Lett., 34B, 91 (1971).
6. S.G.Brown. Phys.Rev.Lett., 27, 347 (1971).
7. D.N.Levin, S.Okubo, D.R.Palmer. Phys.Rev., D4, 1847 (1971).
8. Fayyazuddin, Riazuddin. Phys.Rev., D8, 3518 (1973).
9. Дао Вонг Дык. ЯФ, 19, 1115 /1974/.
10. J.Schwinger. Phys.Rev., 127, 324 (1962).
11. Дао Вонг Дык. ТМФ, 13, 75 /1972/.
12. H.Kleinert, P.H.Weisz. Nucl.Phys., B27, 23 (1971).
13. K.Wilson. Phys.Rev., 179, 1499 (1969).
14. M.S.Chanowitz. Phys.Rev., D4, 1717 (1971).
15. Дао Вонг Дык. ЯФ, 18, 190 /1973/.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 апреля 1974 года.