ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7852

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7852

Б.М. Барбашов, Н.А.Черников

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Направлено в ***Nuclear Physics***

Summary

A method developed earlier 1 for solving the nonlinear equations for a system of fields of the Born-Infeld type is here applied for solving the equations of motion of a relativistic string which are interpreted as equations of the Plateau problem in n+1 - dimensional pseudo-euclidean space. The general Cauchy problem is solved in the dynamics of the relativistic string, i.e. there is found the integral surface (the world sheet of the strong), which passes through a given initial space-like curve (an initial configuration of the strong) and is tangent to a field of vectors (initial velocities of the string).

Solutions for different parametrizations of the initial curve are presented and examples of motion for various initial configurations and velocities of the string are considered. In particular, a motion is investigated of the string rolled up at the initial time into a ring or spiral. For these cases the forces are found which are connected with elasticity of this string. For some other initial configurations and velocities, the string does not reveal the elasticity properties and behaves as a one-dimensional manifold of nonconnected points.

A relativistic expression is given for a momentum and rest mass of an element of the string. For the closed string (loop) an expression is written for a total momentum P and total rest mass M of the string as a whole. The total rest mass $M = \sqrt{-P^2}$ as well as the total momentum are conserved but the masses of elements of the string dm are changing in the process of motion. These quantities are calculated for the closed string (a loop).

Известная в математике проблема двухмерных минимальных поверхностей (проблема Плато[2]) в $n+1$ -мерном пространстве E_n^1 с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dt^2$ была интерпретирована авторами[1,3-6] как проблема динамики системы $n-1$ скалярных полей в двумерном пространстве-времени $E_1^1(x_1, t)$ с функцией действия

$$S = -\varkappa^2 \int dt\, dx_1 \sqrt{\left[1 - \varkappa^{-2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}\right)^2\right] \left[1 + \varkappa^{-2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right)^2\right] + \varkappa^{-2} \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right]^2},$$

где $\varkappa$ - размерная константа. В частности, при $n=2$ получается нелинейная теория одного поля $\varphi(x\, t)$ типа Борна-Инфельда[3] с функцией действия

$$S = -\varkappa^2 \int dt\, dx \sqrt{1 + \varkappa^{-2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2\right]}.$$

Эта аналогия позволила найти решение уравнений движения системы (I). Дело в том, что уравнения минимальной поверхности получаются в результате варьирования интеграла площади

$$S = -\int \sqrt{(r_\alpha r_\beta)^2 - r_\alpha^2 r_\beta^2}\, d\alpha\, d\beta\,, \tag{2}$$

где

$$r = \{t, x_1, x_2, \dots x_n\}; \quad r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial \alpha}; \quad r_\beta = \frac{\partial r}{\partial \beta}$$

$$(r_\alpha r_\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_{i\alpha} x_{i\beta} - t_\alpha t_\beta\,;$$

$$r_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{i\alpha}^2 - t_\alpha^2\,, \quad r_\beta^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{i\beta}^2 - t_\beta^2$$

и поверхность задана параметрически

$$t = t(\alpha, \beta)\,, \quad x_i = x_i(\alpha, \beta) \quad (i = 1, 2, \dots n), \tag{3}$$

где α, β – произвольные параметры. Выбирая t и x_1 в качестве параметров α, β и обозначая

$$x_2(x_1,t) = \varkappa^{-1}\varphi_2(x_1,t); \ \ldots \ x_n(x_1,t) = \varkappa^{-1}\varphi_n(x_1,t), \tag{4}$$

приходим к системе полей с функцией действия (I). Поэтому уравнения движения Лагранжа-Эйлера для этой системы полей одновременно будут являться и уравнениями проблемы Плато, поскольку они возникают из принципа экстремума S. Далее, было показано, что задача о рассеянии двух плоских электромагнитных волн в электродинамике Борна-Инфельда в 4-мерном пространстве E_4^1 также сводится к проблеме Плато и найдено её точное решение /4-6/. Очевидно также, что теорию минимальных поверхностей в E_n^1 можно интерпретировать как динамику релятивистской струны или нити, предполагая, что функция действия струны пропорциональна площади её мировой поверхности /8/ и равняется (2). Обе эти интерпретации возможны, если минимальная поверхность относится к гиперболическому типу. Выражение (2) инвариантно по отношению к произвольному преобразованию параметров

$$\tilde{\alpha} = A(\alpha,\beta), \qquad \tilde{\beta} = B(\alpha,\beta) \tag{5}$$

с якобианом преобразования, отличным от нуля.

Решение задачи Плато, а, следовательно, и системы полей (I) оказывается возможным для двухмерной поверхности благодаря подходящему выбору параметров α и β. (Относительно проблемы решений для трехмерных и более высоких размерностей поверхностей, задаваемых с помощью трёх и более параметров α, β, γ, ... см. /6/).

В случае поля решение в виде (3) неудобно, так как t и x_1 являются временем и собственно координатой, через которые должны выражаться функции поля $\varphi_i(x_1, t)$, однако в работе [5] было показано, что переход от решения системы (I) в виде (3) к решению, где t, x_1 являются независимыми переменными, имеет принципиальные трудности, поскольку $x_i(x_1 t)$ $(i = 2, 3, \ldots n)$ могут быть неоднозначными функциями.

В последнее время вновь возрос интерес к системам с функцией действия (2) в связи с попытками объяснить спектр возбуждений промежуточных состояний дуальных резонансных моделей на основе квантовой теории релятивистской струны. [8,9] Мировые траектории точек струны составляют двумерную поверхность в пространстве Минковского (мировую поверхность). Физические свойства струны находят своё выражение в геометрии этой поверхности. Если функция действия струны пропорциональна площади её мировой поверхности (2), то мировая поверхность экстремальна. Таким образом, все результаты, полученные нами ранее относительно системы (2), можно применить и к динамике струны. [14]

I. Уравнения движения струны и их решение

Выражение (2) с точностью до постоянной есть функция действия струны, следовательно, плотность лагранжиана этой системы равна

$$\mathcal{L} = -\sqrt{(\tau_\alpha \cdot \tau_\beta)^2 - \tau_\alpha^2 \tau_\beta^2} \qquad (6)$$

и уравнения Лагранжиана-Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau_\beta}\right) = 0 \qquad (7)$$

определяют движения струны, а с другой стороны, как уже отмечалось, это есть уравнения минимальной поверхности в пространстве

E^1_n. Предполагается, что минимальная поверхность относится к гиперболическому типу, т.е. выполняется условие:

$$(\tau_\alpha \cdot \tau_\beta)^2 - \tau_\alpha^2 \tau_\beta^2 > 0 \qquad (8)$$

почти во всех точках поверхности. В некоторых точках это выражение может обращаться в нуль[5] (параболические точки). Только в гиперболическом случае задача Коши корректна. На геометрическом языке задача Коши состоит в отыскании экстремальной поверхности, проходящей через заданную пространственно-подобную кривую (начальное положение струны) и касающейся заданной вдоль кривой системы плоскостей.

В работе[3] показано, что условие (8) будет для решений выполняться везде, кроме особых точек, если оно выполняется на начальной кривой.

Система уравнений (7) недоопределена ввиду произвола (5) в выборе параметров α и β. Между $n+1$-уравнениями (7) имеется два алгебраических соотношения. Для выяснения этих соотношений выполним дифференцирования в (7) и получим:

$$\mathcal{D} - \frac{\Pi_\alpha}{\mathcal{L}}(\mathcal{D}\cdot\tau_\alpha) - \frac{\Pi_\beta}{\mathcal{L}}(\mathcal{D}\cdot\tau_\beta) = 0\,, \qquad (7a)$$

где

$$\mathcal{D} = \tau_\alpha^2\,\tau_{\alpha\alpha} - 2(\tau_\alpha\tau_\beta)\,\tau_{\alpha\beta} + \tau_\beta^2\,\tau_{\alpha\alpha};$$

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau_\alpha} = \frac{(\tau_\alpha\tau_\beta)\tau_\beta - \tau_\beta^2\tau_\alpha}{\mathcal{L}}; \qquad (9)$$

$$\Pi_\beta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau_\beta} = \frac{(\tau_\alpha\tau_\beta)\tau_\alpha - \tau_\alpha^2\tau_\beta}{\mathcal{L}};$$

$$\tau_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2\tau}{\partial\alpha^2}, \quad \tau_{\beta\beta} = \frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}; \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\tau}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Учитывая значения скалярных произведений векторов $\mathcal{T}_\alpha$, $\mathcal{T}_\beta$ и τ_α, τ_β,

$$(\mathcal{T}_\alpha \tau_\alpha) = \mathcal{L} \quad ; \quad (\mathcal{T}_\beta \tau_\alpha) = 0$$

$$(\mathcal{T}_\alpha \tau_\beta) = 0 \quad , \quad (\mathcal{T}_\beta \cdot \tau_\beta) = \mathcal{L}, \tag{10}$$

Находим, что проекции левой части уравнения (7а) на вектора τ_α и τ_β тождественно равны нулю, что и даёт два алгебраических соотношения между уравнениями (7а). Таким образом, лагранжиан (6) приводит только к $n-1$-независимым уравнениям для $n+1$ функций $t(\alpha,\beta), X_1(\alpha,\beta) ... X_n$, а , следовательно, такая система недоопределена. Недоопределённость, как уже отмечалось, связана с произволом в выборе параметров α и β ; если, например, за независимые переменные выбрать t и X_1, положив $\frac{\beta-\alpha}{2} = t$, $\frac{\beta+\alpha}{2} = X_1$, $X_i = \varkappa^{-1}\varphi_i(t, X_1)$, то приходим к функции действия (I) и $n-1$- независимым уравнениям для $n-1$ функций $\varphi_j(t,X_1)$ $(j = 2, 3, \ldots n)$

$$\left[1 - \sum_{i=2}^{n} \varphi_{i,t}^2\right] \varphi_{j,x_1x_1} + 2\sum_{i=2}^{n}\left(\varphi_{i,x}\varphi_{i,t}\right)\varphi_{j,x_1t} - \left[1 + \sum_{i=2}^{n}\varphi_{i,x_1}^2\right]\varphi_{j,tt} = 0,$$

т.е. к уравнениям поля системы (I). А это значит, что задача движения струны в $n+1$ -мерном мире эквивалентна нелинейной задаче $n-1$ - поля в двумерном мире (t, X_1) с функцией действия (I).

Ситуация с недоопределенностью уравнений движения возникает, как известно, в релятивистской механике материальной точки /10/. Если записать длину мировой траектории в параметрическом виде:

$$l = -\int \sqrt{-\tau_\lambda^2}\, d\lambda\, ; \quad \tau = \{t(\lambda), x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots x_n(\lambda)\}$$

где выбрать λ -произвольный параметр, то уравнения геодезической имеют вид:

$$\tau_\lambda^2\, \tau_{\lambda\lambda} - (\tau_\lambda \cdot \tau_{\lambda\lambda})\, \tau_\lambda = 0. \qquad \text{(II)}$$

Между этими уравнениями (II) существует одно алгебраическое соотношение, поскольку проекция левой части на вектор τ_λ тождественно равна нулю, и это связано с произволом в выборе параметра λ (выражение для длины l инвариантно относительно замены $\tilde{\lambda} = \Lambda(\lambda)$). Выбору в качестве α и β переменных t и x_1 в теории экстремальных поверхностей здесь отвечает выбор $\lambda = t$, что приводит к $l = -\int \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_{i\,t}^2}\, dt$ и уравнениям $x_{i,tt} = 0$. Но можно выбрать параметр λ, равный длине кривой (собственное время), тогда $\tau_\lambda^2 = 1$ и уравнения (II) доопределяются, становясь $\tau_{\lambda\lambda} = 0$ с дополнительным условием $\tau_\lambda^2 = 1$.

Аналогично этому в случае струны на параметры α и β можно наложить два дополнительных условия, доопределяющих систему (7). Такими дополнительными условиями удобно выбрать, в согласии с условием гиперболичности (8), следующие:

$$\tau_\alpha^2 = 0\,, \qquad \tau_\beta^2 = 0\,. \qquad \text{(I2)}$$

Одновременно (I2) являются уравнениями характеристик для (7) или (7а) (см. /2,3/). С учётом (I2), уравнения (7) принимают простой вид уравнений Даламбера для

$$\tau_{\alpha,\beta} = 0. \qquad \text{(I3)}$$

Дополнительные условия (I2) вместе с уравнениями (I3) не фиксируют окончательно выбора параметров α и β на поверхности – остается следующая возможность в введении новых параметров $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$

$$\tilde{\alpha} = A(\alpha), \quad \tilde{\beta} = B(\beta), \qquad \text{а также} \quad \tilde{\alpha} = \beta, \quad \tilde{\beta} = \alpha, \tag{I4}$$

где $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ – произвольные функции с единственным условием $A'(\alpha)B'(\beta) \neq 0$ x). При таких преобразованиях уравнения (I2) и (I3) не меняют своего вида.

Будем называть параметры α и β, для которых выполняются условия (I2) и (I3), изотропными (вектора $\vec{r}_\alpha$ и $\vec{r}_\beta$, согласно (I2), изотропны). Для физических приложений удобны параметры ξ и τ, которые назовём ортогональными

$$\alpha = \xi - \tau, \qquad \beta = \xi + \tau. \tag{I5}$$

Выраженная через них плотность лагранжиана (6) и условия гиперболичности (8) имеют тот же вид

$$\mathcal{L} = -\sqrt{(r_\xi r_\tau)^2 - r_\xi^2 r_\tau^2}, \tag{6a}$$

$$(r_\xi r_\tau)^2 - r_\xi^2 r_\tau^2 > 0, \tag{8a}$$

а уравнения (I2) и (I3) переходят, соответственно, в следующие

$$(r_\xi r_\tau) = 0, \quad r_\xi^2 + r_\tau^2 = 0; \tag{I2a}$$

---

x) Далее штрих у функции означает производную $A'(\alpha) = \frac{\partial A}{\partial \alpha}$

$$\tau_{\xi\xi} - \tau_{\tau\tau} = C, \tag{13a}$$

т.е. вектора τ_ξ и τ_τ ортогональны и их скалярные квадраты равны по величине и имеют противоположные знаки; если τ_τ, например, времениподобный вектор, то τ_ξ должен быть пространственноподобным.

Общим решением уравнения Д'аламбера (13) или (13a) является.

$$\tau(\alpha, \beta) = \tau_1(\alpha) + \tau_2(\beta), \tag{16}$$

где $\tau_1(\alpha)$ и $\tau_2(\beta)$ - произвольные функции, которые должны быть найдены из начальных данных и удовлетворять дополнительным условиям (12), или (12a), которые для τ_1 и τ_2 дают:

$$\tau_1'^2(\alpha) = 0; \qquad \tau_2'^2(\beta) = 0. \tag{17}$$

II. Решение общей задачи Коши

Перейдём к формулировке начальных данных в общей задаче Коши. Основываясь на геометрической интерпретации системы , мы должны поставить задачу следующим образом:

Пусть дана в параметрическом виде произвольная пространственноподобная кривая (начальное положение струны)

$$\tau = \rho(\lambda); \qquad \rho(\lambda) = \{t_0(\lambda), x_{01}(\lambda), x_{02}(\lambda), \ldots, x_{0n}(\lambda)\}. \tag{18}$$

Условие пространственной подобности означает, что

$$\rho'^2(\lambda) > 0. \tag{19}$$

Далее, пусть кривая (I8) в каждой точке снабжена касательной полоской, заданной тоже параметрически

$$d\tau = \rho'(\lambda)d\lambda + v(\lambda)d\sigma,$$

$$v(\lambda) = \{ w(\lambda),\ v_1(\lambda),\ v_2(\lambda), \dots, v_n(\lambda) \} . \qquad (20)$$

Причём эти полоски должны быть гиперболическими, т.е. должны пересекать изотропный конус $dt^2 + \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 = 0$ по двум прямым, что выражается условием

$$(\rho' v)^2 - \rho'^2 v^2 > 0 . \qquad (21)$$

Это есть условие гиперболичности для начальных данных (ср. (8) или (8а)) .

Оно же означает, что тангенциальная составляющая $v_{\parallel}$ вектора v произвольна, тогда как нормальная составляющая $v_{\perp}$ этого вектора лежит внутри светового конуса. Задача Коши состоит в том, чтобы по заданной (начальной) полоске (20) найти интегральную поверхность (решение) уравнений (I2) и (I3).

Как уже отмечалось выше, выбор параметров α и β на интегральной поверхности определён уравнениями (I2) и (I3) с точностью до преобразования (I4), поэтому можно без ограничения общности считать, что кривая (I8) $\tau = \rho(\lambda)$, через которую проходит искомая интегральная поверхность $\tau = \tau(\alpha, \beta)$ задается на этой поверхности уравнениями $\alpha = \beta = \lambda$. Действительно, если кривая (I8) определяется на поверхности уравнениями общего вида $\alpha = A(\lambda)$, $\beta = B(\lambda)$, то переходя к новым параметрам $\alpha = A(\tilde{\alpha})$, $\beta = B(\tilde{\beta})$, получим уравнение кривой в новых параметрах $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \lambda$. Подчеркнем здесь, что параметр λ на начальной кривой (I8) ничем не фиксирован. Переход от одного параметра λ к другому $\tilde{\lambda} = f(\lambda)$, где $f(\lambda)$-произвольная функция с условием $f'(\lambda) \neq 0$, сопровождается заменой параметров α, β :

$$\tilde{\alpha} = f(\alpha), \quad \tilde{\beta} = f(\beta) \tag{14a}$$

либо $$\tilde{\alpha} = f(\beta); \quad \tilde{\beta} = f(\alpha).$$

Для новых параметров начальная кривая задается также $\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}=\tilde{\lambda}$. В ортогональных параметрах (15) это записывается как $\xi=\lambda$, $\tau=c$. Таким образом, условием того, что искомая поверхность (16) проходит через заданную кривую (19), является равенство

$$\tau(\lambda,\lambda) = \tau_1(\lambda) + \tau_2(\lambda) = \rho(\lambda). \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\tau_1'(\lambda) + \tau_2'(\lambda) = \rho'(\lambda). \tag{23}$$

Обозначим разность векторов τ_1' и τ_2' через $\pi = \{\varepsilon, \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n\}$

$$\pi(\lambda) = \tau_2'(\lambda) - \tau_1'(\lambda).$$

Тогда искомое решение выразится в виде

$$\tau(\alpha,\beta) = \frac{\rho(\alpha)+\rho(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \pi(\lambda)\,d\lambda. \tag{24}$$

Для определения вектора π заметим, что $\tau_1'(\lambda)$ и $\tau_2'(\lambda)$ лежат на полоске (20), поскольку на этой полоске лежат векторы τ_α и τ_β. Следовательно, вектор π представляется в виде линейной комбинации векторов ρ' и v, задающих полоску (20):

$$\pi(\lambda) = c_1(\lambda)\rho'(\lambda) + c_2(\lambda)v(\lambda).$$

Для определения коэффициентов C_1 и C_2 воспользуемся при $\alpha=\beta=\lambda$ характеристическими уравнениями (17), которые приводят к двум уравнениям для π, а именно:

$$\pi^2(\lambda) + \rho'^2(\lambda) = 0; \quad (\pi\rho') = 0. \tag{25}$$

Подставляя сюда $\mathcal{T}$, находим C_1 и C_2

$$C_1(\lambda) = \frac{-(\rho'v)}{\pm\sqrt{(\rho'v)^2-\rho'^2v^2}}\,;\; C_2 = \frac{\rho'^2}{\pm\sqrt{(\rho'v)^2-\rho'^2v^2}}\,.$$

Положительный знак перед корнем соответствует тому, что вектор $\mathcal{T}$ направлен в будущее $\varepsilon > 0$. Выбирая этот знак, получаем для $\mathcal{T}$ выражение

$$\mathcal{T} = \frac{\rho'^2 v - (\rho'v)\rho'}{\sqrt{(\rho'v)^2-\rho'^2v^2}} = -\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{(\rho'v)^2-\rho'^2v^2}\,. \tag{26}$$

Из этого выражения видно, что если v -начальная скорость струны, то $\mathcal{T}$ - плотность её импульса. Интересно, что в выражение (26) для $\mathcal{T}$ входит только ортогональная к ρ' составляющая вектора v. В частности, если $(\rho'v)=0$ и $v^2+\rho'^2=0$, то $\mathcal{T}=v$. Как можно видеть, эти условия не противоречат условию гиперболичности (21).

Окончательно решение задачи Коши для струны запишется так:

$$\tau(\alpha,\beta) = \frac{\rho(\alpha)+\rho(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\rho'^2 v-(\rho'v)\rho'}{\sqrt{(\rho'v)^2-\rho'^2v^2}}\,. \tag{27}$$

Просто проверить, что (27) действительно удовлетворяет: а) уравнению (13), так как является суммой функций $\tau_1(\alpha)+\tau_2(\beta)$, б) уравнениям (12), так как $\tau_\alpha = \frac{\rho'(\alpha)-\mathcal{T}(\alpha)}{2}$ и $\tau_\beta = \frac{\rho'(\beta)+\mathcal{T}(\beta)}{2}$. Как из (17а), так и из (17) следует (12). Наконец, с учетом (21) можно показать, что условие гиперболичности (8) выполняется для решения (27) почти везде, кроме особых точек, исследование которых начато в работе /5/. По известной теореме /2/ это решение единственно.

III. Импульс, энергия, масса струны

В предыдущем разделе было показано, что решение задачи Коши выражается в виде (24) через плотность импульса π - струны. Остановимся подробнее на физическом смысле этой величины. $\pi(\lambda)d\lambda$ - это дифференциал $n+1$ -мерного импульса струны. Временная компонента-$\pi(\lambda)$, $\mathcal{E}(\lambda)d\lambda$ - дифференциал энергии или энергия элементарного участка струны. Масса покоя элементарного участка струны равна $dm=\sqrt{-\pi^2}d\lambda$; согласно первому из уравнений (25), она равна элементу длины $d\ell$ начальной кривой $\rho(\lambda)$:

$$dm=\sqrt{-\pi^2(\lambda)}\,d\lambda=\sqrt{\rho'^2(\lambda)}\,d\lambda=d\ell .$$

Рассмотрим теперь струну, образующую петлю (замкнутую струну). Интеграл по этой петле $P=\oint\pi(\lambda)\,d\lambda$ является её полным интегралом энергии-импульса. Временная компонента этого импульса есть полная энергия петли, её масса покоя как целого есть $\mathcal{M}=\sqrt{-P^2}$. Покажем, что полный импульс петли P сохраняется. Для этого обратимся к параметрам ξ,τ (15). В силу (12а) имеем

$$\pi(\xi,\tau)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_\tau}=z_\tau(\xi,\tau)\,;\quad P=\oint z_\tau(\xi,\tau)\,d\xi,$$

а в силу (13а)

$$\frac{dP}{d\tau}=\oint z_{\tau\tau}\,d\xi=-\oint z_{\xi\xi}\,d\xi=0\ ,$$

что и требовалось доказать.

IУ. Различные параметризации начальной кривой, время t и координата x_i как независимые параметры

Рассмотрим теперь частный случай задачи Коши, когда кривая $\tau = \rho(\lambda)$ располагается на пространственно-подобной плоскости. Преобразованием Лоренца и параллельным переносом уравнение такой плоскости можно привести к виду $t = c$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что кривая $\tau = \rho(\lambda)$ расположена в плоскости $t = 0$:

$$\rho(\lambda) = \{0, x_{01}(\lambda), x_{02}(\lambda), \ldots, x_{0n}(\lambda)\} = \{0, \vec{x}_0\}. \tag{28}$$

В решении (27) время t не является независимой переменной, а наряду с координатами x_i есть функция параметров α и β. Однако в выборе параметра λ на кривой (28) имеется произвол, благодаря которому можно выбрать временную компоненту вектора $\mathcal{T}$ равной единице, так что время t будет совпадать с параметром τ. Оказывается, что при этом параметр ξ равняется плотности энергии струны. Покажем это. Положим

$$v(\lambda) = \{1, v_1(\lambda), v_2(\lambda), \ldots, v_n(\lambda)\} = \{1, \vec{v}\}. \tag{29}$$

Следовательно, условие гиперболичности запишется теперь в виде

$$(\vec{x}_0' \vec{v})^2 + \vec{x}_0'^2 (1 - \vec{v}^2) > 0.$$

Решение (27) для выбранных таким образом начальных векторов (28) и (29) будет иметь вид

$$t(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\vec{x}_0'^{\,2}(\lambda)}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^{\,2}(1-\vec{v}^{\,2})}}\,d\lambda\,,$$

(30)

$$\vec{X}(\alpha,\beta) = \frac{\vec{x}_0(\alpha)+\vec{x}_0(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\vec{x}_0'^{\,2}\vec{v} - (\vec{x}_0'\vec{v})\vec{x}_0'(\lambda)}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^{\,2}(1-\vec{v}^{\,2})}}\,d\lambda\,.$$

Выберем на кривой (28) параметр λ так, чтобы выполнялось равенство (см. приложение)

$$\vec{x}_0'^{\,2}(\lambda) = \sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^{\,2}(1-\vec{v}^{\,2})}\,. \tag{31}$$

При этом решение (30) принимает более простой вид

$$t = \frac{\beta-\alpha}{2} = \tau\,;\quad \alpha = \xi-\tau\,;\quad \beta = \xi+\tau\,;$$

$$\vec{X}(\xi,t) = \frac{\vec{x}_0(\xi-t)+\vec{x}_0(\xi+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\vec{v} - \frac{(\vec{x}_0'\vec{v})}{\vec{x}_0'^{\,2}}\vec{x}_0'\right]d\lambda\,. \tag{32}$$

Итак, мы положили $\mathcal{E}(\lambda)=1$, а, следовательно, плотность импульса

$$\vec{\mathcal{P}}(\lambda) = \vec{v}(\lambda) - \frac{(\vec{x}_0'\vec{v})}{\vec{x}_0'^{\,2}}\vec{x}_0'(\lambda)\,. \tag{33}$$

Очевидно, что $(\vec{\mathcal{P}}\vec{x}_0') = 0$, а согласно (31) $\vec{\mathcal{P}}^{\,2} + \vec{x}_0'^{\,2} = 1$ и, следовательно, наш параметр удовлетворяет условию $\vec{x}_0'^{\,2}(\lambda) < 1$. Условие (31) можно учесть автоматически, полагая

$$\vec{v}(\lambda) = \vec{u}(\lambda)\sqrt{\frac{\vec{x}_0'^{\,2}(1-\vec{x}_0'^{\,2})}{\vec{x}_0'^{\,2}\vec{u}^{\,2} - (\vec{x}_0'\vec{u})^2}}\,,$$

так что вместо (32) будем иметь теперь решение

$$\vec{X}(\xi,t)=\frac{\vec{X}_0(\xi-t)+\vec{X}_0(\xi+t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi-t}^{\xi+t}\sqrt{\frac{1-\vec{X}_0'^2}{\vec{X}_0'^2}}\;\frac{\vec{X}_0'^2\vec{u}-(\vec{X}_0'\vec{u})\vec{X}_0'}{\sqrt{\vec{X}_0'^2\vec{u}^2-(\vec{X}_0'\vec{u})^2}}\,d\lambda, \tag{34}$$

где $\vec{u}(\lambda)$ – новая начальная скорость, удовлетворяющая только условию $\vec{X}_0'^2\vec{u}^2-(\vec{X}_0'\vec{u})^2>0$. Исходя из решения (32) или (34), легко проверить, что выполняются равенства

$$(\vec{X}_\xi\vec{X}_t)=0\;;\qquad \vec{X}_\xi^2+X_t^2=1. \tag{12б}$$

Это частный случай соотношений (12а), когда $t=\tau$.

Чтобы выяснить физический смысл параметра ξ в решении (33), обратимся к каноническому формализму для нашей системы (6), когда $t=\tau$. Функция Лагранжа теперь имеет вид

$$\mathcal{L}=-\sqrt{(\vec{X}_\xi\vec{X}_t)^2+\vec{X}_\xi^2(1-\vec{X}_t^2)}\;.$$

Канонически сопряженные с координатами $\vec{X}$ импульсы $\vec{\pi}$ будут равняться

$$\vec{\pi}(\xi,t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{X}_t}=\frac{(\vec{X}_\xi\vec{X}_t)\vec{X}_\xi-\vec{X}_\xi^2\vec{X}_t}{\mathcal{L}}\;. \tag{35}$$

Вместо (10) теперь выполняются равенства

$$(\vec{\pi}\cdot\vec{X}_\xi)=0\;;\;(\vec{\pi}\vec{X}_t)=\mathcal{L}-\frac{\vec{X}_\xi^2}{\mathcal{L}}\;;\;\vec{\pi}^2=\left(\frac{\vec{X}_\xi^2}{\mathcal{L}}\right)^2-\vec{X}_\xi^2\;. \tag{10а}$$

Это позволяет найти функцию гамильтона. Из второго равенства получаем

$$\mathcal{E}=H(\xi,t)=(\vec{\pi}\vec{X}_t)-\mathcal{L}=\frac{\vec{X}_\xi^2}{\sqrt{(\vec{X}_\xi\vec{X}_t)^2+\vec{X}_\xi^2(1-\vec{X}_t^2)}}\,, \tag{36}$$

а из третьего равенства (I0a) находим

$$H(\tau,t)=\sqrt{\vec{\pi}^2(\tau,t)+\vec{X}_\tau^2(\tau,t)}=\mathcal{E}(\tau,t).$$

Из (I2б), (35) и (36) следует, что плотность импульса $\vec{\pi}$ и плотность энергии $\mathcal{E}$ равны

$$\vec{\pi}(\tau,t)=\dot{\vec{X}}_t(\tau,t)\ ;\quad \mathcal{E}(\tau,t)=1\ .$$

А так как $\mathcal{E}\,d\tau=dE$, где E – энергия струны, то $d\tau=dE$. В частности, при $t=0$, как легко видеть из (32), $d\lambda=dE$. Следовательно, и $d\lambda$ есть дифференциал энергии струны в начальный момент времени. Назовём такой параметр λ энергетическим параметром.

Отметим ещё, что если начальная скорость струны $\vec{v}$ в каждой точке струны ортогональна к струне, то из (33) следует $\vec{\pi}=\vec{v}$, а из (3I) получаем второе условие на скорость

$$(\vec{X}_0'\,\vec{v})=0\ ;\qquad \vec{X}_0'^2(\lambda)+\vec{v}^2(\lambda)=1\ . \tag{3Ia}$$

В этом случае решение (32) принимает простой вид

$$\vec{X}(\tau,t)=\frac{\vec{X}_0(\tau-t)+\vec{X}_0(\tau+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{\tau-t}^{\tau+t}\vec{v}(\lambda)\,d\lambda\ . \tag{32a}$$

Уже отмечалось, что в определение $\mathcal{T}\ell$ (26) входит только перпендикулярная составляющая начальной скорости $\vec{v}_\perp$, ограниченная условием $\vec{X}_0'^2+\vec{v}_\perp^2=1$, продольная составляющая $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{X}_0'$ ничем не ограничена и ведёт к движению струны вдоль самой себя с произвольной скоростью. Такое движение не меняет мировой поверхности струны, если струна бесконечной длины или замкнута (см. ниже примеры движения струны).

Другой физически интересный параметр λ на начальной кривой (28) – это длина кривой ℓ (натуральный параметр). В этом случае $\vec{X}_0'^2(\lambda)=1$

и, если $\vec{v}$ выбрана так же, как в (29), из (30) получем решение

$$t(\gamma,\tau) = \frac{1}{2}\int_{\gamma-\tau}^{\gamma+\tau} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2+1-\vec{v}^2}},$$

$$\vec{X}(\gamma,\tau) = \frac{\vec{x}_0(\gamma-\tau)+\vec{x}_0(\gamma+\tau)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\gamma-\tau}^{\gamma+\tau} \frac{\vec{v}-(\vec{x}_0'\vec{v})\vec{x}_0'}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2+1-\vec{v}^2}}. \quad (37)$$

Такая параметризация, по-видимому, поможет корректно рассмотреть задачи о движении струны конечной длины. Натуральный параметр возникает сам собой при рассмотрении движения струны из состояния покоя, т.е. когда в (29) $\vec{v}=0$ и начальное положение струны задаётся, как в (28). В этом случае, согласно (26), $\vec{\mathcal{T}} = 0$, а $\mathcal{E} = \sqrt{\vec{x}_0'^{\,2}(\lambda)} = \frac{d\ell}{d\lambda}$. Следовательно, решение (24) даёт

$$t = \frac{\ell(\beta)-\ell(\alpha)}{2}; \quad \vec{X}(\alpha,\beta) = \frac{\vec{x}_0(\alpha)+\vec{x}_0(\beta)}{2}. \quad (38)$$

В частности, если за параметр λ выбрать длину $\ell(\lambda)=\lambda$, то $t=\beta-\alpha=\tau$ и

$$\vec{X}(\gamma,t) = \frac{\vec{x}_0(\gamma-t)+\vec{x}_0(\gamma+t)}{2}.$$

Это же следует и из (37), если там положить $\vec{v}=0$.

Ещё один интересный параметр на начальной кривой (28) – декартова координата, например, x_1, так что $x_{01}(\lambda)=\lambda$. При таком выборе параметра будем иметь (см. (28) и (29))

$$\vec{x}_0'^{\,2} = 1+\sum_{i=2}^{n} x_{0i}'^{\,2}; \quad (\vec{x}_0'\vec{v}) = v_1 + \sum_{i=2}^{n}(x_{0i}' v_i);$$

$$\vec{v}^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 1$$

и, следовательно, решение (27), расписанное для компонент вектора X, теперь имеет вид

$$t(\xi,\tau)=\frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\Big(1+\sum_{i=2}^{n}x_{0i}'^{2}\Big)K^{-1}(\lambda)\,d\lambda$$

$$X_1(\xi,\tau)=\xi+\frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\Big(v_1\sum_{i=2}^{n}x_{0i}'^{2}-\sum_{i=2}^{n}x_{0i}'v_i\Big)K^{-1}(\lambda)\,d\lambda \tag{39}$$

$$X_j(\xi,\tau)=\frac{X_{0j}(\xi-\tau)+X_{0j}(\xi+\tau)}{2}+\frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\Big[v_j\Big(1+\sum_{i=2}^{n}x_{0i}'^{2}\Big)-\Big(v_1+\sum_{i=2}^{n}x_{0i}'v_i\Big)x_{0j}'\Big]\frac{d\lambda}{K(\lambda)}$$

где $(j=2,3,\ldots,n)$

$$K(\lambda)=\sqrt{\Big(v_1+\sum_{i=2}^{n}x_{0i}'v_i\Big)^2+\Big(1+\sum_{i=2}^{n}x_{0i}'^{2}\Big)\Big(1-\sum_{i=2}^{n}v_i^2\Big)}\,.$$

Решение (39) при $v_1=0$ было получено в работе /I/ в качестве решения задачи Коши для полевой системы с функцией действия (I), там же было показано, что $\mathcal{E}$ в (39) при $v_1=0$ есть плотность энергии H этой системы в начальный момент $t=0$, когда параметр λ совпадает с координатой X_1. Далее $\mathcal{T}_1$ при $v_1=0$ есть начальный импульс P системы полей (I), а остальные компоненты $\mathcal{T}_j$ $(j=2,3,\ldots n)$ – канонические импульсы полей φ_j.

V. Некоторые примеры движения струны

Рассмотрим ряд примеров движения релятивистской струны (далее обозначаем пространственные координаты X_1, X_2, X_3 через x,y,z). Первый пример – это струна, свернутая в окружность радиуса R и покоящаяся в начальный момент в плоскости x, y. Параметрическое задание начального положения $\rho(\lambda)$ следующее:

$$x_0(\lambda)=R\cos\frac{\lambda}{R}\,,\qquad y_0(\lambda)=R\sin\frac{\lambda}{R}\,. \tag{40}$$

За λ выбрана длина кривой $\rho'^2=x_0'^2+y_0'^2=1$, а так как начальные скорости равны нулю $\vec{v}=0$, то выполнено одновременно и соотношение (3I) и (3Ia), следовательно, λ является и энергетическим параметром. Согласно (32а) или (37), имеем решение

$$X(\xi,t) = \frac{X_0(\xi-t)+X_0(\xi+t)}{2} = R\cos\frac{t}{R}\cos\frac{\xi}{R}$$

$$Y(\xi,t) = \frac{Y_0(\xi-t)+Y_0(\xi+t)}{2} = R\cdot\cos\frac{t}{R}\cdot\sin\frac{\xi}{R} \quad . \qquad (4I)$$

Из (4I) видно, что начальная окружность (40) с течением времени меняет свой радиус по закону $R\cos\frac{t}{R}$, оставаясь в плоскости X, Y, т.е. пульсирует с периодом πR. Так как в начальный момент импульс $\pi(\lambda)$ имеет компоненты $\{1, 0, 0, \dots 0\}$, то полный импульс P петли $P = \oint \pi(\lambda) d\lambda = \{2\pi R, 0, 0 \dots 0\}$, отсюда масса покоя петли как целого равняется $M = \sqrt{-P^2} = 2\pi R$. Далее, масса покоя в начальный момент $t=0$ элементарного участка петли $dm = \sqrt{-\pi^2}d\lambda = d\lambda$, так как $\pi^2 = -p'^2 = -1$, а в произвольный момент импульс $\pi(\xi, t)$ имеет компоненты $\{1, \sin\frac{t}{R}\cos\frac{\xi}{R}, -\sin\frac{t}{R}\sin\frac{\xi}{R}\}$ и, следовательно, $dm = \sqrt{-\pi^2}d\xi = \cos\frac{t}{R}d\xi$, т.е. меняется, как длина элементарного участка окружности, у которой радиус зависит от времени $R\cos\frac{t}{R}$. Таким образом, сумма покоя элементарных участков петли зависит от времени:

$$m = \oint \cos\frac{t}{R}d\xi = 2\pi R\cos\frac{t}{R}$$

и оказывается равной нулю при $t = (n+\frac{1}{2})\pi R$; именно в эти времена радиус петли $R\cos\frac{t}{R}$ равен нулю, а скорости элементов петли становятся световыми.

Масса же покоя петли как целого в любой момент постоянна, так как

$$P = \oint \pi(\xi,t)d\xi = \{2\pi R, 0, 0\}.$$

$$M = \sqrt{-P^2} = 2\pi R.$$

Рассмотрим теперь внутренние силы, заставляющие петлю пульсировать. Определим силу f как вторую производную от координаты $f = \frac{d^2 X}{d\gamma^2}$, где γ – собственное время элемента струны. Как показано в работах[II,I2], для частицы с переменной массой в качестве $d\gamma$ удобно брать не дифференциал длины мировой траектории $d\ell$, а величину $d\gamma = d\ell/\mu$, так что $\frac{dX}{d\gamma} = \mathcal{T}$, где $\mathcal{T}$ – импульс частицы, а не 4-скорость. Это различие между $d\gamma$ и $d\ell$ весьма существенно, когда масса частицы μ или масса элемента длины струны dm переменна. Так как в рассматриваемом случае $\mathcal{T} = \{1; -\sin\frac{t}{R}\cos\frac{T}{R}; -\sin\frac{t}{R}\sin\frac{T}{R}\}$, то $\frac{dt}{d\gamma} = \varepsilon = 1$, то $\gamma = t$. Следовательно, дифференцируя (41) по t, получаем силу $f = \{0, -\frac{x}{R^2}, -\frac{y}{R^2}\}$, которая направлена к центру круга, лежит в плоскости $t = const$ и имеет абсолютное значение

$$f = (\cos\frac{t}{R})\cdot 1/R.$$

Отметим аналогию между поведением струны, свернутой в круг, и развитием во времени вселенной в известной модели Фридмана[I3].

Пульсирующее решение получается и для струны, расположенной в пространстве x, y, z в начальный момент времени в виде винтовой линии вдоль оси z радиусом R и с расстоянием между витками $2\pi b$. Параметрическое задание такой кривой следующее

$$x_0(\lambda) = R\cos\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+b^2}};\ y_0(\lambda) = R\sin\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+b^2}};\ z_0(\lambda) = b\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+b^2}},$$

(λ – есть длина, так как опять выполняется $x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2=1$), полагая начальные скорости $V_i = 0$ $(i=1,2,3)$, находим из (37) поведение такой струны со временем

$$X(\xi,t)=\frac{x_0(\xi+t)+x_0(\xi-t)}{2}=R\cos\left(\frac{t}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$$

$$Y(\xi,t)=\frac{y_0(\xi+t)+y_0(\xi-t)}{2}=R\cos\left(\frac{t}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)\sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{R^2+b^2}}\right)$$

$$Z(\xi,t)=\frac{z_0(\xi+t)+z_0(\xi-t)}{2}=b\cdot\frac{\xi}{\sqrt{R^2+b^2}}.$$

Отсюда видно, что радиус винтовой линии меняется со временем, как и у окружности в предыдущем примере, а сама она остаётся вытянутой по оси Z с неизменным расстоянием между витками $2\pi b$, т.е. сжимается и разжимается около Z по закону

$$R(t)=R\cos\left(t/\sqrt{R^2+b^2}\right).$$

Рассмотрим эти же примеры, когда у струны есть начальные скорости $\vec{v}\neq 0$. Выберем λ и v так, чтобы выполнялось условие (31а) и решение давалось формулой (32а).

Итак, рассмотрим струну в виде окружности радиуса R в плоскости X, Y

$$x_0(\lambda)=R\cos\frac{\lambda}{A}, \qquad y_0(\lambda)=R\sin\frac{\lambda}{A}.$$

Выбирая $A>R$, при этом λ уже не длина, так как $x_0'^2+y_0'^2=R^2/A^2\neq 1$. Введём начальные скорости $\vec{v}$ двух направлений от центра и внутрь круга

$$v_1=\pm\frac{\sqrt{A^2-R^2}}{A}\cos\frac{\lambda}{A}; \quad v_2(\lambda)=\pm\frac{\sqrt{A^2-R^2}}{A}\sin\frac{\lambda}{A},$$

для которых выполняются условия (31а) и, следовательно, решение (32а) даёт

$$x(\zeta,t) = R\cos\frac{t}{A}\cos\frac{\zeta}{A} \pm \sqrt{A^2-R^2}\,\sin\frac{t}{A}\cos\frac{\zeta}{A} = A\cos\left(\frac{t}{A}\mp\delta\right)\cos\frac{\zeta}{A}$$

$$y(\zeta,t) = R\cos\frac{t}{A}\sin\frac{\zeta}{A} \pm \sqrt{A^2-R^2}\,\sin\frac{t}{A}\sin\frac{\zeta}{A} = A\cos\left(\frac{t}{A}\mp\delta\right)\sin\frac{\zeta}{A}$$

$$\delta = \arccos(R/A) .$$

Из сравнения этого решения с решением для круга без начальных [illegible] (41) видим, что теперь радиус меняется по закону [illegible], т.е. круг радиуса A начинает расширяться [illegible] если начальные скорости направлены от центра [illegible] пульсирует от 0 до A [illegible] сразу умень- [illegible] скорости направлены внутрь, [illegible] тоже пульсирует [illegible] скорости $|\vec{v}| = |\sin(\frac{t}{A} \mp\delta)|$. [illegible] видеть, что [illegible] в первом и втором примерах приводят к одному [illegible] струны.

[illegible] в [illegible], но [illegible] те [illegible]

$$x_0(\zeta) = R\cos\left(\frac{b\zeta}{R^2+b^2}\right);\; y_0(\zeta) = R\sin\left(\frac{b\zeta}{R^2+b^2}\right);\; z_0(\zeta) = \frac{b\zeta}{R^2+b^2}$$ [illegible]

$$[illegible]\;\frac{Rb}{R^2+b^2}\sin\left(\frac{b\zeta}{R^2+b^2}\right);\; [illegible] = -\frac{Rb}{R^2+b^2}\cos\left(\frac{b\zeta}{R^2+b^2}\right);\; v_z = \frac{R^2}{R^2+b^2},$$

для которых выполняются условия (31а). Решение (32а) даёт

$$x(\zeta,t) = R\cos\left(\frac{b(\zeta-t)}{R^2+b^2}\right),\quad y(\zeta,t) = R\sin\left(\frac{b(\zeta-t)}{R^2+b^2}\right)$$

$$z(\zeta,t) = \frac{b^2\zeta + R^2 t}{R^2+b^2} .$$

Исключая отсюда ζ, находим уравнение мировой поверхности струны в виде : $x = k\cos\left(\frac{z-t}{b}\right)$; $y = k\sin\left(\frac{z-t}{b}\right)$.

Перейдём к следующему примеру. Пусть при $t=0$ струна совпадает с осью x, а её скорости направлены по оси y и равняются $v_2 = th\,x$. Применяя формулу (39), где в данном случае $K^{-1}(\lambda) = ch\,\lambda$, находим решение

$$t = \frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} ch\,\lambda\, d\lambda = sh\,\tau \cdot ch\,\xi\,; \quad x = \xi$$

$$y = \frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} sh\,\lambda\, d\lambda = sh\,\tau \cdot sh\,\xi\,.$$

Следовательно, мировая поверхность струны есть $y = t \cdot th\,x$, откуда видно, что все точки струны движутся с постоянной начальной скоростью $v = th\,x$ и струна не проявляет никаких свойств упругости.

В качестве ещё одного примера рассмотрим движение цепной линии из состояния покоя. Так как при $t=0$, $\vec{v}=c$, воспользуемся формулой (38). Длина на цепной линии $y = ch\,x$ находится просто:

$$\ell(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = sh\,x\,.$$

Следовательно,

$$t = \frac{sh(\xi+\tau) - sh(\xi-\tau)}{2}\,, \quad x = \xi\,, \quad y = \frac{ch(\xi+\tau) + ch(\xi-\tau)}{2}\,,$$

откуда окончательно решение выражается через τ и x:

$$t = sh\,\tau\, ch\,x\,, \qquad y = ch\,\tau\, ch\,x\,. \qquad (42)$$

То же самое получается и из формулы (39). Из (42) получаем следующее уравнение мировой поверхности струны:

$$y(x,t) = \sqrt{t^2 + ch^2 x}.$$

Таким образом, струна, выгнутая в начальный момент в виде цепной линии, выпрямляется со скоростью $v = \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + ch^2 x}}$; центр цепной линии $x = 0$ движется со скоростью $v_{max} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, стремящейся при $t \to \infty$ к скорости света 1.

Если рассмотреть задачу, обычно решаемую в теории линейной струны, когда она лежит вдоль x и имеет в одном месте в начальный момент горб ширины a и высоты b, то в релятивистской струне такое возмущение будет тоже распространяться по струне в обе стороны, но со скоростью, зависящей от формы горба (для треугольного горба $|v| = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введём новые параметры $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ согласно (I4а) следующим образом

$$\tilde{\alpha} = f(\alpha) = \int_a^\alpha \frac{\vec{x}_0'^2(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^2(1-\vec{v}^2)}}\,; \quad \tilde{\beta} = f(\beta). \tag{IП}$$

a – произвольная константа. При этом новые ортогональные параметры $\tilde{\xi} = \frac{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}{2}$ и $\tilde{\tau} = \frac{\tilde{\beta}-\tilde{\alpha}}{2}$ выразятся через старые так:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\vec{x}_0'^2(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^2(1-\vec{v}^2)}}$$

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{2}\left(\int_a^\alpha + \int_a^\beta\right) \frac{\vec{x}_0'^2(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^2(1-\vec{v}^2)}}\,. \tag{2П}$$

Сравнивая выражения для τ в (2П) с t в (30), видим, что $t = \tilde{\tau}$. Теперь нам надо выразить $\vec{x}(\alpha,\beta)$ через новые параметры $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ или $\tilde{\xi}$ и t, для этого введём новую переменную интегрирования

$$\sigma = f(\lambda) = \int_a^\lambda \frac{\vec{x}_0'^2(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^2(1-\vec{v}^2)}}\,,$$

с помощью которой (30) с учётом (IП) представляется следующим образом: $\left(d\lambda = \frac{\sqrt{(\vec{x}_0'\vec{v})^2 + \vec{x}_0'^2(1-\vec{v}^2)}}{\vec{x}_0'^2}\,d\sigma\right)$

$$t = \tilde{\tau}$$

$$\vec{x}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = \frac{\vec{x}_0(\alpha(\tilde{\alpha})) + \vec{x}_0(\beta(\tilde{\beta}))}{2} + \frac{1}{2}\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \left[\vec{v}(\lambda) - \frac{(\vec{x}_0'\vec{v})}{\vec{x}_0'^2(\lambda)}\right] d\sigma.$$

Полагая $\vec{X}_0(\lambda(\sigma)) = \vec{x}_0(\sigma)$, $\vec{v}(\lambda(\sigma)) = \vec{V}(\sigma)$ и учитывая, что $\vec{v}(\lambda) - \frac{(\vec{X}_0'\vec{v})}{X_0'^2} = \vec{V}(\sigma) - \frac{(\vec{x}_0'\vec{V})}{x_0'^2}$, получаем (32). Соотношение (31) при этом будет следовать для $\vec{x}_0(\sigma)$ и $\vec{V}(\sigma)$ из связи между λ и σ.

Литература:

I. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. ЖЭТФ, т. 50, I296, (I966).

2. Ф.Курант, Д. Гильберт. "Методы мат. физики" т. 2,Гостехиздат (I95I).

В. Бляшке. "Введение в дифференциальную геометрию",ГИТТЛ, Москва (I957).

3. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ Р-2I5I, Дубна, (I965).

4. B.M.Barbashov, N.A.Chernikov, Commun.Math.Phys. 3,313 (1966).

5. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. ЖЭТФ, 5I, 658 (I966).

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. Труды межд. школы по теоретической физике".(Ялта,I966). Киев,Наукова думка,I967.

6. Б.М. Барбашов. Автореферат диссертации 2-38I5 ОИЯИ, Дубна, (I968).

7. M.Born, L.Infeld, Proc.Roy.Soc. A144, 425 (1934).

8. Y.Nambu, Proc.Intern.Conf . On Symmetric and Quark Models, Wayne State University (1969).

9. P.Goddard, J.Goldstone, C.Rebbi, C.Thorn. Nuclear Physics B56, 109 (1973).

IO. B.Zumino. Preprint CERN TH 1779 (1973).

II. Н.А. Черников. НДВШ Физ-мат.науки № 2, I58 (I958).

I2. N.A.Chernikov. Acta Physica Polonica, v.XXIII, 629 (1963).

I3. A.A.Fridmann. Zs.für Physik, 11, 377 (1922).

14. H.C.Tze. Preprint Niels Bohr Inst., DK 2100, NBI-HE-73.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 апреля I974 года.