ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7829

А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7829

А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

Направлено в ТМФ

Уравнения электродинамики, как это принято в современных изложениях теории поля, описывают совместное поведение электромагнитного и электронно-позитронного полей. На общий случай римановой геометрии пространственно-временного мира уравнения электродинамики были обобщены в 1929 году В.Фоком /1/. Мы излагаем здесь результаты Фока, опираясь на теорию спиноров Э.Картана /2/.

Среди римановых миров несомненный интерес представляют оба мира де Ситтера, поскольку они, наряду с плоским миром, допускают 10-параметрическую группу изометрий. В связи с этим обстоятельством изучение уравнений атомной физики в мирах де Ситтера было начато в 1935 году П.Дираком /3/. Мы рассматриваем здесь особо один из миров де Ситтера, а именно, сферический мир. Сферический мир можно представить в виде однополостного гиперболоида в 5-мерном пространстве. На своеобразную геометрию однополостного гиперболоида указывал еще в 1887 году А.Пуанкаре /4/.

В сферическом мире та или иная физическая система оказывается как бы помещенной в сферический ящик. Таким образом, мы приходим к новому методу изучения явлений в плоском мире - методу инвариантного ящика. К искусственному приему помещения изучаемой системы в кубический ящик нередно прибегают для того, чтобы от операторов с непрерывным спектром перейти к операторам с дискретным спектром. При этом ввиду условий периодичности, накладываемых на полевые функции, имеют дело с 3-мерным тором, локальная геометрия которого остается евклидовой. Весь же мир оказывается прямым произведением этого тора на временную ось. Такой мир допускает всего лишь 4-параметрическую группу изометрий. В методе же инвариантного ящика группа изометрий, как уже говорилось, имеет десять параметров. Можно надеяться, что такой, инвариантный, метод помещения системы в ящик позволит получить новые результаты. Отметим, наконец, что метод инвариантного ящика в квантовой теории скалярного и спинорного полей был выдвинут в работах /5,6,7/.

1. Уравнение Дирака

Уравнение Дирака для спинорного поля ψ в римановом мире имеет вид /1,2,8,9/

$$H^{\nu}(i\hbar D_{\nu} + \frac{e}{c} A_{\nu})\psi + mcH^{4}\psi = 0, \qquad /1/$$

где m - масса, e - заряд электрона, c - скорость света, $\hbar$ - постоянная Планка, A_{ν} - векторный потенциал электромагнитного поля. Спинорное и электромагнитное поля отнесены к ортонормированному базису ϵ /и дуальному базису f / /6,7/. Символ D_{ν} означает ковариантную производную. Для спинорного поля ψ

$$\psi_{\nu} = D_{\nu}\psi = e_{\nu}\psi + \Omega_{\nu}\psi, \qquad /2/$$

где e_{ν} - базисные векторные поля, Ω_{ν} - спинорная связность

$$\Omega_{\nu} = \frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta\nu} H^{\alpha} H^{\beta}, \qquad /3/$$

$\omega_{\alpha\beta\nu}$ - коэффициенты вращения базиса e /коэффициенты связности в этом базисе/, H - матрицы Дирака, удовлетворяющие условиям

$$H_a H_b + H_b H_a = 2\eta_{ab}, \quad H_0 H_1 H_2 H_3 H_4 = i, \qquad /4/$$

η_{ab} - тензор, задаваемый квадратичной формой

$$\eta_{ab} f^a f^b = -(f^0)^2 + (f^1)^2 + (f^2)^2 + (f^3)^2 + (f^4)^2.$$

С помощью η_{ab} и обратного к нему тензора η^{ab} опускаются и поднимаются индексы, так $H^a = \eta^{ab} H_b$. Греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, латинские - от 0 до 4.

Из /4/ следует, что любая квадратная матрица K четвертого порядка разлагается в сумму скалярной, векторной, бивекторной, 3-векторной и 4-векторной матриц:

$$K = \underset{(0)}{K} + \underset{(1)}{K}{}^{\alpha} H_{\alpha} + \frac{1}{2}\underset{(2)}{K}{}^{\alpha\beta}[H_{\alpha} H_{\beta}] +$$

$$+ \frac{1}{6}\underset{(3)}{K}{}^{\alpha\beta\mu}[H_{\alpha} H_{\beta} H_{\mu}] + \frac{1}{24}\underset{(4)}{K}{}^{\alpha\beta\mu\nu}[H_{\alpha} H_{\beta} H_{\mu} H_{\nu}],$$

где $\underset{(0)}{K}$ - скаляр, $\underset{(1)}{K}{}^{\alpha}$ - вектор, $\underset{(2)}{K}{}^{\alpha\beta}$ - бивектор и т.д., квадратные скобки означают альтернированное произведение матриц. Фактически мы имеем дело с алгеброй Клиффорда. H_{α} являются генераторами алгебры Клиффорда. Квадратную матрицу K четвертого порядка можно представить в виде суммы скалярной, векторной и бивекторной матриц в 5-мерном пространстве:

$$K = \underset{(0)}{K} + \underset{(1)}{K}{}^{a} H_a + \frac{1}{2}\underset{(2)}{K}{}^{ab}[H_a H_b].$$

Нам потребуются вытекающие из /4/ свойства матриц H

$$H^a[H^p H^q] = [H^a H^p H^q] + \eta^{ap} H^q - \eta^{aq} H^p \qquad /5/$$

$$[H^a H^b][H^p H^q] - [H^p H^q][H^a H^b] = 2\eta^{bp}[H^a H^q] - \qquad /6/$$

$$- 2\eta^{ap}[H^b H^q] + 2\eta^{bq}[H^p H^a] - 2\eta^{aq}[H^p H^b].$$

Сопряженный спинор $\bar{\psi} = \psi^* H_0$ удовлетворяет уравнению

$$-i\hbar\bar\psi_\nu H^\nu + \frac{e}{c}\bar\psi H^\nu A_\nu + mc\bar\psi H^4 = 0, \qquad /7/$$

где

$$\bar\psi_\nu = D_\nu\bar\psi = e_\nu\bar\psi - \bar\psi\,\Omega_\nu. \qquad /8/$$

Из /1/ и /7/ следует, что дивергенция вектора тока J равняется нулю:

$$J^\beta = e\bar\psi H^\beta\psi, \qquad D_\beta J^\beta = 0. \qquad /9/$$

2. *Уравнения Максвелла*

В общем случае римановых миров уравнения Максвелла в любом ортогональном базисе записываются в виде

$$D_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta \qquad /10/$$

$$D_\alpha F_{\beta\mu} + D_\beta F_{\mu\alpha} + D_\mu F_{\alpha\beta} = 0, \qquad /11/$$

где J^β - вектор тока /9/,

$$D_\mu F^{\alpha\beta} = e_\mu F^{\alpha\beta} + \omega^\alpha_{\mu\nu} F^{\nu\beta} + \omega^\beta_{\mu\nu} F^{\alpha\nu}$$

$$D_\mu F_{\alpha\beta} = e_\mu F_{\alpha\beta} - \omega^\nu_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \omega^\nu_{\mu\beta} F_{\alpha\nu}$$

- ковариантные производные бивектора электромагнитного поля F.

Векторный потенциал A_α, входящий в уравнение Дирака, определяется так, чтобы автоматически удовлетворялись уравнения /11/:

$$F_{\alpha\beta} = D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha. \qquad /12/$$

Так как

$$D^\alpha D_\beta A_\alpha = D_\beta D^\alpha A_\alpha - R^\alpha_\beta A_\alpha,$$

где R^α_β - тензор Риччи, то согласно /10/

$$\Box A_\beta + R^\alpha_\beta A_\alpha - D_\beta(D_\alpha A^\alpha) = J_\beta. \qquad /13/$$

Здесь $\Box = \eta^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta$. Принимая условие Лоренца

$$D_\alpha A^\alpha = 0, \qquad /14/$$

получаем

$$\Box A_\beta + R^\alpha_\beta A_\alpha = J_\beta. \qquad /15/$$

В сферическом мире тензор Риччи равняется

$$R^\alpha_\beta = -\frac{3}{r^2}\,\delta^\alpha_\beta. \qquad /16/$$

Условие Лоренца совместно с системой уравнений /1/, /15/. Действительно, для любого векторного поля A_α выполняется тождество

$$\Box(D^\alpha A_\alpha) = D^\beta(\Box A_\beta + R^\alpha_\beta A_\alpha).$$

В силу уравнений /15/ и следствия /9/ из уравнения /1/ находим, что

$$\Box(D_\alpha A^\alpha) = 0. \qquad /17/$$

Пусть теперь выбрана некоторая пространственно-подобная гиперповерхность Σ, разделяющая мир на две части - прошедшее и будущее / поверхность Коши/. На такой гиперповерхности условия Коши можно выбирать произвольно. Полагая на Σ дивергенцию $D_\alpha A^\alpha$ и нормальную к Σ производную от дивергенции равными нулю, находим, что в силу уравнения /17/ условие Лоренца выполняется во всем четырехмерном мире.

Векторный потенциал определяется условием /12/ с точностью до градиента от произвольной скалярной функции ϕ. Условие Лоренца лишь в некоторой мере ограничивает этот произвол: функция ϕ должна подчиняться уравнению $\Box\phi = 0$. В согласии с этим находится калибровочная инвариантность системы уравнений Максвелла-Дирака: если A_β, ψ - решение системы уравнений /1/, /13/ , то и

$$A'_\beta = A_\beta + D_\beta \phi, \qquad \psi' = \psi \exp\left\{ \frac{ie}{hc} \phi \right\}$$

решение той же системы. То же самое можно сказать и о системе /1/, /15/, но только, если $\Box\phi = 0$.

3. Спинорная форма уравнений Максвелла

При исследовании уравнений /10/, /11/ весьма удобной оказывается спинорная форма этих уравнений, предложенная в /10,11/, а именно:

$$H^\nu D_\nu F = J, \qquad /18/$$

где $J = H^\alpha J_\alpha$ - векторная, $F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} H^\alpha H^\beta$- бивекторная матрицы, D_ν- ковариантная производная, действие которой на любой элемент K /в том числе и на бивекторный элемент F / алгебры Клиффорда определяется через спинорную связность /3/ следующим образом:

$$D_\nu K = e_\nu K + \Omega_\nu K - K \Omega_\nu. \qquad /19/$$

Спинорная форма уравнений Максвелла выявляет глубокую роль алгебры Клиффорда в электродинамике и позволяет применить к уравнениям Максвелла спинорную технику, развитую для уравнений Дирака.

Докажем, что уравнение /18/ эквивалентно паре уравнений /10/, /11/. Действительно, согласно /5/,

$$H^\alpha e_\alpha F = e_\alpha F^{\alpha\beta} H_\beta + \frac{1}{6}(e_\alpha F_{\beta\mu} + e_\beta F_{\mu\alpha} + e_\mu F_{\alpha\beta}) \times$$
$$\times [H^\alpha H^\beta H^\mu],$$

а согласно /6/,

$$\Omega_\nu F - F \Omega_\nu = \omega^\mu_{\nu\alpha} F^{\alpha\beta} [H_\mu H_\beta].$$

Снова применяя формулу /5/, получаем

$$H^\nu (\Omega_\nu F - F \Omega_\nu) = \omega^\alpha_{\alpha\nu} F^{\nu\beta} H_\beta - \omega^\alpha_{\beta\nu} F^{\nu\beta} H_\alpha - \omega^\alpha_{\beta\mu} \times$$
$$\times F_{\alpha\nu} [H^\beta H^\mu H^\nu].$$

Объединяя оба результата, находим

$$H^\nu D_\nu F = (D_\alpha F^{\alpha\beta}) H_\beta + \frac{1}{6}(D_\alpha F_{\beta\mu} + D_\beta F_{\mu\alpha} + D_\mu F_{\alpha\beta}) \times$$
$$\times [H^\alpha H^\beta H^\mu].$$

Так как векторный и тривекторный элементы алгебры Клиффорда линейно независимы, то отсюда следует доказываемая эквивалентность одного уравнения /18/ паре уравнений /10/, /11/.

Обозначим далее, $A = H^\alpha A_\alpha$, $D = H^\alpha D_\alpha$. Учитывая первое из свойств /4/ матриц Дирака, находим, что $F = DA - D_\alpha A^\alpha$. Это равенство эквивалентно /12/. Условие Лоренца можно записать, следовательно, в виде $F = DA$. Изучаемая система уравнений выглядит теперь следующим образом:

$DF = J$ /уравнение Максвелла/

$DA = F$ /уравнение Лоренца/ /20/

$-i\hbar D\psi = (\frac{e}{c} A + mc H^4)\psi$ /уравнение Дирака/.

4. Переход к базису dx

Сферический мир представляется в виде 4-мерного однополостного гиперболоида

$$\eta_{ab} x^a x^b = r^2 \qquad /21/$$

в 5-мерном плоском мире: Как и в /16/, здесь r - радиус мира. Уравнения электродинамики в сферическом мире удобно изучать в однородных координатах x^a, переходя от базиса f^α, $f^4 = dr$ к базису dx^a. Такой переход объяснен в работе /6/. Приведем нужные сведения из этой работы.

Имеем $f^a = L^a_b dx^b$, $dx^a = \tilde{\tilde{L}}{}^a_b f^b$, где L и $\tilde{\tilde{L}}$ - прямое и обратное преобразования Лоренца в 5-мерном мире. Спиноры ψ и $\bar{\psi}$ от базиса f к базису dx преобразуются с помощью матрицы S:

$$\psi' = S\psi, \quad \bar{\psi}' = (-1)^p \bar{\psi} S^{-1}$$

такой, что

$$(-1)^p S^{-1} H^a S = \tilde{\tilde{L}}{}^a_b H^b, \quad (-1)^p S H^a S^{-1} = L^a_b H^b,$$

$$(-1)^p S H_a S^{-1} = \tilde{\tilde{L}}{}^b_a H_b, \quad (-1)^p S^{-1} H_a S = L^b_a H_b,$$

где $(-1)^p = \det(L^a_b)$. При желании можно избежать отражений, т.е. ограничиться случаем $p=0$. Спинорная связность /3/ в сферическом мире равняется

$$\Omega_\nu = S^{-1} e_\nu S - \frac{1}{2r} H_\nu H^4 .$$

Вектор и бивектор от базиса f к базису dx преобразуется следующим образом:

$$A'_a = L^\mu_a A_\mu , \qquad F'_{ab} = L^\mu_a L^\nu_b F_{\mu\nu} .$$

При этом получаются естественные условия

$$x^a A'_a = 0, \quad x^a F'_{ab} = 0$$

ортогональности этих объектов к радиусу-вектору x. Если

$$A' = H^a A'_a , \quad F' = \frac{1}{2} F'_{ab} H^a H^b, \quad X = x^a H_a ,$$

то, как нетрудно убедиться,

$$A' = (-1)^p SAS^{-1}, \quad F' = SFS^{-1},$$

Условия же ортогональности запишутся следующим образом:

$$A'X + XA' = 0, \quad F'X - XF' = 0 .$$

Далее,

$$r(-1)^p SH^4 S^{-1} = X, \quad r(-1)^p SH^\nu S^{-1} e_\nu = H^a m_a ,$$

где m_a - генераторы конформных преобразований гиперболоида /21/, а именно:

$$m_a = r \frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{x_a x^b}{r} \frac{\partial}{\partial x^b} \qquad /22/$$

Кроме того,

$$\frac{X}{r} H^a m_a = \frac{1}{2} H^a H^b m_{ab} , \qquad /23/$$

где m_{ab} - генераторы изометрических преобразований гиперболоида /21/, а именно:

$$m_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a} \qquad /24/$$

Вектор тока в базисе dx равняется

$$J'_a = \frac{e}{r} \bar{\psi}' X_a \psi' ,$$

где $X_a = m_a X$, $\bar{\psi}' = \psi^{*\prime} H_0$. Как и векторный потенциал, он ортогонален к радиусу-вектору x: $x^a J'_a = 0$. Наконец, приведем два тождества

$$XM + MX = 0 \qquad /25/$$

$$(M + 2)(1 - M) = m^a m_a , \qquad /26/$$

где

$$M = \frac{1}{2} H^a H^b m_{ab} - 2. \qquad /27/$$

Оператор

$$m^a m_a = \frac{1}{2} m^{ab} m_{ab} \qquad /28/$$

является ничем иным, как скалярным даламбертианом на гиперболоиде /21/.

Основываясь на приведенных результатах, нетрудно доказать, что

$$(-1)^p XS(DF)S^{-1} = MF', \quad XS(DA)S^{-1} = (M+1)A', \qquad /29/$$

$$(-1)^p XSD\psi = M\psi'$$

После этого, опуская в окончательных формулах штрихи над величинами в базисе dx, преобразуем систему уравнений /20/ к следующему виду:

$$MF = XJ \qquad \text{/уравнение Максвелла/},$$

$$(M+1)A = XF \qquad \text{/уравнение Лоренца/}, \qquad /30/$$

$$-i\hbar M\psi = \left(-\frac{e}{c}XA + mcr\right)\psi \qquad \text{/уравнение Дирака/}.$$

К уравнениям /30/ надо добавить условия ортогональности к радиусу-вектору x бивектора F и вектора A:

$$FX - XF = AX + XA = 0, \qquad /31/$$

а также выражение для тока

$$J = \frac{e}{r} H^a (\bar{\psi} X_a \psi). \qquad /32/$$

Для тока /32/ условие ортогональности к вектору x

$$JX + XJ = 0 \qquad /33/$$

выполняется автоматически, так как $x^a m_a = 0$.

5. *Исследование условий ортогональности к радиусу-вектору* x

Докажем, что из уравнения Максвелла /30/ следует уравнение

$$(M+1)(FX - XF) = 0, \qquad /34/$$

а из уравнения Лоренца /30/ - уравнение

$$(M+2)(AX + XA) = X(FX - XF). \qquad /35/$$

Действительно, для любого элемента K алгебры Клиффорда имеем:

$$MKX = (MK)X + \frac{1}{2}H^a H^b K m_{ab} X.$$

Применяя тождество/25/,получаем

$$M(FX - XF) = (MF)X + X(MF) + \frac{1}{2}H^a H^b F m_{ab} X,$$

$$M(AX + XA) = (MA)X - X(MA) + \frac{1}{2}H^a H^b A m_{ab} X.$$

Так как $m_{ab} X = x_a H_b - x_b H_a$, то

$$\frac{1}{2}H^a H^b K m_{ab} X = \frac{1}{2}XH^b K H_b - \frac{1}{2}H^a X K H_a,$$

а так как $H^a X + XH^a = 2x^a$, то

$$\frac{1}{2}H^a H^b K m_{ab} X = XH^a K H_a - KX.$$

Учитывая, что $H^a[H^b H^c]H_a = [H^b H^c]$, $H^a H^b H_a = -3H^b$, находим

$$\frac{1}{2}H^a H^b F m_{ab} X = XF - FX, \quad \frac{1}{2}H^a H^b A m_{ab} X = -3XA - AX.$$

Таким образом получаем два тождества

$$(M+1)(FX - XF) = (MF)X + X(MF),$$

$$(M+2)(AX + XA) = (MA)X + AX - X(MA) - XA.$$

Вследствие уравнения Максвелла /30/, из первого тождества и из равенства /33/ получаем уравнение /34/. Вследствие же уравнения Лоренца /30/, из второго тождества получаем уравнение /35/.

Итак, матрица $FX - XF$ подчиняется уравнению Дирака /с массовым параметром $m = i$ /. Выберем некоторую поверхность Коши, например, горловину гиперболоида /21/. Положим на ней $FX - XF = 0$. В таком случае, как доказано в /9/, $FX - XF = 0$ во всем сферическом мире. Теперь и матрица $AX + XA$ будет подчиняться уравнению Дирака /с массовым параметром $m = 2i$ /, и по отношению к ней можно повторить те же рассуждения. Так как данные Коши можно выбирать произвольно, то это доказывает, что условия /31/ не противоречат уравнениям /30/.

6. Исключение бивектора F *в базисе* dx

Рассмотрим теперь, как исключается бивектор F из системы уравнений /30/. Подставляя F из уравнения Лоренца в уравнение Максвелла, получаем:

$$r^{-2} XMX(M+1) A = -M(M+1) A = r^2 J.$$

Здесь мы учитываем равенство $X^2 = r^2$ и тождество /25/. Обратимся теперь к тождеству /26/. Так как $(M+2)(1-M) - 2 = -M(M+1)$, то

$$(m^a m_a - 2) A = r^2 J. \qquad /36/$$

Далее, на основании тождества /23/, запишем уравнение Лоренца в виде

$$rF = H^a \ell_a A = \ell^a A_a + \frac{1}{2}(\ell_a A_b - \ell_b A_a)[H^a H^b],$$

где обозначено $\ell_a = m_a - \frac{x_a}{r}$ *. Поскольку F - бивектор, то векторный потенциал должен удовлетворять уравнению

*Интересно, что $-i\hbar \ell_a$ является оператором конформного момента скалярной частицы в сферическом мире /5/.

$$(m^a - \frac{x^a}{r}) A_a = 0. \qquad /37/$$

Бивектор F все еще входит в условия ортогональности /31/, однако, согласно /35/, если $AX + XA = 0$, то и $FX - XF = 0$. Теперь бивектор F исключен полностью.

Докажем, наконец, что векторный потенциал удовлетворяет уравнению /37/, коль скоро он удовлетворяет уравнению /36/ и условию ортогональности $x^a A_a = 0$. Действительно, нетрудно проверить, что в любом случае

$$(m^a m_a)(x^c A_c) = x^c (m^a m_a) A_c + 2r m^c A_c - 4 x^c A_c.$$

Прибегая к уравнению /36/ и учитывая, что $x^c J_c = 0$, находим

$$m^a m_a (x^c A_c) = 2r(m^c - \frac{x^c}{r}) A_c.$$

Это и доказывает приведенное выше утверждение.

Итак, мы пришли к следующей системе уравнений электродинамики в сферическом мире:

$$x^a A_a = 0, \quad (m^a m_a - 2) A_b = er\bar{\psi} X_b \psi,$$

$$-i\hbar (H^a m_a - \frac{2}{r} X)\psi = (\frac{er}{c} H^a A_a + mcX)\psi. \qquad /38/$$

Полученная система уравнений калибровочно-инвариантна: если A_b, ψ - решение системы /38/, то и $A'_b = A_b + \frac{1}{r} m_b \phi$, $\psi' = \psi \exp\{\frac{ie}{\hbar c}\phi\}$ решение той же системы, коль скоро $m^a m_a \phi = 0$.

7. Предельный переход к плоскому миру

Рассмотрим малую окрестность точки $x^\alpha = 0$, $x^4 = r$ и устремим r к бесконечности. Первые члены разложения по степеням r суть:

$$x^\alpha = x^\alpha, \quad x^4 = r, \quad m_\alpha = r\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad m_4 = -x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

$$m^a m_a - 2 = r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha}.$$

Таким образом, в пределе $r \to \infty$ уравнения /38/ непосредственно переходят в следующие уравнения для плоского мира

$$A_4 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} A_\beta = e \bar{\psi} H_\beta \psi \qquad /39/$$

$$- i\hbar H^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \psi = (\frac{e}{c} H^\alpha A_\alpha + mc H^4) \psi .$$

Получающееся из /38/ следствие /37/ в пределе $r \to \infty$ переходит в независимое от /39/ условие Лоренца

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \qquad /40/$$

Литература

1. *А.П.Котельников, В.А.Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.-Л., ГИТТЛ, 1950.*
2. *Э.Картан. Теория спиноров. М., ИЛ., 1956.*
3. *P.A.M.Dirac. Ann.Math., 36, 3 (1935).*
4. *А.Пуанкаре. Об основных гипотезах геометрии. Сб. Об основаниях геометрии. М., Гостехиздат, 1956.*
5. *N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst.Henri Poincare, V IX, 2, Sect. A, Paris 1968. Препринт ОИЯИ, Р2-3777, Дубна, 1968.*
6. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. ТМФ, 15, 91 /1973/. Препринт ОИЯИ, Р2-6173, Дубна, 1971.*
7. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. ТМФ, 16, 77, /1973/. Препринт ОИЯИ, Р2-6351, Дубна, 1972.*
8. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ Р2-6109, Дубна, 1971.*
9. *Н.С.Шавохина. ТМФ, 10, 412 /1972/.*

10. *А.Б.Пестов. Препринт ОИЯИ, Р2-5798, Дубна, 1971.*
11. *А.Б.Пестов. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц". вып. 5, М., Атомиздат, 1974.*

Рукопись поступила в издательский отдел 27 марта 1974 года.