СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 7719

Д.И.Блохинцев, В.А.Ризов, И.Т.Тодоров

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА МЕТОДОМ ФОКА-ПОДОЛЬСКОГО

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7719

Д.И.Блохинцев, В.А.Ризов*, И.Т.Тодоров*

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА МЕТОДОМ ФОКА-ПОДОЛЬСКОГО

* Прикомандирован из Института ядерных исследований и ядерной энергетики Болгарской Академии наук, София, Болгария.

Б. План изложения

Уравнение для одновременной волновой функции связанного состояния выводится в § 2 и § 3. В § 4 квазипотенциал подсчитан с точностью до членов второго порядка по константе связи. В полученном уравнении содержатся обычные для квантовой теории поля расходимости, возникающие из-за неопределенности произведения операторных полей в одной точке. Возможность их устранения основывается на замечании, что функция Грина выведенного квазипотенциального уравнения равна произведению свободных запаздывающих функций Грина для двух частиц при равных временах. Это обстоятельство позволяет связать квазипотенциальное уравнение для одновременной функции с уравнением для запаздывающей функции Грина

$$G(x_1,x_2;y_1,y_2)=\theta(x_1^0-x_2^0)\langle 0|\{\psi_1(x_1),\tilde{\psi}_1(y_1)\}\{\psi_2(x_2),\tilde{\psi}_2(y_2)\}|0\rangle\beta^{(1)}\beta^{(2)} \quad (\mathrm{I.3})$$

при $x_1^0=x_2^0$ и $y_1^0=y_2^0$. В случае квазипотенциального уравнения, полученного из уравнения Бете-Солпитера, Р.Н.Фаустовым [4] доказано, что проблема устранения расходимостей из ядра уравнения сводится к решенной задаче перенормировки 4-временной причинной функции Грина. Можно полагать, что в рассматриваемом здесь случае ситуация аналогична.

С целью выявления связи амплитуды рассеяния с запаздывающей функцией Грина в § 5 выводится редукционная формула для амплитуды упругого рассеяния двух спинорных частиц в терминах вакуумных средних запаздывающих произведений спинорных операторов. После приравнивания времен полная 4-точечная (запаздывающая) функция переходит в функцию G (I.3).

§ 2. Одновременная волновая функция и запаздывающая функция Грина

А. Уравнение для матричных элементов от произведения двух полей при равных временах.

Пусть $H_j(\underline{p}_j)$ $(j=1,2)$ – свободные дираковские гамильтонианы, соответствующие частицам I и 2:

$$H_j(\underline{p}_j)=m_j\beta^{(j)}+\underline{p}_j\underline{\alpha}^{(j)}, \quad (2.\mathrm{I})$$

где m_j – масса частицы j,

$$\underline{p}_j=-i\underline{\nabla}_j,\ \beta^{(j)}=\gamma_0^{(j)},\ \underline{\alpha}^{(j)}=\gamma_0^{(j)}\underline{\gamma}^{(j)} \quad (j=1,2).$$

Уравнения движения для заряженных полей ψ_1 и ψ_2, взаимодействующих через электромагнитное поле A_μ, имеют вид

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_j}-H_j(\underline{p}_j)\right]\psi_j(x_j)=e_j\alpha_\mu^{(j)}A^\mu(x_j)\psi_j(x_j) \quad (2.2)$$
$$(j=1,2),$$

где e_j – заряд частицы j,

$$x_j=(x_j^0,\underline{x}_j)=(t_j,\underline{x}_j);\ \alpha_\mu=(1,\underline{\alpha}).$$

Произведение операторов $A^\mu(x)$ и $\psi_j(x)$ в правой части пишется пока формально. (Корректное определение подобных произведений связано, как известно, с устранением расходимостей.)

Умножим первое уравнение системы (2.2) справа на $\tilde{\psi}_2(x_2)$, а второе – слева на $\psi_1(x_1)$, возьмем с обеих сторон матричные элементы между состоянием n полной системы и связанным состоянием B и сложим полученные результаты. Полагая $t=\mu_1 x_1^\circ+\mu_2 x_2^\circ$ $(\mu_1+\mu_2=1)$, где μ_1 и μ_2 – положительные числа, которые будут определены ниже, мы получаем следующую систему уравнений для матричных элементов (I.2) при $(x_1-x_2)^2<0$:

$$[i\frac{\partial}{\partial t}-H_1(-i\nabla_1)-H_2(-i\nabla_2)]\Phi_{nB}(x_1,x_2)=$$
$$=\sum_{n'}A_{nn'}(x_1,x_2)\Phi_{n'B}(x_1,x_2), \tag{2.3}$$

где

$$x_1^\circ=t+\mu_2\tau,\ x_2^\circ=t-\mu_1\tau,\ \tau=x_1^\circ-x_2^\circ,$$
$$A_{nn'}(x_1,x_2)=\langle n|\sum_{j=1}^{2}e_j\alpha_\mu^{(j)}A^\mu(x_j)|n'\rangle. \tag{2.4}$$

Как обычно, сумма по n' включает интегрирование по непрерывным и суммирование по дискретным квантовым числам промежуточных состояний.

Пусть $|B\rangle$ и $|n\rangle$ – (обобщенные) состояния с определенными импульсами P_B и P_n. Тогда, в силу трансляционной инвариантности теории, можно положить

$$\Phi_{nB}(x_1,x_2)=e^{i(P_n-P_B)X}\mathcal{F}_{nB}(x),$$
$$A_{nB}(x_1,x_2)=e^{i(P_n-P_B)X}\mathcal{A}_{nB}(x), \tag{2.5}$$

где

$$X=\mu_1x_1+\mu_2x_2,\quad \mu_1+\mu_2=1,$$
$$x=x_1-x_2. \tag{2.6}$$

Так как по предположению, $(x_1-x_2)^2<0$, то можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы

$$x_1^\circ=x_2^\circ=t. \tag{2.7}$$

В этой системе уравнение (2.3) приобретает вид

$$[P_B^\circ-P_n^\circ-H_1(\mu_1(\underline{P}_B-\underline{P}_n)-i\underline{\nabla})-H_2(\mu_2(\underline{P}_B-\underline{P}_n)+i\underline{\nabla})]\mathcal{F}_{nB}(\underline{x})=$$
$$=\sum_{n'}\mathcal{A}_{nn'}(\underline{x})\mathcal{F}_{n'B}(\underline{x}), \tag{2.8}$$

где мы заменили, для краткости, $\mathcal{F}_{nB}(0,\underline{x})$ на $\mathcal{F}_{nB}(\underline{x})$ и $\mathcal{A}_{nn'}(0,\underline{x})$ на $\mathcal{A}_{nn'}(\underline{x})$.

Б. Запаздывающая двухчастичная функция Грина

Определим функцию Грина $\mathcal{G}_0^R(P,\underline{x})$ как запаздывающее решение уравнения

$$[H_1(\mu_1\underline{P}-i\underline{\nabla})+H_2(\mu_2\underline{P}+i\underline{\nabla})-P_0]\mathcal{G}_0^R(P,\underline{x})=\delta(\underline{x}). \tag{2.9}$$

Другими словами, положим

$$\mathcal{G}_0^R(P,\underline{x})=\int G_0(P,\underline{p})e^{i\underline{p}\underline{x}}\frac{d^3\underline{p}}{(2\pi)^3},$$
$$G_0(P,\underline{p})=[H_1(\underline{p}_1)+H_2(\underline{p}_2)-P_0-i0]^{-1}, \tag{2.10}$$

где

$$\underline{p}_1=\mu_1\underline{P}+\underline{p},\ \underline{p}_2=\mu_2\underline{P}-\underline{p}. \tag{2.11}$$

В координатном пространстве запаздывающая функция Грина $\mathcal{G}_0^R$ факторизуется:

$$\mathcal{G}_0^R(X,\underline{x}) = \int \mathcal{G}_0^R(P,\underline{x})\, e^{-iPX}\frac{d^4P}{(2\pi)^4} = \tag{2.12}$$
$$= \frac{1}{i}\, S_1^R(t,\underline{x}_1)\beta_1 \cdot S_2^R(t,\underline{x}_2)\beta_2 .$$

Здесь $\underline{x}_1 = \underline{X}+\mu_2\underline{x}$, $\underline{x}_2 = \underline{X}-\mu_1\underline{x}$ (ср. с (2.6)), а $S_j^R(x)$ – одночастичные запаздывающие функции Грина:

$$S_j^R(x) = \int \frac{m_j+\gamma^{(j)}p}{m_j^2-p^2-i0p^0}\, e^{-ipx}\frac{d^4p}{(2\pi)^4} . \tag{2.13}$$

Чтобы убедиться в справедливости (2.12), заметим, что если импульсы p_1 и p_2 выражены через P и p посредством четырехмерного аналога формул (2.11), то

$$\int \frac{m_1+\gamma^{(1)}p_1}{m_1^2-p_1^2-i0p_1^0}\,\beta_1\,\frac{m_2+\gamma^{(2)}p_2}{m_2^2-p_2^2-i0p_2^0}\,\beta_2\,\frac{dp^0}{2\pi} = \tag{2.14}$$
$$= \frac{i}{H_1(\underline{p}_1)+H_2(\underline{p}_2)-P_0-i0} .$$

Мы воспользуемся представлением (2.12) в § 5, чтобы связать квазипотенциальное уравнение, которое будет получено ниже, с некоторым неоднородным уравнением для запаздывающей четырехточечной функции.

§ 3. Уравнение для одновременной волновой функции связанного состояния

А. Определение полной функции Грина двух частиц

При помощи запаздывающей функции $\mathcal{G}_0^R$ (2.10) можно записать (2.8) в виде интегрального уравнения:

$$\mathcal{F}_{nB}(\underline{x}) = \tag{3.1}$$
$$= -\int \mathcal{G}_0^R(P_B-P_n,\underline{x}-\underline{y})\,\mathcal{A}_{ns}(\underline{y})\,\mathcal{F}_{sB}(\underline{y})\,d^3y .$$

Подставляя это выражение в правую часть (2.8), находим

$$\left\{P_B^0-P_n^0-H_1\left(\mu_1(\underline{P}_B-\underline{P}_n)-i\underline{\nabla}\right)-H_2\left(\mu_2(\underline{P}_B-\underline{P}_n)+i\underline{\nabla}\right)\right\}\mathcal{F}_{nB}(\underline{x}) =$$
$$= -\int \sum_{n's} \mathcal{A}_{nn'}(\underline{x})\,\mathcal{G}_0^R(P_B-P_{n'},\underline{x}-\underline{y})\,\mathcal{A}_{n's}(\underline{y})\,\mathcal{F}_{sB}(\underline{y})\,d^3y . \tag{3.2}$$

Нашей дальнейшей целью будет исключение из (3.2) компоненты $\mathcal{F}_{nB}$ с $n \neq 0$. Это приведет к искомому интегродифференциальному уравнению для $\mathcal{F}_{0B}$. Сначала нам понадобится пертурбационное разложение ядра оператора в правой части (3.2).

Прежде всего разложим величины $\mathcal{A}_{nn'}(\underline{x})$ и $\mathcal{A}_{n's}(\underline{y})$, задаваемые равенствами (2.4) и (2.5), по степеням зарядов e_1 и e_2. Для этой цели воспользуемся итерационным решением уравнений Янга-Фельдмана

$$A_\mu(x) = A_\mu^{in}(x) + \int D^R(x-y)\,j_\mu(y)\,d^4y , \tag{3.3}$$

$$\psi_j(x) = \psi_j^{in}(x) + \int S_j^R(x-y)\,h_j(y)\,d^4y \quad (j=1,2), \tag{3.4}$$

где электромагнитный ток j_μ и "спинорный ток" h_j определяются (формально) равенствами

$$j_\mu(x)=e_1\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu^{(1)}\psi_1(x)+e_2\bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu^{(2)}\psi_2(x),$$

$$h_j(x)=e_j\gamma_\mu^{(j)}A^\mu(x)\psi_j(x); \qquad (3.5)$$

$\mathcal{D}^R$ и S_j^R – свободные запаздывающие функции

$$\mathcal{D}^R(x)=-\int\frac{e^{-ipx}}{p^2+i0p^0}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \qquad (3.6)$$

$$S_j^R(x)=(m_j+\not\partial_j)\int\frac{e^{-ipx}}{m_j^2-p^2-i0p^0}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}=$$
$$=\int\frac{m_j+\gamma^{(j)}p}{m_j^2-p^2-i0p^0}e^{-ipx}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}.$$

Итерационное решение уравнений (3.3–5) приведет к бесконечному ряду по степеням e_1 и e_2 для правой части (3.2). Этот ряд мы запишем в виде

$$\sum_{n'}\mathcal{A}_{nn'}(\underline{x})G_0^R(P_B-P_n,\underline{x}-\underline{y})\mathcal{A}_{n's}(\underline{y})=$$
$$=\left[\Sigma_1(e_1^2;P_B;\underline{x},\underline{y})+\Sigma_2(e_2^2;P_B;\underline{x},\underline{y})+K(P_B;\underline{x},\underline{y})\right]_{ns},$$

где $\Sigma_j(e_j^2;\dots)$ $(j=1,2)$ – "собственноэнергетические" поправки, каждая из которых зависит лишь от заряда e_j, а ядро K пропорционально произведению e_1e_2.

Определим теперь обратную величину полной несвязной функции Грина $\mathcal{G}$ равенством

$$\mathcal{G}^{-1}(P_B;\underline{x},\underline{y})_{nn'}=$$
$$=\left[H_1\left(\mu_1(\underline{P}_B-\underline{P}_n)-i\underline{\nabla}\right)+H_2\left(\mu_2(\underline{P}_B-\underline{P}_n)+i\underline{\nabla}\right)+P_n^0-P_B^0\right]\delta_{nn'}\delta(\underline{x}-\underline{y})+ \qquad (3.7)$$
$$+\Sigma_1(e_1^2;P_B;\underline{x},\underline{y})_{nn'}+\Sigma_2(e_2^2;P_B;\underline{x},\underline{y})_{nn'}.$$

Б. Исключение матричных элементов $\mathcal{F}_{nB}$ с $n\neq0$.

Если обозначить через $\mathcal{F}_{\cdot B}$ (бесконечный) столбец с компонентами $\mathcal{F}_{nB}$, то система уравнений (3.2) перепишется в форме

$$(\mathcal{G}^{-1}+K)\mathcal{F}_{\cdot B}=0. \qquad (3.8)$$

Чтобы исключить компоненты $\mathcal{F}_{\cdot B}$ с $n\neq0$, введем оператор проектирования Π_0, действующий по правилу

$$\Pi_0\mathcal{F}_{\cdot B}=\begin{pmatrix}\mathcal{F}_{0B}\\0\\\vdots\\0\\\vdots\end{pmatrix}\equiv\mathcal{F}_B. \qquad (3.9)$$

Из существования нетривиального решения $\mathcal{F}_{\cdot B}$ уравнения (3.8) вытекает, что оператор $\mathcal{G}^{-1}+K$ не имеет обратного в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{F}$ всех столбцов. Мы предположим, однако, что оператор $(1-\Pi_0)(\mathcal{G}^{-1}+K)(1-\Pi_0)$ обратим в подпространстве $(1-\Pi_0)\mathcal{H}_\mathcal{F}$, и обозначим его обратный через Q. Другими словами, оператор Q должен удовлетворять соотношениям

$$Q\Pi_0=\Pi_0Q,\quad Q(1-\Pi_0)(\mathcal{G}^{-1}+K)(1-\Pi_0)=(1-\Pi_0). \qquad (3.10)$$

Проиллюстрируем возможность существования оператора типа Q на простом примере дираковских спиноров. Если $p^2=m^2$, то оператор $m-\gamma p$ необратим в четырехмерном комплексном пространстве C^4, так как уравнение Дирака $(m-\gamma p)u(p)=0$ имеет нетривиальные решения. С другой стороны, оператор

$$\tfrac{1}{2}(1-i\gamma_5)(m-\gamma p)\tfrac{1}{2}(1-i\gamma_5)=\tfrac{m}{2}(1-i\gamma_5)\quad(\gamma_5=\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$$

обратим в пространстве $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\mathbb{C}^4$; его обратный задается равенством $Q=\frac{1}{m}$.

При помощи (3.8) и (3.10) мы можем исключить вектор $(1-\Pi_0)\mathcal{F}_{\cdot B}$:

$$(1-\Pi_0)\mathcal{F}_{\cdot B}=-Q(1-\Pi_0)(\mathcal{G}^{-1}+K)\Pi_0\mathcal{F}_{\cdot B}. \tag{3.11}$$

Подставляя это выражение в уравнение

$$\Pi_0(\mathcal{G}^{-1}+K)(1-\Pi_0)\mathcal{F}_{\cdot B}+\Pi_0(\mathcal{G}^{-1}+K)\Pi_0\mathcal{F}_{\cdot B}=0,$$

которое вытекает из (3.8), получаем

$$\Pi_0\{\mathcal{G}^{-1}+K-(\mathcal{G}^{-1}+K)Q(1-\Pi_0)(\mathcal{G}^{-1}+K)\}\Pi_0\mathcal{F}_{\cdot B}=0. \tag{3.12}$$

Равенство (3.12) дает искомое уравнение для волновой функции $\mathcal{F}_B$ (3.9):

$$(\mathcal{G}_B^{-1}+\mathcal{V})\mathcal{F}_B=0, \tag{3.13}$$

где, по определению, $\mathcal{G}_B^{-1}=\Pi_0\mathcal{G}^{-1}\Pi_0$, а потенциал $\mathcal{V}$ задается равенством

$$\mathcal{V}=\Pi_0\{K-(\mathcal{G}^{-1}+K)Q(1-\Pi_0)(\mathcal{G}^{-1}+K)\}\Pi_0. \tag{3.14}$$

Заметим, что при выводе уравнения (3.13) нам нигде не понадобилось фиксировать постоянные μ_1 и μ_2, удовлетворяющие (2.6). Их удобно определить из условия, чтобы четырехмерный вектор относительного импульса

$$p=\mu_2 p_1-\mu_1 p_2 \tag{3.15}$$

был ортогонален полному импульсу $P_B=p_1+p_2$:

$$pP_B=0 \Rightarrow \mu_1-\mu_2=\frac{p_1^2-p_2^2}{w^2} \quad (w^2=P_B^2). \tag{3.16}$$

Если через E_j обозначить энергию j-ой частицы в системе центра масс

$$E_1=\frac{w^2+p_1^2-p_2^2}{2w}, \quad E_2=\frac{w^2-p_1^2+p_2^2}{2w}, \tag{3.17}$$

то будем иметь

$$\mu_j=\frac{E_j}{w}, \ j=1,2, \tag{3.18}$$

(ср. [6]).

Условие ортогональности (3.16) может быть связано с условием Маркова- Юкавы

$$P_B x=(p_1+p_2)(x_1-x_2)=0. \tag{3.19}$$

§ 4. Вычисление квазипотенциала во втором порядке

А. Нахождение члена порядка e_1e_2.

В рассматриваемом примере электромагнитного взаимодействия двух спинорных частиц низшее приближение для квазипотенциала получается из суммы

$$\sum_{n'}\mathcal{A}_{0n'}(\underline{x})\mathcal{G}_0^R(P_B-P_{n'},\underline{x}-\underline{y})\mathcal{A}_{n'0}(\underline{y}) \tag{4.1}$$

(см. правую часть уравнения (3.2)) выделением члена, пропорционального $e_1 e_2$. При этом в качестве промежуточных состояний n' берутся состояния с одним фотоном и для A_μ используются лишь операторы свободного электромагнитного поля. Следующие члены в итерационном решении уравнений Янга-Фельдмана необходимы лишь для высших поправок к квазипотенциалу.

Сумма по n' в (4.I) сводится к интегрированию по импульсам однофотонных состояний и к суммированию по поляризациям фотона. Конкретнее, при нормировке, в которой операторы уничтожения и рождения фотонов в файнмановской калибровке удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a_\mu(\underline{p}), a^*_\nu(\underline{q})] = -g_{\mu\nu}(2\pi)^3 2p^0 \delta(\underline{p}-\underline{q}), \quad p^0 = |\underline{p}|, \tag{4.2}$$

$$(g_{\mu\nu}) = (+---),$$

мы имеем

$$|n'\rangle \to a^*_\mu(\underline{k})|0\rangle, \quad \sum_{n'} \to -\sum_{\mu=0}^{3} \int \frac{d^3_k}{2k_0(2\pi)^3} g^{\mu\mu}. \tag{4.3}$$

Теперь несложно подсчитать матричные элементы $\mathcal{A}_{on'}$ и $\mathcal{A}_{n'o}$, определенные равенствами (2.4) и (2.5), при $\underline{x}_1 = \mu_2 \underline{x}$, $\underline{x}_2 = -\mu_1 \underline{x}$ и проинтегрировать по $\underline{k}$ члены, содержащие $e_1 e_2$. Это дает следующее нелокальное выражение для $\mathcal{V}(\underline{x},\underline{y})$ в порядке $e_1 e_2$:

$$\mathcal{V}^{(2)}(\underline{x},\underline{y}) = e_1 e_2 \int \Big[\alpha^{(1)}_\mu g^R_o(w-|\underline{k}|, -\underline{k}; \underline{x}-\underline{y}) \alpha^{(2)\mu} e^{i\underline{k}(\mu_2 \underline{x}+\mu_1 \underline{y})} +$$

$$+ \alpha^{(2)}_\mu g^R_o(w-|\underline{k}|, -\underline{k}; \underline{x}-\underline{y}) \alpha^{(1)\mu} e^{-i\underline{k}(\mu_1 \underline{x}-\mu_2 \underline{y})} \Big] \frac{d^3_k}{2|\underline{k}|(2\pi)^3}. \tag{4.4}$$

В импульсном пространстве потенциал $V^{(2)}$ может быть записан в явном виде:

$$V^{(2)}(\underline{p},\underline{q}) = \int \mathcal{V}^{(2)}(\underline{x},\underline{y}) e^{-i\underline{p}\underline{x}+i\underline{q}\underline{y}} d^3_x d^3_y =$$

$$= \frac{e_1 e_2}{2|\underline{p}-\underline{q}|} \Big[\alpha^{(1)}_\mu \frac{1}{H_1(\underline{q})+H_2(-\underline{p})+|\underline{p}-\underline{q}|-W} \alpha^{(2)\mu} +$$

$$+ \alpha^{(2)}_\mu \frac{1}{H_1(\underline{p})+H_2(-\underline{q})+|\underline{p}-\underline{q}|-W} \alpha^{(1)\mu} \Big]. \tag{4.5}$$

Отметим, что проекция этого оператора на состояния с положительной энергией совпадает с выражением, полученным в работе [26] приравниванием времен в ядре Бете-Солпитера. В приближении, когда $H_1 + H_2$ заменяется полной энергией W :

$$H_1(\underline{q}) + H_2(-\underline{p}) = W = H_1(\underline{p}) + H_2(-\underline{q}),$$

для $V^{(2)}(\underline{p},\underline{q})$ находим релятивистский закон Кулона (см. [5]):

$$V^{(2)}(\underline{p},\underline{q}) = \frac{e_1 e_2}{(\underline{p}-\underline{q})^2} \left(1 - \underline{\alpha}^{(1)} \underline{\alpha}^{(2)}\right). \tag{4.6}$$

Б. Полная функция Грина во втором порядке

Аналогично можно вычислить и полную функцию Грина во втором порядке:

$$g^{(2)}_w(\underline{p})^{-1} = H_1(\underline{p}) + H_2(-\underline{p}) - W + e_1^2 \int \frac{d^3_k}{2|\underline{k}|(2\pi)^3} \alpha^{(1)}_\mu \frac{1}{H_1(\underline{p}-\underline{k}) + H_2(-\underline{p}) + |\underline{k}| - W} \alpha^{(2)\mu}$$

$$+ e_2^2 \int \frac{d^3_k}{2|\underline{k}|(2\pi)^3} \alpha^{(2)}_\mu \frac{1}{H_1(-\underline{p}) + H_2(\underline{p}-\underline{k}) + |\underline{k}| - W} \alpha^{(1)\mu}. \tag{4.7}$$

Линейные расходимости в правой части (4.7) могут быть устранены перенормировкой массы и волновой функции. Можно показать, что перенормированные значения расходящихся интегралов в (4.7) не дают вклада в эффектах четвертого порядка по $\alpha = e^2/4\pi$ (т.е. в тонкой структуре спектральных линий).

§ 5. Связь с уравнением для четырехточечной функции Грина

А. Неоднородное уравнение для двухвременной функции Грина, и его связь с уравнением для волновой функции.

Представление (2.12) для запаздывающей функции $\mathcal{G}_0^R$ наводит на мысль связать уравнение (3.13) для волновой функции с уравнением для некоторой запаздывающей четырехточечной функции Грина. В этом параграфе мы покажем, что в качестве такой функции Грина можно взять вакуумное ожидание

$$G(t,t';\underline{x}_1,\underline{x}_2;\underline{y}_1,\underline{y}_2)= \frac{1}{i}\theta(t-t')\langle 0|\{\psi_1(t,\underline{x}_1),\widetilde{\psi}_1(t',\underline{y}_1)\}\beta^{(1)}\times \times\{\psi_2(t,\underline{x}_2),\widetilde{\psi}_2(t',\underline{y}_2)\}\beta^{(2)}|0\rangle. \tag{5.1}$$

Тогда из канонических антикоммутационных соотношений при равных временах и из уравнений движения для спинорных операторов вытекает следующее соотношение для G:

$$\Big[i\frac{\partial}{\partial t}-H_1(-i\underline{\nabla}_{x_1})-H_2(-i\underline{\nabla}_{x_2})\Big]G(t,t';\underline{x}_1,\underline{y}_1;\underline{x}_2,\underline{y}_2)= =\delta(t-t')\delta(\underline{x}_1-\underline{y}_1)\delta(\underline{x}_2-\underline{y}_2)+ +i\theta(t-t')\langle 0|\{e_1\gamma_\mu^{(1)}A^\mu(t,\underline{x}_1)\psi_1(t,\underline{x}_1),\widetilde{\psi}_1(t',\underline{y}_1)\}\{\psi_2(t,\underline{x}_2),\widetilde{\psi}_2(t',\underline{y}_2)\}|0\rangle+ +i\theta(t-t')\langle 0|\{\psi_1(t,\underline{x}_1),\widetilde{\psi}_1(t',\underline{y}_1)\}\{e_2\gamma_\mu^{(2)}A^\mu(t,\underline{x}_2)\psi_2(t,\underline{x}_2),\widetilde{\psi}_2(t',\underline{y}_2)\}|0\rangle. \tag{5.2}$$

Равенство (5.2) напишем символично как

$$(\mathcal{G}_0^R)^{-1}G = 1+U. \tag{5.2'}$$

Отсюда для функции Грина G следует уравнение

$$G=\mathcal{G}_0^R+\mathcal{G}_0^R W G, \tag{5.3}$$

где, по определению,

$$W=U(1+U)^{-1}(\mathcal{G}_0^R)^{-1}. \tag{5.4}$$

В окрестности данного связанного состояния B с волновой функцией $\mathcal{F}_B$ функция Грина G имеет полюс с вычетом

$$e^{-iP_B X}\mathcal{F}_B(\underline{x})\otimes e^{iP_B Y}\mathcal{F}_B^*(\underline{y}),$$

где $Y=\mu_1 y_1+\mu_2 y_2$, $\underline{y}=\underline{y}_1-\underline{y}_2$ $(y_1^0=y_2^0=t')$.

Приравнивание вычетов обеих сторон уравнения (5.3) в полюсе связанного состояния B дает однородное уравнение для $\mathcal{F}_B$:

$$(\mathcal{G}_0^R)^{-1}(P_B;\underline{x})\mathcal{F}_B(\underline{x})=\int W(P_B;\underline{x},\underline{y})\mathcal{F}_B(\underline{y})d\underline{y}^3. \tag{5.5}$$

Это стандартный способ установления связи между уравнением для функции Грина и уравнением для волновой функции связанного состояния. Задача, которая должна быть решена в дальнейшем — построение рецепта перенормировки ядра W на основе перенормировки запаздывающей функции G.

Б. Вывод редукционной формулы

Перейдем к нахождению полной четырехточечной запаздывающей функции Грина. Для этой цели мы выразим матричный элемент $\langle p_1 p_2, out | q_1 q_2, in\rangle$ упругого двухчастичного рассеяния через вакуумное ожидание запаздывающих произведений четырех спинорных полей.

Введем для удобства обозначения

$$\mathcal{D}_j(\partial_x) = m_j - i\gamma^{(j)}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu},$$
$$\overline{\mathcal{D}}_j(\partial_y) = m_j + i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\mu}\gamma^{(j)}_\mu \qquad (j=1,2), \tag{5.6}$$

где $\overleftarrow{\partial}_\mu$ – символ дифференцирования, действующий на величину, стоящую слева. Отделим нетривиальную часть S-матричного элемента:

$$\langle p_1 p_2, out|q_1 q_2, in\rangle = \langle p_1 p_2, in|q_1 q_2, in\rangle +$$
$$+ i\int d^4x_1 e^{ip_1x_1}\tilde{u}_1(p_1)\mathcal{D}_1(\partial_{x_1})\langle p_2\, out|\psi_1(x_1)|q_1 q_2\, in\rangle. \tag{5.7}$$

Здесь и в дальнейшем мы пользуемся обозначением $u_j(p_j)$ $(\tilde{u}_j(p_j))$ для (нормированных) решений уравнения Дирака:

$$(p_j\gamma^{(j)} - m_j)u_j(p_j)=0, \quad \left[\tilde{u}_j(p_j)(p_j\gamma^{(j)} - m_j)=0\right] (j=1,2)$$
$$(p_j^2 = m_j^2). \tag{5.8}$$

Пользуясь асимптотическим условием для поля $\tilde{\psi}_1$, можно преобразовать матричный элемент под знаком интеграла в (5.7) к виду

$$\langle p_2\, out|\psi_1(x_1)|q_1 q_2\, in\rangle =$$
$$= \lim_{y_1^0\to-\infty}\int d^3y_1 \langle p_2\, out|\psi_1(x_1)\tilde{\psi}_1(y_1)|q_2\, in\rangle\gamma_0^{(1)}u_1(q_1)e^{-iq_1y_1} =$$
$$= \lim_{y_1^0\to-\infty}\int d^3y_1 \langle p_2\, out|\theta(x_1^0-y_1^0)\{\psi_1(x_1), \tilde{\psi}_1(y_1)\}|q_2\, in\rangle\gamma_0^{(1)}u_1(q_1)e^{-iq_1y_1}.$$

Последнее равенство получается добавлением члена

$$\lim_{y_1^0\to-\infty}\int d^3y_1 \langle p_2\, out|\theta(x_1^0-y_1^0)\tilde{\psi}_1(y_1)\psi(x_1)|q_2\, in\rangle\gamma_0^{(1)}u_1(q_1)e^{-iq_1y_1},$$

равного нулю, в силу асимптотического условия. Записывая последний интеграл в четырехмерной форме, находим

$$\langle p_1 p_2\, out|q_1 q_2\, in\rangle = \langle p_1 p_2\, in|q_1 q_2\, in\rangle +$$
$$+ i^2\int d^4x_1 d^4y_1\, e^{ip_1x_1}\tilde{u}_1(p_1)\mathcal{D}_1(\partial_{x_1})\langle p_2\, out|\theta(x_1^0-y_1^0)\{\psi_1(x_1), \tilde{\psi}_1(y_1)\}|q_2\, in\rangle \times$$
$$\times \overline{\mathcal{D}}_1(\partial_{y_1})u_1(q_1)e^{-iq_1y_1}. \tag{5.9}$$

Поступая аналогичным образом с частицей с импульсом q_2, можно представить матричный элемент под знаком интеграла в виде

$$\langle p_2\, out|\theta(x_1^0-y_1^0)\{\psi_1(x_1), \tilde{\psi}_1(y_1)\}|q_2\, in\rangle =$$

$$= \lim_{y_2^0\to-\infty} \int d^3y_2 \langle p_2 | R(1,\bar 1)\tilde\psi_2(y_2)|0\rangle \theta(y_1^0-y_2^0)\beta_0^{(2)} u_2(q_2) e^{-iq_2y_2} =$$

$$= \lim_{y_2^0\to-\infty} \int d^3y_2 \langle p_2|[R(1,\bar1),\tilde\psi_2(y_2)]|0\rangle\theta(y_1^0-y_2^0)\beta_0^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2} + \qquad (5.10)$$

$$+\lim_{y_2^0\to-\infty} \int d^3y_2\langle p_2|\tilde\psi_2(y_2)R(1,\bar1)|0\rangle\theta(y_1^0-y_2^0)\beta_0^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2},$$

где введено обозначение

$$R(1,\bar1)=\theta(x_1^0-y_1^0)\{\psi_1(x_1),\tilde\psi_1(y_1)\}. \qquad (5.11)$$

Рассмотрим отдельно первое и второе слагаемое во втором равенстве (5.10). Первый член запишем в следующей форме:

$$\lim_{y_2^0\to-\infty}\int d^3y_2\langle p_2|[\{\psi_1(x_1),\tilde\psi_1(y_1)\},\tilde\psi_2(y_2)]|0\rangle\times$$

$$\times\theta(x_1^0-y_1^0)\theta(y_1^0-y_2^0)\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}-$$

$$-\lim_{y_2^0\to-\infty}\int d^3y_2\langle p_2|[\{\psi_1(x_1),\tilde\psi_2(y_2)\},\tilde\psi_1(y_1)]|0\rangle\times \qquad (5.12)$$

$$\times\theta(x_1^0-y_2^0)\theta(y_2^0-y_1^0)\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}.$$

Обозначим для краткости разность двух последних интегралов (второй из которых на самом деле равен нулю) через

$$\lim_{y_2^0\to-\infty}\int d^3y_2\langle p_2|R(1,\bar1,\bar2)|0\rangle\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}.$$

Такое выражение стандартным образом преобразуется в четырехмерный интеграл и для первого члена в (5.10) получаем

$$i\int d^4y_2\langle p_2|R(1,\bar1,\bar2)|0\rangle\overline{\mathcal{D}}_2(\partial_{y_2})u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}. \qquad (5.13)$$

Применим теперь асимптотическое условие для частицы с импульсом p_2 :

$$\langle p_2\, out|R(1,\bar1,\bar2)|0\rangle=\langle p_2\, in|R(1,\bar1,\bar2)|0\rangle=$$

$$=\lim_{x_2^0\to-\infty}\int d^3x_2\, e^{ip_2x_2}\tilde u_2(p_2)\beta^{(2)}\langle0|\psi_2(x_2)R(1,\bar1,\bar2)|0\rangle.$$

Наша цель – привести написанное выше выражение к форме ковариантного запаздывающего произведения типа

$$\sum_{S_3}(-1)^{\pi(i_1i_2i_3)}\theta(x_1^0-y_{i_1}^0)\theta(y_{i_1}^0-y_{i_2}^0)\theta(y_{i_2}^0-y_{i_3}^0)\times$$

$$\times\{[\{\psi_1(x_1),\phi_{i_1}(y_{i_1})\},\phi_{i_2}(y_{i_2})],\phi_{i_3}(y_{i_3})\},$$

где $\pi(i_1i_2i_3)$ – четность перестановки, переводящей набор (123) в (i_1 i_2 i_3), а $\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ – некоторая перестановка полей $\tilde\psi_1, \psi_2, \tilde\psi_2$. Это совершается добавлением слагаемых, содержащих $\theta(x_2^0-t_i)$, тождественно равных нулю при фиксированных t_i. Среди добавленных членов неочевидно равенство нулю только того члена, в котором $\psi_2(x_2)$ – самый правый множитель в вакуумном среднем. Однако асимптотическое условие Лемана-Симанзика-Циммермана приводит к тому, что в пределе

$$\lim_{x_2^0\to-\infty}\int d^3x_2\, e^{ip_2x_2}\tilde u_2(p_2)\beta_0^{(2)}\langle0|\dots\psi_2(x_2)|0\rangle$$

вектор $\psi_2(x_2)|0\rangle$ сводится к действию оператора уничтожения на вакуум, т.е. к нулю. После этого мы преобразуем трехмерные интегралы по x_2 к четырехмерным по формуле

$$\lim_{x_2^0\to-\infty}\int d^3x_2(\dots)=\lim_{x_2^0\to+\infty}\int d^3x_2(\dots)-\int d^4x_2\frac{\partial}{\partial x_2^0}(\dots).$$

Член с $x_2^0\to+\infty$ пропадает из-за θ-функций, а интеграл по x_2 выражается, как обычно, через $\tilde{u}_2(p_2)$ и $\overline{\mathcal{D}}(\partial_{x_2})$. Его явный вид мы приведем в окончательной формуле (5.15).

Обратимся ко второму члену в правой части (5.10). Асимптотическое условие для частицы с импульсом p_2 дает

$$\lim_{y_2^0\to-\infty}\int d^3y_2\langle p_2|\tilde{\psi}_2(y_2)R(1,\bar{1})|0\rangle\theta(y_1^0-y_2^0)\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}=$$

$$=\lim_{y_2^0\to-\infty}\int d^3y_2\langle p_2|\tilde{\psi}_2(y_2)R(1,\bar{1})|0\rangle\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}=$$

$$=\lim_{y_2^0\to-\infty}\lim_{x_2^0\to+\infty}\int d^3y_2\int d^3x_2\, e^{ip_2x_2}\tilde{u}_2(p_2)\beta^{(2)}\langle 0|\psi_2(x_2)\tilde{\psi}_2(y_2)R(1,\bar{1})|0\rangle\times$$

$$\times\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}=$$

$$=\lim_{y_2^0\to-\infty}\lim_{x_2^0\to+\infty}\int d^3y_2\int d^3x_2\, e^{ip_2x_2}\tilde{u}_2(p_2)\beta^{(2)}\theta(x_2^0-y_2^0)\times$$

$$\times\langle 0|\psi_2(x_2)\tilde{\psi}_2(y_2)R(1,\bar{1})|0\rangle\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}=$$

$$=\lim_{y_2^0\to-\infty}\lim_{x_2^0\to+\infty}\int d^3y_2\int d^3x_2\, e^{ip_2x_2}\tilde{u}_2(p_2)\beta^{(2)}\Big[\langle 0|R(2,\bar{2})R(1,\bar{1})|0\rangle-$$

$$-\theta(x_2^0-y_2^0)\langle 0|\tilde{\psi}_2(y_2)\psi_2(x_2)R(1,\bar{1})|0\rangle\Big]\beta^{(2)}u_2(q_2)e^{-iq_2y_2},$$

где

$$R(2,\bar{2})=\theta(x_2^0-y_2^0)\{\psi_2(x_2),\tilde{\psi}_2(y_2)\}.$$

Преобразуя опять полученное выражение в четырехмерный интеграл,

мы приводим второе слагаемое к виду

$$i^2\int d^4x_2\, d^4y_2\, e^{ip_2x_2}\tilde{u}_2(p_2)\mathcal{D}_2(\partial_{x_2})\times$$

$$\times\langle 0|R(2,\bar{2})R(1,\bar{1})|0\rangle\overline{\mathcal{D}}_2(\partial_{y_2})u_2(q_2)e^{-iq_2y_2}. \qquad (5.14)$$

Объединяя (5.14) с выражением запаздывающего произведения для первого члена в (5.10), получим из (5.9):

$$\langle p_1p_2\,out|q_1q_2\,in\rangle-\langle p_1p_2\,in|q_1q_2\,in\rangle=$$

$$=i^4\int d^4x_1d^4y_1d^4x_2d^4y_2\, e^{ip_1x_1}\tilde{u}_1(p_1)e^{ip_2x_2}\tilde{u}_2(p_2)\mathcal{D}_1(\partial_{x_1})\mathcal{D}_2(\partial_{x_2})\times$$

$$\times\Big\{\langle 0|\theta(x_2^0-y_2^0)\{\psi_2(x_2),\tilde{\psi}_2(y_2)\}\theta(x_1^0-y_1^0)\{\psi_1(x_1),\tilde{\psi}_1(y_1)\}|0\rangle-$$

$$-\langle 0|\sum_{S_3}(-1)^{\pi(i_1i_2i_3)}\{[\{\psi_1(x_1),\Phi_{i_1}(\xi_{i_1})\},\Phi_{i_2}(\xi_{i_2})],\Phi_{i_3}(\xi_{i_3})\}|0\rangle\times$$

$$\times\theta(x_1^0-\xi_{i_1}^0)\theta(\xi_{i_1}^0-\xi_{i_2}^0)\theta(\xi_{i_2}^0-\xi_{i_3}^0)\Big\}, \qquad (5.15)$$

где $\pi(i_1i_2i_3)$ – четность перестановки S_3, переводящей набор (123) к ($i_1i_2i_3$).

Под знаком суммы по перестановкам S_3 начальному набору (123) сопоставляются аргументы $\xi_1=y_1$, $\xi_2=y_2$, $\xi_3=x_2$ и операторы

$$\Phi_1(\xi_1)=\tilde{\psi}_1(y_1),\quad \Phi_2(\xi_2)=\tilde{\psi}_2(y_2),\quad \Phi_3(\xi_3)=\psi_2(x_2).$$

Вакуумные средние под интегралом в (5.15) дают искомую функцию Грина четырех частиц в виде запаздывающих произведений. Приравняем теперь времена $x_1^0=x_2^0=t$ и $y_1^0=y_2^0=t'$. При этом член с суммой по перестановкам S'_3 исчезнет, в силу запаздывающих свойств его носителя. Итак, при равных временах мы получаем функцию Грина в виде среднего по вакууму от произведения двух запаздывающих антикоммутаторов, т.е. формулу (5.I).

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить А.А.Логунова, М.Д.Матеева и Р.Н.Фаустова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. a) V.Fock, B.Podolsky, Sow. Phys. 1, 798, 801 (1932).
B.Podolsky, V.Fock, Sow. Phys. 2, 275 (1932);

b) V.Fock, Sow. Phys. 6, 425 (1934).

c) Обзор по методу Тамма-Данкова можно найти у Г.Бете и Ф.Гофмана.Мезоны и поля, т. 2, Москва, 1957.
См. также Метод Тамма-Данкова, Проблемы современной физики, IO, Москва, И.Л., 1955.

2. a) W.Królikowski, J.Rzewuski, Nuovo Cimento, 2, 203 (1955); 4, 975 (1956).

b) G.M.Desimirov, M.D.Mateev, Nuovo Cimento 52A, 1366 (1967).

c) А.А.Логунов, В.Саврин, М.Тюрин и О.А.Хрусталев. ТМФ 6, I57 (I97I).

3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cimento 29, 380 (1963).

4. Р.Н.Фаустов, ДАН СССР I56, I329 (I964).

5. P.A.M.Dirac, R.Peierls, M.H.L.Pryce, Proc. Cambridge. Phil. Soc., 39, 201 (1942).

6. I.T.Todorov, Quasipotential approach to the two-body problem in quantum field theory, Proceedings of the International School of Subnuclear Physics "Etore Majorana" Erice, Sicily, 1971 and Trieste preprint IC/71/75.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1974 года.