ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Р2 - 7712

М.И.Широков

# ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ ЗАКОНА РАСПАДА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7712

М.И.Широков

# ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ ЗАКОНА РАСПАДА

*Направлено в ЯФ*

## *ВВЕДЕНИЕ*

Экспоненциальный закон распада $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$ следует из простой феноменологической формулы

$$dN(t) = -\lambda N(t)\, dt \qquad /1/$$

при естественном предположении о постоянстве $\lambda$ -вероятности распада в единицу времени. В квантовой теории амплитуда вероятности того, что нестабильное состояние $\psi_0$ в момент $t$ еще не распалось, дается формулой

$$p(t) = \langle \Psi_0, e^{-iHt} \Psi_0 \rangle = \int dE\, e^{-iEt} \Sigma |c(E)|^2, \qquad /2/$$

где $c(E)$ суть коэффициенты разложения $\psi_0$ по собственным векторам $\phi_E$ полного гамильтониана $H$, $\Sigma$ означает сумму или интеграл по всем значениям других переменных, кроме собственных значений $H$, от которых еще зависят $c(E)$. Чтобы $p(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\psi_0$ не должно разлагаться по нормируемым собственным векторам $H$ /с дискретными собственными значениями/. Если спектр $H$, как физического гамильтониана, ограничен снизу /например, $0 \leq E < \infty$ /, то из теоремы XII Пэли и Винера /1/ следует, что $p(t)$ должно убывать при $t \to \infty$ медленнее, чем экспонента /2/. При тех больших $t$, которые имеет смысл обсуждать в связи с экспериментом, эта асимптотика имеет вид малой неэкспоненциальной поправки /обычно $\approx t^{-m}$, $m > 1/2$ /, аддитивной к основной экспоненте. Исследования этой поправки показали, что в обычных экспериментах она ненаблюдаемо мала и что разные теоретические способы учета процесса регистрации продуктов распада еще более ее уменьшают или даже аннулируют /см., например,[3,4] и литературу, которая там цитируется/. Однако эти работы не закрывают принципиальной возможности эксперимента, в котором неэкспоненциальность можно заметить.

В данной работе обсуждается теоретический аспект этого вопроса: действительно ли неэкспоненциальная асимптотика есть неизбежное следствие общих принципов квантовой механики? В рамках точно решаемой модели с помощью нового определения закона распада мы покажем, что существует такое описание нестабильной частицы, при котором $N(t)$ убывает при $t\to\infty$ не медленнее экспоненты. В модели можно ввести другие описания нестабильной частицы, для которых новое определение закона распада сводится к /2/. Оказывается, что таких описаний много и можно выбрать такие, что соответствующий закон распада будет не отличимым от экспоненциального вплоть до сколько угодно больших /но конечных/ времен. Модель позволяет исследовать не только распад заданного начального состояния $\psi_0$, но и распад состояния "приготовленного" /параметрическим возбуждением/. Сравнение с моделью Ли изложено в заключении.

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Модель описывает нерелятивистский электрон /мезон/ в осцилляторном потенциале, дипольно взаимодействующий с поперечным вторично-квантованным электромагнитным полем /Ван Кампен [5]/

$$H=\frac{1}{2m_0}(\bar{p}-e\bar{A})^2+m_0\kappa^2\bar{q}^2/2+\frac{1}{8\pi}\int d^3x[\,\bar{E}^2(\vec{x})+ (\mathrm{rot}\,\bar{A}(\vec{x}))^2\,]. \qquad /3/$$

Положено $h=1$ и $c=1$. Чтобы дипольное взаимодействие не очень отличалось от истинного, следует ввести размазку исходного локального взаимодействия



$$e\vec{p}\vec{A}(\vec{q})\to e\vec{p}\int d^3\!\int d\,x\vec{A}(x)\,F(|\vec{x}-\vec{q}|)\equiv e(\vec{p}\,\vec{\tilde{\tilde{A}}}(\vec{q}))\,. \qquad /4/$$

Формфактор $g(|\vec{k}|)=\int d\,x\,\exp(-i\vec{k}\vec{x})\,F(|\vec{x}|)$ должен подавлять взаимодействие с фотонами, обладающими энергиями $|\vec{k}|\,\tilde{\tilde{>}}\,1/\ell$, где $\ell$ - "размер осциллятора": $\ell=1/\sqrt{m_0\kappa}$. С другой стороны, не должно заметно искажаться взаимодействие с мягкими фотонами. Этим требованиям удовлетворяет, например, функция $g(k)=\mu/\sqrt{k^2+\mu^2}$, если $\kappa\ll\mu\ll\sqrt{\mu_0\kappa}$. Поскольку мала вероятность того, что координата $q$ не сильно возбужденного электрона заметно больше, чем $\ell$, то можно считать, что $kq\ll 1$ /точнее, мала вероятность того, что $kq\geq 1$/. Ввиду этого в разложении $\tilde{A}(\vec{q})$ по электрическим и магнитным мультиполям заметны только первые члены разложения и электрон взаимодействует, в основном, с дипольными фотонами. В гамильтониане модели $H$ оставлено только такое взаимодействие /это эквивалентно замене $\tilde{A}(\vec{q})$ на $\tilde{A}(0)$/.

В [6] показано, что $H$ можно представить в виде суммы трех коммутирующих гамильтонианов одинакового вида: $H=h_x+h_y+h_z$. Можно рассматривать только один из них, и в дальнейшем под гамильтонианом модели мы подразумеваем

$$h=\frac{\kappa^2}{2}p_1^2+\frac{1}{2}q_1^2+\frac{1}{2}\int dk(q_k^2+k^2p_k^2)+ + \sqrt{2\kappa}\int_0^\infty dk\sqrt{k}\,\epsilon(k)\,(p_1p_k)+[\int_0^\infty dk\sqrt{k}\,\epsilon(k)\,p_k]^2. \qquad /5/$$

Здесь $p_1=p_x/\sqrt{m_0\kappa^2}$, $q_1=q_x\sqrt{m_0\kappa^2}$, $\epsilon(k)=-e\,g(k)\sqrt{2k/3\pi m_0}$, $g(k)=\mu/\sqrt{k^2+\mu^2}$. Эрмитовые операторы $q_k$ и $p_k$ введены вместо операторов рождения-уничтожения дипольных фотонов $a_k^+$, $a_k$:

$$q_k=i\sqrt{\frac{k}{2}}(a_k-a_k^+)\,;\; p_k=\sqrt{\frac{1}{2k}}(a_k+a_k^+)\,;\; [a_k,a_{k'}^+]=\delta(k-k'). \qquad /6/$$

Вместо $q_1$ и $p_1$ можно ввести операторы $a_1^+$, $a_1$:

$$a_1 = (\sqrt{\kappa}\, p_1 - i\check{q}_1/\sqrt{\kappa})/\sqrt{2}\,;\quad [\,a_1\,,\, a_1^+\,] = 1\,. \qquad /7/$$

**С помощью $a_1^+$ состояние "электрон находится в первом возбужденном состоянии, фотонов нет", записывается как $a_1^+\Omega_0$ / $\Omega_0$ определяется уравнениями $a_1\Omega_0 = 0$, $a_k\Omega_0 = 0$ для всех $k$ /. Будем говорить, что это состояние с одним фононом и что $a_1^+$ рождает фонон.**

**Гамильтониан /5/ имеет вид суммы двух квадратичных форм: форма от $q$ плюс форма от $p$. Мы не будем находить собственных векторов $h$, а вместо этого приведем к виду "суммы квадратов". Заметим, что форма от $q$ уже имеет такой вид, причем матрица ее коэффициентов единичная. Если привести форму от $p$ к "сумме квадратов" ортогональным преобразованием $p = T\hat{p}, q = T\hat{q}$, то форма от $q$ сохранит свой вид и задача будет решена. При этом $\hat{q}$ и $\hat{p}$ будут иметь канонические коммутации. Эта процедура изложена в приложении А. "Диагонализированный" таким образом гамильтониан можно записать в двух формах:**

$$h = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega\,(\hat{q}_\omega^2 + \omega^2 \hat{p}_\omega^2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega\,\omega\,(b_\omega^+ b_\omega + b_\omega b_\omega^+)\,; \qquad /8/$$

$$b_\omega = (\sqrt{\omega}\,\hat{p}_\omega - i\hat{q}_\omega/\sqrt{\omega})/\sqrt{2}\,,\quad [b_\omega, b_{\omega'}^+] = \delta(\omega - \omega')\,. \qquad /9/$$

**Приведем выражение $a_1$ через $b_\omega$:**

$$a_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega\, U_{1\omega}\left[\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\omega}} + \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}\right) b_\omega + \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\omega}} - \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}\right) b_\omega^+\right]. \qquad /10/$$

**Функция $U_{1\omega}$ выписана в приложении А.**

## *2. НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПАДА*

**Операторы $a_k^+$, $a_k$, $a_1^+$, $a_1$ /см. /6/, /7// диагонализуют свободную часть $h$ /первая строчка в /5// и рождают или уничтожают так называемые "голые" частицы.**



**Бесчастичный вектор $\Omega_0$ не совпадает с собственным вектором $h$ с наименьшим собственным значением /физический вакуум $\Omega$ /.**

**При попытке описать такую нестабильную систему как возбужденный электрон вектором $a_1^+\Omega_0$ мы сталкиваемся с двумя трудностями:**

**1/ В разложении $a_1^+\Omega_0$ по собственным векторам $h$ присутствует $\Omega$. Это нормируемый вектор, и амплитуда /2/ в случае $\psi_0 = a_1^+\Omega_0$ стремится при $t \to \infty$ не к нулю, а к константе.**

**2/ Бесчастичное состояние $\Omega_0$ тоже нестабильное, как и $a_1^+\Omega_0$: с течением времени оно переходит в состояния, содержащие фотоны и фононы.**

**Заметим, что такие же трудности возникают при попытке описать нестабильные частицы, распадающиеся за счет слабого взаимодействия, собственными векторами гамильтониана, состоящего из свободной части и сильных взаимодействий.**

**Вместо /2/ мы предлагаем другое определение закона распада, которое позволяет изучить распад "голых" нестабильных состояний. В /1/ фигурирует $N(t)$ - число частиц в момент $t$. Естественно попробовать сопоставить ему среднее $\langle U\psi_0, \hat{N}U\psi_0\rangle$ от оператора числа нестабильных частиц $\hat{N}$ в состоянии $U\psi_0 \equiv \exp(-iHt)\psi_0$. Однако в частном случае $\psi_0 = a_1^+\Omega_0$, $\hat{N} = a_1^+ a_1$ это среднее не стремится к нулю при $t \to \infty$ по причине 1/. Вычтем из него среднее $\langle U\Omega_N \hat{N}\, U\Omega_N\rangle$, где $\Omega$ - собственный вектор $\hat{N}$ с нулевым собственным значением:**

$$N(t) = \langle e^{-iHt}\psi_0, \hat{N}e^{-iHt}\psi_0\rangle - \langle e^{-iHt}\Omega_N, \hat{N}e^{-iHt}\Omega_N\rangle; \qquad /11/$$

$$\hat{N}\Omega_N = 0\,.$$

**Тогда при $\psi_0 = \Omega_N$ получаем $N(t) = 0$ при всех $t$. Эффект 2/ таким образом "обезвреживается" путем объявления его "фоном", который надо вычитать. Одновременно оказывается /см. следующий раздел/, что $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому /11/ может претендовать на роль закона распада.**

**Как связаны определения /11/ и /2/? Разложим $\hat{N}$ по**

операторам проектирования $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$ на состояния с определенным числом $n$ нестабильных частиц /эти состояния содержат произвольное число частиц - продуктов распада/: $\hat{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\hat{P}_n$. Для оператора $a_1^+ a_1$ имеем

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int dk_1 \dots dk_m |a_{k_1}^+ \dots a_{k_m}^+ (a_1^+)^n \Omega_0 > \times$$

$$\times < \Omega_0 (a_1)^n a_{k_1} \dots a_{k_m}|.$$

Вставляя разложение $a_1^+ a_1 \equiv \hat{N}_1 = \Sigma n \hat{P}_n$ в /11/, получаем

$$N_1(t) = 1\cdot\{<U\psi_0, a_1^+\Omega_0><a_1^+\Omega_0, U\psi_0> +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}<U\psi_0, a_{k_1}^+ \dots a_{k_m}^+ a_1^+\Omega_0><a_{k_1}^+ \dots a_{k_m}^+ a_1^+\Omega_0, U\psi_0> -$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}<U\Omega_0, a_{k_1}^+ \dots a_{k_m}^+ a_1^+\Omega_0><a_{k_1}^+ \dots a_{k_m}^+ a_1^+\Omega_0, U\Omega_0>\} +$$

$$+ 2\cdot\{\dots\} + \dots$$

/12/

Первый член справа при $\psi_0 = a_1^+\Omega$ равен $|<a_1^+\Omega_0, U\, a_1^+\Omega_0>|^2$ и совпадает с $|p(t)|^2$, см. /2/. Остальные члены не равны нулю: в "голом" формализме однофононное состояние $a_1^+\Omega_0$ может переходить в состояния вида "один фонон плюс продукты распада" и даже "несколько фононов плюс продукты распада". В разделе 4 мы обсуждаем другие описания фонона, когда такие переходы отсутствуют и /11/ совпадает с /2/.

По сравнению с /2/ в определении /11/ фигурирует дополнительное понятие: оператор числа частиц. Однако все реальные теории должны описывать рождение и уничтожение частиц, и во вторично-квантованном представлении таких теорий должен быть такой оператор.



## 3. РАСПАД "ГОЛОЙ" НЕСТАБИЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

Закон распада /11/ однофононного состояния $\psi_0 = a_1^+\Omega_0$ при $\hat{N} = a_1^+ a_1$ может быть представлен в виде

$$N_1(t) = <a_1^+\Omega_0, a_1^+(t)\, a_1(t)\, a_1^+\Omega_0> - <\Omega_0, a_1^+(t)\, a_1(t)\, \Omega_0'>.$$

/13/

Здесь $a_1(t) = \exp(iht)\, a_1 \exp(-iht)$ - гейзенберговский оператор. Умножая обе стороны /10/ слева на $\exp iht$ и справа на $\exp(-iht)$, получим выражение $a_1(t)$ через гейзенберговские операторы $b_\omega^+(t) = b_\omega \exp i\omega t$ и $b_\omega(t) = b_\omega \exp(-i\omega t)$. Подставляя в него обратное выражение $b_\omega^+$, $b_\omega$ через $a_1^+, a_1, a_k^+, a_k$

$$b_\omega = \frac{1}{2} U_{1\omega}\left[\left(\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} + \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}}\right) a_1 + \left(\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} - \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}}\right) a_1^+\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty dk\,(XU)_{k\omega}\left[\left(\sqrt{\frac{\omega}{k}} + \sqrt{\frac{k}{\omega}}\right) a_k + \left(\sqrt{\frac{\omega}{k}} - \sqrt{\frac{k}{\omega}}\right) a_k^+\right],$$

/14/

получаем выражение $a_1(t)$ через операторы $a_1^+$, $a_1$, $a_k^+$, $a_k$ /для которых $\Omega_0$ является бесчастичным вектором/. Подстановка его в /13/ дает $N_1(t) = |I_1|^2 + |I_2|^2$, где

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^\infty d\omega\, U_{1\omega}^2 (e^{it\omega} - e^{-it\omega})\, \frac{\kappa^2 - \omega^2}{\omega\kappa};$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty d\omega\, U_{1\omega}^2 \left[e^{-it\omega}\frac{\kappa+\omega}{\omega} + e^{it\omega}\frac{\kappa-\omega}{-\omega}\right].$$

/15/

Функция $U_{1\omega}^2$ четная, см. приложение А, поэтому подынтегральные выражения - четные функции $\omega$ и в $I_1$ и $I_2$ можно $\int_0^\infty$ заменить на $\int_{-\infty}^\infty$. Ввиду этого асимптотика $N_1(t)$ в отличие от $|p_1(t)|^2$ уже не обязана быть неэкспоненциальной.

Изложим схему вычисления $I_1$ /$I_2$ вычисляется аналогично/.

$$I_1 = \frac{1}{4\kappa}(I_1' + I_1'') \; ; \; I_1' = -\kappa^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, U_{1\omega}^2 e^{-it\omega} / \omega \; ;$$

$$I_1'' = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, U_{1\omega}^2 \, \omega \, e^{-it\omega} .$$

С помощью формул приложения А представим $U_{1\omega}^2$ в двух видах:

$$U_{1\omega}^2 = \frac{i\omega}{\pi} \left\{ \frac{1+\phi(\omega)}{\omega^2(1+\phi)-\kappa^2} + \frac{1+\phi^*(\omega)}{\omega^2(1+\phi^*)-\kappa^2} \right\} =$$

$$= \frac{i\omega}{\pi} \left\{ \frac{1+\phi}{\omega^2(1+\phi)-\kappa^2} - \frac{1}{\omega^2} - \left[ \frac{1+\phi^*}{\omega^2(1+\phi^*)-\kappa^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \right\}. \qquad /16/$$

Функция $\phi^*(\omega) = \rho(\omega) - i\eta(\omega)$ является пределом при $\mathrm{Im}\, z \to -0$ функции $\phi^-(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \eta(k) / (k-z)$, аналитической в нижней полуплоскости. Оказывается, что выражение $z^2(1+\phi^-(z)) - \kappa^2$ там не имеет нулей и функция $[1+\phi^-(z)][z^2(1+\phi^-/z)] - \kappa^2]^{-1}$ аналитична внизу. Поэтому в $I_1'$ равен нулю интеграл

$$\int d\omega \exp(-it\omega)\,(1+\phi^*)\,[\omega^2(1+\phi^*) - \kappa]^{-1} \qquad \text{и}$$

$$I_1' = -\frac{i\kappa^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-it\omega} \frac{1+\phi}{\omega^2(1+\phi)-\kappa^2}, \qquad /17/$$

$$\phi(\omega) = \frac{i\beta}{\omega + i\mu}, \qquad \beta = \frac{2e^2\mu^2}{3m_0}.$$

Аналогично после подстановки в $I_1''$ второго представления /16/ для $U_{1\omega}^2$ получаем

$$I_1'' = -\frac{i\kappa^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-it\omega} \, [\omega^2(1+\phi) - \kappa^2]^{-1}. \qquad /18/$$

Для вычисления /17/ и /18/ по теореме о вычетах нужно найти нули выражения $z^2[1+i\beta/(z+i\mu)] - \kappa^2$/в нижней полуплоскости/. Исследование соответствующего кубического уравнения $z^2(z+i\mu+i\beta) - \kappa^2(z+i\mu) = 0$ показывает, что оно имеет следующие корни: 1/ $z = z_+ = \kappa' - i\gamma$, где $\kappa' \cong \kappa$ и $\gamma \cong e^2\kappa^2/3m_0$ ; 2/ $z = z_- = -z_+^* = -\kappa' - i\gamma$ ; 3/ $z = z_0 = i\mu'$ ; $\mu' \cong \mu + \beta + 2\beta^2/\mu$. Можно пренебречь вкладом от вычета в полюсе $z_0$ /происходящим от формфактора/. Он равен быстро затухающей $\exp(-\mu' t)$, $\mu' \gg \kappa \gg \gamma$, умноженной на малый коэффициент /порядка $e^2\kappa/m_0$ /. Результат для $N_1(t)$ можно представить в виде

$$N(t) = e^{-2\gamma t}[1 + e^2\chi(t)], \qquad 0 \le t < \infty, \qquad /19/$$

где $e^2\chi(t)$ мало по сравнению с 1 и содержит члены, осциллирующие с частотой $\kappa' \cong \kappa$ /типа $\gamma\kappa^{-1} \sin 2\kappa t$ /. Таким образом, в $N_1(t)$ нет членов, убывающих при $t \to \infty$ медленнее, чем экспонента: $N_1(t) < (1+e^2)\exp(-2\gamma t)$. Заметим еще, что при $t = 0$ имеем $dN(t)/dt = -2\gamma \ne 0$, ср. [7].

Формулы /2/ и /11/ определяют распад начального нестабильного состояния, "заданного руками". Чтобы эти формулы имели отношение к эксперименту, следует указать процедуру, с помощью которой такое состояние может быть "приготовлено" /хотя бы в виде "мысленного" эксперимента/. В рамках нашей модели можно описать такого рода процедуру.

Пусть до момента $t = 0$ имеем состояние физического вакуума. Оно стабильно. В момент $t = 0$ начинаем включать электрическое поле $E(t)$, которое можно считать однородным в малой области, где локализован электрон. Соответствующая потенциальная энергия $eqE(t)$ может быть объединена вместе с членом $m_0\kappa^2 q^2/2$ в выражение вида $\frac{m_0\kappa^2}{2}(q + r(t))^2 + c$ -число. Формально в момент $t = 0$ осцилляторная яма начинает смещаться как целое, так что центр ямы уже не совпадает с началом координат. Пусть к моменту $t = \tau$ поле исчезает и параметр $r(t \ge \tau) = 0$. Параметрически возбужденный полный гамильтониан $H_t = H_{t=0} + q_1 r_1(t)$, $r_1 = r\sqrt{m_0\kappa^2}$, в терминах операторов $b_\omega^+$, $b_\omega$ имеет вид

$$H_t = \int_0^{\infty} d\omega \, \omega \, b_\omega^+ b_\omega + \int_0^{\infty} d\omega \, U \; i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(b_\omega - b_\omega^+)\, r_1(t). \qquad /20/$$

Уравнение $db(\omega,t)/dt = i[H_t, b(\omega,t)]$ для гейзенберговского оператора $b(\omega,t)$ имеет простое решение

$$b(\omega,t) = e^{-i\omega t}[b_\omega - \sqrt{\frac{\omega}{2}}U_{1\omega}\rho(\omega,t)];\ \rho(\omega,t) = \int_0^t dt' e^{i\omega t'} r(t'). \qquad /21/$$

Можно найти и оператор эволюции $V(t,0)$, такой, что $b(\omega,t) = V^+ b_\omega V$, но он нам не понадобится.

В результате описанной процедуры в момент $t=\tau$ имеем состояние $V(\tau,0)\Omega$, в котором есть и фононы и фотоны. Такая ситуация должна быть типичной для любого реального процесса приготовления: вместе с нестабильными частицами всегда рождаются и другие частицы, включая продукты их распада. Формулу /2/ можно применять только в том случае, если дополнительные экспериментальные устройства выделяют далее именно нестабильные частицы /наша модель таких устройств не описывает /. Однако мы можем узнать, как меняется со временем число нестабильных частиц, если в момент $t=\tau$ имелось приготовленное состояние $V(\tau,0)\Omega$. Это можно сделать с помощью среднего от оператора $a_1^+a_1$ в состоянии $V(t,0)\Omega$, $t>\tau$. Как и в /11/, из этого среднего придется вычесть $<\Omega, a_1^+ a_1 \Omega>$, поскольку и без параметрического возбуждения среднее число "голых" фононов в состоянии $\Omega$ не равно нулю.

$$N_r(t) = <V(t,0)\Omega, a_1^+ a_1 V(t,0)\Omega> - <\Omega, a_1^+ a_1 \Omega> =$$

$$= <\Omega, a_1^+(t)\, a_1(t)\,\Omega> - <\Omega, a_1^+ a_1 \Omega>. \qquad /22/$$

Оказывается, что /22/ $\to 0$ при $t\to\infty$. Для вычисления /22/ достаточно выразить $a_1(t)$ через $b(\omega,t)$, пользуясь /10/, и далее подставить /21/.

$$N_r(t) = \frac{1}{8}|I(t)|^2;\quad I(t) = \sqrt{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, U_{1\omega}^2 e^{-it\omega}\rho(\omega,t) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, U_{1\omega}^2\,\omega\, e^{-it\omega}\rho(\omega,t). \qquad /23/$$



Единственное существенное отличие /23/ от /15/ заключается в наличии функции $\rho(\omega,t)$, см. /21/. При $t>\tau$ имеем $\rho(\omega,t) = \rho(\omega,\tau)$, т.к. $r(t>\tau)=0$. $\rho(\omega,\tau)$ есть целая функция комплексного переменного $\omega$, убывающая в верхней полуплоскости, а внизу растущая не быстрее, чем $\exp i\omega\tau$. Поэтому при $t>\tau$ можно, как и в случае $N_I(t)$, замыкать контур интегрирования снизу. Результат вычислений /23/ представим в виде

$$N_r(t) = \frac{\kappa}{2}|\rho(z_+,\tau)|^2 e^{-2\gamma t}[1+e^2\chi_r(t)];\ \tau<t<\infty. \qquad /24/$$

Здесь $z_+ \simeq \kappa - i\gamma$ и $e^2\chi_r(t) \ll 1$. Подчеркнем, что $N_r(t)$ при $t>\tau$ не зависит от деталей функции $r(t)$, но определяется только интегральной величиной /числом/ $\rho(z_+,\tau)$.

## 4. ОПИСАНИЕ НЕСТАБИЛЬНЫХ КВАНТОВ С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ-УНИЧТОЖЕНИЯ

В рассматриваемой модели можно предложить другое описание возбужденных состояний электрона /фононов/, которое не имеет недостатков "голого" описания, упомянутых в начале раздела 2. Соответствующие операторы рождения-уничтожения мы назовем физическими. Одно из их главных свойств - совпадение их бесчастичного вектора со стабильным физическим вакуумом *. Далее мы перечислим требования, которым должны удовлетворять эти операторы, и покажем, как можно эти требования выполнить.

1/ Спектр индексов, нумерующих физические операторы $\alpha$ фононов и фотонов, должен быть таким же, как у "голых": $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_k\}$, $0<k<\infty$. Это требование не

* Термин "одетый" /8/ мы не используем, поскольку в нашей модели нельзя потребовать, чтобы еще и одночастичные состояния были стабильными /однофононные состояния должны распадаться/.

позволяет считать физическими операторы $b_\omega$, $0<\omega<\infty$, диагонализирующие полный гамильтониан, см. /6/ и приложение А.

2/ $a$ должны удовлетворять каноническим коммутационным соотношениям, характерным для операторов рождения-уничтожения /ср. /6/, /7//.

3/ $a_I\Omega = 0$ и $a_k\Omega = 0$ для всех $k$.

Эти первые требования выполняются, если операторы уничтожения $a_I$, $a_k$ выражаются только через $b_\omega$ /но не через $b^+_\omega$/ с помощью унитарного преобразования

$$a_I = \int_0^\infty d\omega\, W_{I\omega} b_\omega, \quad a_k = \int_0^\infty d\omega\, W_{k\omega} b_\omega, W^+W = WW^+ = 1. \qquad /25/$$

Из /25/ следует, что оператор полного числа физических квантов /фононов и фотонов/ $a_I^+ a_I + \int dk\, a_k^+ a_k$ равен $\int d\omega\, b^+_\omega b_\omega$ при любом $W$. Следовательно, он коммутирует с гамильтонианом /8/ и сохраняется. Поэтому в правой части /12/ в случае $N = a_I^+ a_I$ и $\psi_0 = a_I^+\Omega$ остается только первый член: $a_I^+\Omega$ переходит только в $a_I^+\Omega$ или $a_k^+\Omega$. Новое определение /11/ закона распада переходит в /2/.

$$\tilde N_I(t) = \langle a_I^+\Omega, a_I^+(t)\, a_I(t)\, a_I^+\Omega\rangle = |\langle a_I^+\Omega, e^{-itH}\, a_I^+\Omega\rangle|^2 =$$

$$= |\int_0^\infty d\omega\, e^{-it\omega} W^2_{I\omega}|^2, \qquad /26/$$

и поэтому неизбежны неэкспоненциальные поправки.

Заметим, что к виду /8/ приводятся разные исходные гамильтонианы /разные $m_0$, $\kappa$, $e$, формфакторы и т.п./. И наоборот, из /8/ преобразованием, обратным /25/, можно получать гамильтонианы $h_w$ с разной динамикой в зависимости от выбора $W$. Поэтому далее потребуем:

4/ $S$-матрица рассеяния физического фотона на электроне /получаемая из $h_w$/ совпадает с $S$-матрицей, получаемой из первоначального гамильтониана /например, процедурой, описанной в приложении Б/.

Забегая вперед, укажем, что 4/ не фиксирует полностью $W$. Оказывается возможным выдвинуть и удовлетворить еще одно требование:

5/ неэкспоненциальные поправки в законе распада возбужденного электрона должны быть ненаблюдаемо малыми.

Покажем, как можно одновременно выполнить требования 4/ и 5/. Воспользуемся тем, что нам известны два конкретных преобразования вида /25/. В /6/ гамильтониан вида

$$\tilde\kappa\, \tilde a_I\; \tilde a_I + \int_0^\infty d\nu\, \nu\, \tilde a_\nu^+ \tilde a_\nu + \int_0^\infty d\nu\, \tilde E(\nu)\, (\tilde a_I^+ \tilde a_\nu + \tilde a_\nu \tilde a_I^+) \qquad /27/$$

был приведен к /8/ преобразованием $\tilde a = Ob$ вида /25/ с действительным $W$ /т.е. ортогональным/.

$$O_{I\omega} = \tilde E(\omega)\{[\omega - \tilde\kappa + \Delta(\omega)]^2 + \Gamma^2(\omega)\}^{-1/2},$$

$$\Gamma(\omega) = \pi \tilde E^2(\omega), \quad \Delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu\, \Gamma(\nu)}{\nu - \omega}, \qquad /28/$$

$$O_{\nu\omega} = \{P\frac{\tilde E(\nu)\, \tilde E(\omega)}{\nu - \omega} + \delta(\nu - \omega)[\omega - \tilde\kappa + \Delta(\omega)]\}/|\omega - \tilde\kappa + \Delta + i\Gamma|. \qquad /29/$$

Преобразование $O$ определяется константой $\tilde\kappa$ и действительной функцией $\tilde E$, которые могут быть произвольными, лишь бы выполнялось неравенство $\int d\nu\, \tilde E^2(\nu)/\nu < \tilde\kappa$, см. приложение Б в /6/. Обратное преобразование $O^T$ переводит /8/ в /27/.

Другое преобразование затрагивает только фотонные операторы $\tilde a_\nu = \int Y_{\nu k} a_k$. Оно тоже ортогональное и переводит $\int_0^\infty d\nu\, \nu\, \tilde a_\nu^+ \tilde a_\nu$ из /27/ в

$$\int dk \int dk' [k\,\delta(k-k') + \xi(k)\,\xi(k')]\, a_k^+ a_{k'},$$

$$Y_{\nu k} = \{P\frac{\xi(\nu)\, \xi(k)}{k - \nu} + \delta(k-\nu)[1 + r(k)]\}\cdot\{[1 + r(k)]^2 + j^2(k)\}^{-1/2}. \qquad /30/$$

Здесь $j(k) = \pi\xi^2(k)$, $r'(k) = \frac{P}{\pi}\int_0^\infty d\nu\, j(\nu)/\nu - k$. Это преобразование определяется заданием произвольной функции $\xi(k)$ /лишь бы сходился интеграл $r'(k)$ /.

Мы собираемся в качестве искомого W взять произведение соответственно подобранных преобразований O и Y.

Чтобы объяснить, как выбираются $\tilde{E}$ и $\tilde{\kappa}$, определяющие O, опишем сначала качественные особенности S-матрицы рассеяния дипольного фотона в нашей модели. Она определяется одной фазой рассеяния $S(k) = \exp(-2i\delta(k))$, см. приложение Б. Всюду, кроме $k \approx \kappa$, $S(k)$ близко к 1. Будем считать, что $\delta(k=\infty)=0$. При $k\approx\kappa$ фаза $\delta(k)$ проходит через резонансное значение $\pi/2$ и при $k\to 0$ стремится к $\pi$. Полуширина резонанса равна $\gamma = \kappa\eta(\kappa)/2 = \pi\kappa\epsilon^2(\kappa)/2$, см. /Б.8/. Функция $\tilde{E}(\nu)$ должна быть такой, чтобы фаза $\tilde{\delta}$ рассеяния фотонов, описываемых операторами $\tilde{a}_\nu = \int d\omega\, O_{\nu\omega} b_\omega$ /см. приложение Б/.

$$\mathrm{tg}\,\tilde{\delta}(\nu) = \pi\tilde{E}^2(\nu)/[\nu - \tilde{\kappa} + \Delta(\nu)], \qquad /31/$$

удовлетворяла условию $\delta(\nu) - \tilde{\delta}(\nu) \ll 1$ при всех $\nu$. Это означает, что $\tilde{\delta}$ должна быть мала вне области резонанса, а внутри этой области- совпадать с $\delta$, т.е. $\tilde{\delta}$ должна проходить через резонанс с той же шириной, что и $\delta$. Такое поведение $\tilde{\delta}$ обеспечивает, например, функция $\tilde{E}(\nu)$, медленно меняющаяся, равная нулю вдали от резонанса, а внутри интервала $(\kappa-\gamma, \kappa+\gamma)$ проходящая через значение $\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,\epsilon^2(\kappa)$. Последнее условие обеспечивает нужную ширину резонанса $\pi\tilde{E}^2(\kappa) = \gamma$, см. /31/. После выбора $\tilde{E}$ подбирается $\tilde{\kappa}$ так, чтобы знаменатель $\nu - \tilde{\kappa} + \Delta$ в /31/ обращался в нуль в точке, где $\delta = \pi/2$.

Требование 4/ приближенно выполнено. Требование 5/ будет удовлетворено путем подбора поведения $\tilde{E}$ вдали от резонанса. Чтобы пояснить, как это делается, рассмотрим закон распада /26/ в частном случае, когда $W_{1\omega} = O_{1\omega}$, а $O_{1\omega}$ определяется функцией $\tilde{E}(\nu) = E(\nu) = \sqrt{2\kappa}\,\nu\epsilon(\nu)/(\nu+\kappa)$, обеспечивающей указанное выше



поведение $\delta$. Асимптотика /26/ может быть найдена последовательным интегрированием по частям ($dv = \exp(i\omega t)$, $u = O^2_{1\omega}$), которое проводится до тех пор, пока $d^n O^2_{1\omega}/d\omega^n$ не перестанет обращаться в нуль при $\omega = 0$ [9]

$$\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega t} O^2_{1\omega} = \frac{1}{(it)^n}\,\frac{e^{-i\omega t}}{-it}\,\frac{d^n O^2_{1\omega}}{d\omega^n}\Big|_0^\infty - \qquad /32/$$

$$- \frac{1}{(it)^n}\int_0^\infty d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{-it}\,\frac{d^{n+1}O^2_{1\omega}}{d\omega^{n+1}}$$

/при $\omega\to\infty$ функция $O^2_{1\omega}$ и все ее производные стремятся в нулю/. При малых $\omega$ имеем $O^2_{1\omega} \approx E^2(\omega) \approx \omega^3$, см. /28/, и поэтому /32/ $\approx t^{-4}$, ср. [10]. Теперь ясно, что 5/ можно выполнить, изменив $E(\nu)$ вблизи малых $\nu$, например, так:

$$\tilde{E}(\nu) = \frac{\nu^m}{\nu^m + \lambda}\,E(\nu) \quad \text{или} \quad \tilde{E}(\nu) = e^{-\lambda/\nu^m}\,E(\nu);$$

$$\lambda(\nu) = A\kappa^m m!\left[1 + \frac{Am!\,\nu^m}{\gamma^m}\right]^{-1}. \qquad /33/$$

Под $\lambda$ вообще можно понимать функцию, большую при $\nu=0$ и малую при $\nu>\kappa/2$. Из /32/ следует, что, увеличивая m и A, можно сделать неэкспоненциальные поправки сколь угодно малыми. Соответственно, если в качестве $\tilde{E}(\nu)$ брать функцию, не равную нулю лишь вблизи области резонанса, то надо, чтобы на обоих концах этой области она спадала к нулю очень гладко, т.е. так, как функция /33/ стремится к нулю при $\nu\to 0$.

Выбрав $\tilde{E}(\nu)$ и $\tilde{\kappa}$ и тем самым преобразование O, далее надо подобрать преобразование Y /т.е. функцию $\xi$/ так, чтобы условие 4/ точно выполнялось для физических операторов, определенных формулой /25/, где $W = Y^T O$, т.е. $W_{1\omega} = O_{1\omega}$ и $W_{k\omega} = \int d\nu\, Y_{k\nu} O_{\nu\omega}$ /см. приложение Б/.

Обсудим кратко закон распада /22/ состояния, приготовленного параметрическим возбуждением, в случае $a^+_1 a_1 \to a^+_1 a_1$, см. раздел 3. Он имеет вид

$$\tilde{N}_r(t) = \langle V(t,0)\,\Omega, a^+_1 a_1 V(t,0)\,\Omega \rangle = \qquad /34/$$

$$= \left| \int_0^\infty d\omega\, e^{-it\omega}\, W_{1\omega} U_{1\omega} \sqrt{\frac{\omega}{2}}\, \rho(\omega, t) \right|^2 .$$

Функция $\rho(\omega, t)$, см. /21/, вообще говоря, не равна нулю при $\omega = 0$ и не влияет на асимптотику /34/. Величина неэкспоненциальных поправок в /34/ будет сколь угодно малой, если функция $\tilde{E}(\omega)$, определяющая $W_{1\omega} = O_{1\omega}$, выбрана так, как описано выше.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели Ван-Кампена получены следующие результаты. Новое определение закона распада /11/ позволяет предложить описание возбужденного состояния электрона /фонона/ с помощью "голых" операторов рождения-уничтожения. При таком описании число фононов в момент $t$ убывает не медленнее экспоненты при $t \to \infty$.

Описание фонона с помощью физических операторов рождения-уничтожения /бесчастичный вектор которых совпадает с физическим вакуумом/ приводит к совпадению /11/ с обычным определением закона распада /2/, и, как следствие, неизбежно возникает неэкспоненциальная асимптотика.

Физические операторы определяются неоднозначно. Среди них есть такие, что соответствующий закон распада оказывается на самом деле экспоненциальным вплоть до сколь угодно больших /но конечных/ времен.

Исследование закона распада состояния, "приготовленного" параметрическим возбуждением, обнаруживает, что асимптотика в этом случае не зависит от способа приготовления, а зависит в основном от того, какие операторы выбраны для описания фонона.



Исследование деталей временного хода распада возможно только в точно решаемых моделях. Такие исследования ранее проводились в модели Ли с нестабильной V-частицей. Подчеркнем одно существенное отличие рассмотренной модели от модели Ли. Первая есть упрощенный вариант довольно реальной квантовой теории с локальным взаимодействием. Ее физический вакуум $\Omega$ не совпадает с "голым" $\Omega_0$. Модель Ли не является приближением к какой-либо локальной теории. В ней $\Omega = \Omega_0$, так что ее "голые" операторы следует сопоставить с одним из вариантов физических операторов рассмотренной модели. Как и в нашей модели, возможны разные описания нестабильной частицы с одними теми же основными характеристиками: "массой" и "временем жизни". Леви /11/ показал, что V-частицу можно описать таким вектором состояния, что неэкспоненциальные поправки в законе ее распада будут сколь угодно малыми. Это было сделано по-другому, нежели в разделе 4, в частности, не обсуждалось требование совпадения S-матриц. В рамках модели Ли никто не рассматривал какой-либо конкретный механизм приготовления нестабильного состояния /вряд ли модель позволяет это сделать/.

Как рассмотренная модель, так и модель Ли неполны в том смысле, что выбор описания нестабильной частицы не фиксируется видом взаимодействия или какими-либо другими характеристиками модели. А от этого выбора зависят наблюдаемые в принципе детали временного хода распада, в том числе величина неэкспоненциальной поправки.

Благодарю Б.Н.Валуева за полезные обсуждения.

### Приложение А

Приведение квадратичной формы от $p$, записанной в /5/, к виду "суммы квадратов" удобно сделать в два этапа. Сначала приведем форму от $p_k$, т.е.

$$\int_0^\infty dk\, k^2 p_k^2 + 2\left[\int dk \sqrt{k}\,\epsilon(k)\, p_k\right]^2,$$

к виду $\int d\nu\, \nu^2 (p'_\nu)^2$ ортогональным преобразованием фотонных операторов

$$p_k = \int_0^\infty d\nu\, X_{k\nu}\, p'_\nu ; \quad q_k = \int_0^\infty d\nu\, X_{k\nu}\, q'_\nu ; \; [q'_\nu, p'_{\nu'}] = i\delta(\nu-\nu') \qquad /A.1/$$

X было найдено в приложении А в /6/.

$$X_{k\nu} = \{ P \frac{\sqrt{2k}\,\epsilon(k)\,\sqrt{2\nu}\,\epsilon(\nu)}{\nu^2 - k^2} + \delta(k-\nu)[1+\rho(\nu)]\}\{[1+\rho(\nu)]^2 +$$

$$+ \eta^2(\nu)\}^{-1/2}, \qquad /A.2/$$

$$\eta(\nu) = \pi\epsilon^2(\nu); \quad \rho(\nu) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{k\,\eta(k)}{k^2-\nu^2}\, dk =$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(t)\, dt}{t - v}. \qquad /A.3/$$

Нечетная функция $\eta(\nu)$ и четная $\rho(\nu)$ являются соответственно мнимой и действительной частью предела при $\operatorname{Im} z \to +0$ функции $\phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \eta(k)/k-z = 2e^2\mu^2 i/3m_0(z+i\mu)$, аналитической в верхней полуплоскости: $\phi(\nu) = \rho(\nu) + i\eta(\nu)$.

После преобразования /А.1/ форма от p принимает вид

$$\kappa^2 p_1^2 + \int_0^\infty d\nu\, \nu^2 (p'_\nu)^2 + 2\int_0^\infty d\nu\, e(\nu)(p_1 \cdot p'_\nu);$$

$$e(\nu) = \frac{\kappa\sqrt{2\nu}\,\epsilon(\nu)}{\sqrt{[1+\rho(\nu)]^2 + \eta^2(\nu)}}. \qquad /A.4/$$

Ортогональное преобразование U, приводящее ее к виду $\int d\omega\, \omega^2\, \hat{p}_\omega^2$,

$$p_1 = \int U_{1\omega}\hat{p}_\omega\, d\omega, \quad q_1 = \int U_{1\omega}\hat{q}_\omega\, d\omega;$$

$$p'_\nu = \int U_{\nu\omega}\hat{p}_\omega\, d\omega; \quad q'_\nu = \int U_{\nu\omega}\hat{q}_\omega\, d\omega; \qquad /A.5/$$

находится так же, как было найдено преобразование О в приложении Б в /6/:

$$U_{1\omega} = e(\omega)\{[\omega^2 - \kappa^2 + R(\omega)]^2 + I^2(\omega)\}^{-1/2};$$

$$I(\omega) = \frac{\pi e^2(\omega)}{2\omega}; \quad R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(k)\, dk}{k-\omega}, \qquad /A.6/$$

$$U_{\nu\omega} = \{[\omega^2 - \kappa^2 + R(\omega)]^2 + I^2(\omega)\}^{-1/2} \times$$

$$\times \{P \frac{e(\nu)\, e(\omega)}{\omega^2 - \nu^2} + [\omega^2 - \kappa^2 + R(\omega)]\delta(\nu-\omega)\}. \qquad /A.7/$$

Интеграл $R(\omega)$, как и интеграл $\rho(\nu)$ в /А.3/, должен, конечно, сходиться, что обеспечивается формфактором $g^2(k) = \mu^2/k^2+\mu^2$, см. раздел 1.

Функцию $I(\omega)$ можно представить как мнимую часть предела $F(\omega)$ функции $F(z) = \kappa^2(1-1/1+\phi(z))$ при $\operatorname{Im} z \to +0$. $F(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, потому что $\phi(z)$ там аналитична и $1+\phi(z)$ нигде не обращается в нуль /хотя бы потому, что $|\phi(z)| \ll 1$ /. На бесконечности $F(z)$ убывает, и поэтому $R(\omega)$ должна быть действительной частью $F(\omega)$ /11/ : $F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) = \kappa^2\phi(\omega)/[1+\phi(\omega)]$. Ввиду этого функцию $U_{1\omega}^2$, см. /А.6/, равную $\frac{i\omega}{\pi}\{[\omega^2-\kappa^2+R+iI]^{-1} - [\omega^2-\kappa^2+R-iI]^{-1}\}$, можно представить в виде /16/.

Ортогональность $U^T U = 1$ и полнота $UU^T = 1$ доказываются так же, как для преобразования O, см. /6/ и приложение в /10/. Отметим, что спектр $\omega$ чисто непрерывный: $0 < \omega < \infty$ /6/. Заметим еще, что должно быть выполнено условие $\int_0^\infty d\nu\, e^2(\nu)/\nu^2 < \kappa^2$ /ср. /Б.4/ в /6//. В противном случае существует отрицательное значение $\omega^2$, и это означает, что исходный гамильтониан имеет спектр, не ограниченный снизу.

## Приложение Б

Фаза рассеяния дипольного фотона на электроне может быть найдена следующим образом. Найдем предел гейзенберговского оператора рождения фотона $a_k^+(t)$ при $t\to-\infty$. С помощью /А.1/, /А.5/ и формул вида /6/, /9/ получаем

$$a_k^+(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\, X_{k\nu}\Big[\Big(\sqrt{\frac{k}{\nu}}+\sqrt{\frac{\nu}{k}}\Big)a'^+_\nu(t) + \Big(\sqrt{\frac{k}{\nu}}-\sqrt{\frac{\nu}{k}}\Big)a'_\nu(t)\Big], \qquad /Б.1/$$

$$a'^+_\nu(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega\, U_{\nu\omega}\Big[\Big(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}+\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\Big) b^+_\omega e^{i\omega t} + \Big(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}-\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\Big) b_\omega e^{-i\omega t}\Big]. \qquad /Б.2/$$

Используя выражения /А.7/ и /А.2/ для $U_{\nu\omega}$ и $X_{k\nu}$ и формулы /13/:

$$\lim_{t\to-\infty} P\, e^{\pm iEt}/E = \mp\, i\pi\delta(E), \quad P\frac{1}{\omega^2-\nu^2} = \frac{1}{\omega+\nu}P\frac{1}{\omega-\nu}, \qquad /Б.3/$$

находим $\lim a'^+_\nu(t)$ и потом $\lim a_k^+(t)$:

$$\lim a'^+_\nu(t) = b^+_\nu e^{i\nu t}\frac{\nu^2-\kappa^2+F^*(\nu)}{|\nu^2-\kappa^2+F(\nu)|}, \qquad /Б.4/$$

$$a^+_{in}(k,t) \equiv \lim_{t\to-\infty} a^+_k(t) = b^+_k e^{ikt}\frac{k^2-\kappa^2+F^*(k)}{|k^2-\kappa^2+F(k)|}\times$$

$$\times\frac{1+\phi^*(k)}{|1+\phi(k)|} = b^+_k e^{ikt}\frac{k^2-\kappa^2+k^2\phi^*(k)}{|k^2-\kappa^2+k^2\phi(k)|}. \qquad /Б.5/$$

Аналогично с помощью формул $\lim\limits_{t\to+\infty} P\exp(\pm iEt)/E = \pm i\pi\delta(E)$, вычисляется out-оператор.



$$a^+_{out}(k,t) = \lim_{t\to+\infty} a^+_k(t) = b^+_k e^{ikt}\exp[i\arg(k^2-\kappa^2+k^2\phi(k))]. \qquad /Б.6/$$

S-матрицу рассеяния фотона с энергией k получаем по обычным формулам /14/:

$$S_{k'k} = \langle a^+_{out}(k')\,\Omega,\ a^+_{in}(k)\,\Omega\rangle = \delta(k'-k)\exp[-2i\delta(k)], \qquad /Б.7/$$

$$\mathrm{tg}\,\delta(k) = k^2\eta(k)/[k^2-\kappa^2+k^2\rho(k)]; \quad \eta(k) = \pi\epsilon^2(k). \qquad /Б.8/$$

Рассмотрим гейзенберговский физический оператор $\tilde a_\nu(t)$, связанный с $b_\omega(t)$ преобразованием $\tilde a_\nu(t) = \int d\omega\, O_{\nu\omega} b_\omega(t)$. Аналогично предыдущему получаем с помощью /29/

$$\tilde a^+_{in}(\nu,t) = b^+_\nu e^{i\nu t}\exp(-i\tilde\delta(\nu)),$$

$$\tilde a^+_{out}(\nu,t) = b^+_\nu e^{i\nu t}\exp(i\tilde\delta(\nu)), \qquad /Б.9/$$

$$\exp i\tilde\delta(\nu) = [\nu-\tilde\kappa+\Delta(\nu)+ir(\nu)]/|\nu-\tilde\kappa+\Delta(\nu)+ir(\nu)|. \qquad /Б.10/$$

Для операторов $a_k(t) = \int d\nu\int d\omega\, Y_{k\nu} O_{\nu\omega} b_\omega(t)$ находим аналогично /Б.5/:

$$a^+_{in}(k,t) = b^+_k e^{ikt}\exp(i\delta'(k)); \quad \delta'(k) = \tilde\delta(k)+\arg[1+r(k)+ij(k)]. \qquad /Б.11/$$

Пусть $\tilde E(\nu)$ выбрано так, что разность $\tilde\delta(\nu)-\delta(\nu)\ll 1$ при $0<\nu<\infty$, равна нулю при $\nu=0$ и достаточно быстро убывает при $\nu\to\infty$. Чтобы выполнялось равенство $\delta'(k)=\delta(k)$ /требование 4// с выбранным $\tilde\delta(k)$, надо, чтобы $\arg[1+r(k)+ij(k)] = \delta(k)-\tilde\delta(k)$ или

$$\frac{1+r(k)+ij(k)}{1+r(k)-ij(k)} = \exp 2i[\delta(k)-\tilde\delta(k)], \quad 0<k<\infty. \qquad /Б.12/$$

Поскольку $r(k) = \frac{P}{\pi} \int d\nu\, j(\nu)/(\nu-k)$, то это есть интегральное уравнение для нахождения $j(k)$. Его можно рассматривать также как уравнение для нахождения функции $f(k) = r(k) + ij(k)$; являющейся пределом при $\operatorname{Im} z \to +0$ функции $f(z)$, аналитической в верхней полуплоскости и исчезающей при $z \to \infty$. Можно /Б.12/ преобразовать к виду краевой задачи /15,16/

$$f^{+}(k) = e^{2i(\delta-\tilde{\delta})} f^{-}(k) + e^{2i(\delta-\tilde{\delta})} - 1; \quad f^{\pm}(k) = r(k) \pm ij(k). \qquad /Б.13/$$

Каноническая функция соответствующей однородной задачи равна /см. /16/, §78/

$$X(z) = \exp G(z), \quad G(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt\, [\delta(t) - \tilde{\delta}(t)]/t - z, \qquad /Б.14/$$

$$X^{\pm}(k) = \exp\{\pm i [\delta(k) - \tilde{\delta}(k)] + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty dt [\delta(t) - \tilde{\delta}(t)]/t-k\}. \qquad /Б.15/$$

Напомним, что $\delta(k) - \tilde{\delta}(k) = 0$ при $k=0$, так что $G(z)$ не имеет особенности при $z=0$. Решение /Б.13/ имеет вид

$$f(z) = X(z) \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dk \{\exp 2i[\delta(k) - \tilde{\delta}(k)] - 1\}/X^{+}(k)(k-z) \qquad /Б.16/$$

что может быть проверено с помощью формул Сохоцкого. При $z \to \infty$ имеем: $G(z) \to 0$, $X(z) \to 1$ и $f(z) \to 0$. Приближенное решение /Б.12/ имеет вид

$$j(k) \cong \operatorname{arc\,tg}[\delta(k) - \tilde{\delta}(k)] \cong \delta(k) - \tilde{\delta}\, k).$$

Можно показать, что если в качестве $W$ взять одно преобразование $O$, то требование 4/ может быть выполнено только при условии, что формфактор $g(k)$ при $k \to \infty$ стремится к нулю быстрее, чем $1/k$.

Подчеркнем, что требование 4/ не может быть выполнено с помощью одного преобразования $Y$: краевая задача /Б.13/ имеет убывающее при $z \to \infty$ решение только в том случае, если $\delta - \tilde{\delta} < 1$ всюду, так что $\delta - \tilde{\delta}$ не переходит через значение $\pi/2$.



*Литература*


1. *Н.Винер, Р.Пэли. Преобразования Фурье в комплексной области. Наука, Москва, 1964.*
2. *Л.Халфин. ЖЭТФ, 33, 1371 /1958/.*
3. *М.Терентьев. Ann. of Phys., 74, 1 (1972).*
4. *H.Ekstein, A.Siegert. Ann. of Phys., 68, 509 (1971).*
5. *N.G. van Kampen. Dan.Mat.Fys.Medd., 26, No. 15 (1951).*
6. *И.Еганова, М.Широков. ЯФ, 9, 1097 /1969/.*
7. *Л.Халфин. ДАН СССР, 132, 1051 /1960/; M.Hack. Nuovo Cim., 47B, 301 (1967); M.Havlicek, P.Exner. Czech. J.Phys., B23, 594 (1973).*
8. *O.W.Greenberg, S.S.Schweber. Nuovo Cim., 8, 378 (1958).*
9. *С.Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. ГИФМЛ, Москва, 1962, §3.*
10. *М.Широков. ОИЯИ, Р2-4410, Дубна, 1969.*
11. *M.Levy. Nuovo Cim., 14, 612 (1959).*
12. *Е.Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. ИЛ, Москва, 1948, гл. 5.*
13. *M.Hack. Phys.Rev., 96, 197 (1954).*
14. *С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, Москва, 1963, гл. 17.*
15. *Ф.Д.Гахов. Краевые задачи. ГИФМЛ, Москва, 1958.*
16. *Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Наука, Москва, 1968.*


*Рукопись поступила в издательский отдел 1 февраля 1974 года.*