ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 7708

Е.Н.Черникова

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА БЕЗМАССОВЫХ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ В МИРЕ ФРИДМАНА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7708

Е.Н.Черникова

КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА БЕЗМАССОВЫХ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ В МИРЕ ФРИДМАНА

Направлено в сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"

В работе /1/ построена квантовая теория безмассового поля в сферическом мире де Ситтера. С другой стороны, в работе /2/ показано, как построить такую теорию в мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$, если она уже построена в мире с метрикой ds^2. Основываясь на этих результатах и применяя общие принципы квантовой статистики /3/, мы построим здесь статистическую модель сферического мира Фридмана, геометрические свойства которого определяются физическими свойствами газа, образованного безмассовыми скалярными частицами.

В случае безмассовых скалярных частиц полевой оператор ϕ в мире с метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ подчиняется уравнению /1/

$$\Box \phi + \frac{1}{6} R\phi = 0. \qquad /1/$$

Тензор энергии-импульса имеет вид /1/

$$T_{\mu\nu} = T^{can}_{\mu\nu} - \frac{1}{6}(R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\phi^2 ,$$

$$/2/$$

$$T^{can}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\phi_\mu \phi_\nu + \phi_\nu \phi_\mu) - \frac{1}{4}\Box \phi^2 g_{\mu\nu} .$$

След этого тензора $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ равняется нулю.

В работе /2/ доказано, что оператор $\phi' = B^{-1}\phi$ является полевым оператором в мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$. Он подчиняется уравнению $\Box'\phi' + \frac{1}{6}R'\phi' = 0$. Тензор энергии-импульса $T'_{\mu\nu}$, построенный из $\phi' = B^{-1}\phi$ и $g'_{\mu\nu} = B^2 g_{\mu\nu}$ так же, как построен $T_{\mu\nu}$ из ϕ и $g_{\mu\nu}$, равняется

$$T'_{\mu\nu} = B^{-2} T_{\mu\nu} . \qquad /3/$$

Рассмотрим теперь статический сферический мир с метрикой

$$ds^2 = r^2[d\theta^2 - \omega_{jk}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)d\xi^j d\xi^k], \qquad /4/$$

где θ - время; ξ^1, ξ^2, ξ^3 - координаты на единичной сфере S_3 в четырехмерном евклидовом пространстве E_4; $r = \mathrm{const}$ - радиус. Сферу S_3 можно задать уравнениями

$$\varkappa_a = m_a(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad a = 1,2,3,4,$$

где $\varkappa_a$ - декартовы координаты в E_4; m_a - функции координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 на S_3 такие, что

$$\sum_{a=1}^{4} m_a m_a = 1.$$

Коэффициенты метрической формы на S_3 равны:

$$\omega_{jk} = \sum_{a=1}^{4} \frac{\partial m_a}{\partial \xi^j} \frac{\partial m_a}{\partial \xi^k}.$$

Дальше знак суммы по повторяющимся индексам типа a, b мы будем опускать, подразумевая, что по ним ведется суммирование в пределах от 1 до 4.

Сферический мир Фридмана отличается от статического сферического мира лишь конформным множителем $B^2(\theta)$ в метрике

$$ds'^2 = B^2(\theta) r^2[d\theta^2 - \omega_{jk}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)d\xi^j d\xi^k]. \qquad /5/$$

В частности, при $B = 1/\cos\theta$ это метрика сферического мира де Ситтера.

Как уже говорилось, квантовая теория скалярного поля в мире де Ситтера построена в /1/. Учитывая также приведенный выше результат работы /2/, запишем оператор поля ϕ в статическом мире и оператор поля ϕ' в мире Фридмана следующим образом:

$$\phi = \sqrt{h}\,(\phi^- + \phi^+), \quad \phi' = B^{-1}\sqrt{h}(\phi^- + \phi^+), \qquad /6/$$

где

$$\phi^- = \frac{1}{2\pi r} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{\frac{p}{2}} e^{-i(p+1)\theta} C_{a_1 \dots a_p} m_{a_1} \dots m_{a_p},$$

$$\phi^+ = \frac{1}{2\pi r} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{\frac{p}{2}} e^{i(p+1)\theta} C^+_{a_1 \dots a_p} m_{a_1} \dots m_{a_p},$$

$C_{a_1 \dots a_p}$ - компоненты симметрического тензора в E_4 с нулевым следом по паре индексов, так что $C_{a_1 \dots a_p} \varkappa_{a_1} \dots \varkappa_{a_p}$ является гармоническим полиномом в E_4. Эти компоненты операторные, и $C^+_{a_1 \dots a_p}$ эрмитовски сопряжены с $C_{a_1 \dots a_p}$. Они являются операторами рождения и уничтожения частиц и подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[C_{a_1 \dots a_p} C_{b_1 \dots b_q}]_- = 0, \quad [C^+_{a_1 \dots a_p} C^+_{b_1 \dots b_q}]_- = 0, \qquad /7/$$

$$[C_{a_1 \dots a_p} C^+_{b_1 \dots b_q}] = \delta_{pq} \delta_{a_1 \dots a_p; b_1 \dots b_p}.$$

Для двух векторов $\varkappa_a$ и y_b из E_4 имеем

$$2^p \varkappa_{a_1} \dots \varkappa_{a_p} \delta_{a_1 \dots a_p; b_1 \dots b_p} y_{b_1} \dots y_{b_p} = x^p y^p \frac{\sin(p+1)\gamma}{\sin\gamma}, \qquad /8/$$

где

$$x = \sqrt{\varkappa_a \varkappa_a}, \quad y = \sqrt{y_a y_a}, \quad xy\cos\gamma = \varkappa_a y_a.$$

Тем самым символ $\delta_{a_1 \dots a_p; b_1 \dots b_p}$ однозначно определяется. Этот символ получается из произведения $\delta_{a_1 b_1} \dots \delta_{a_p b_p}$ симметризацией по индексам $a_1 \dots a_p$ и вычитанием следа по паре индексов. Добавим еще, что при $p = 0$ $[CC^+] = 1$.

Оператор числа частиц N и гамильтониан H не зависят от конформного множителя B /2/. Они равняются

$$N = \sum_{p=0}^{\infty} C^+_{a_1 \dots a_p} C_{a_1 \dots a_p}, \qquad /9/$$

$$H = \frac{hc}{r}\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)C^{+}_{a_1\dots a_p}\,C_{a_1\dots a_p}\,. \qquad /10/$$

Вакуумное состояние также не зависит от B.

Мы хотим теперь удовлетворить уравнениям Эйнштейна

$$R'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R'g'_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^3}\langle : T'_{\alpha\beta} : \rangle\,, \qquad /11/$$

где $g'_{\alpha\beta}$ - метрический тензор в /5/, двоеточие означает нормальное произведение операторов рождения и уничтожения частиц. Знаком $\langle\ \ \rangle$ обозначаются статистические средние. Для любого оператора A

$$\langle A \rangle = \frac{\mathrm{Sp}\,A\,\exp\{-\frac{H-\mu N}{\Theta}\}}{\mathrm{Sp}\,\exp\{-\frac{H-\mu N}{\Theta}\}}\,,$$

где N и H - операторы /9/ и /10/, μ - химический потенциал, Θ - температура газа. Среднее от тензора энергии-импульса поля есть тензор энергии-импульса газа.

Поскольку след T' равняется нулю, то в силу уравнений Эйнштейна и скаляр R' должен равняться нулю. Из этого условия получаем $\frac{d^2B}{d\theta^2} + B = 0$. Мы удовлетворим условию $R' = 0$ без ограничения общности, полагая $B = \cos\theta$. Итак, сферический мир Фридмана определен с точностью до константы r:

$$ds'^2 = r^2\cos^2\theta[d\theta^2 - \omega_{jk}\,d\xi^j d\xi^k]. \qquad /12/$$

Для этой метрики

$$R'_{00} = -\frac{3}{\cos^2\theta}\,,\ R'_{0k} = 0,\ R'_{jk} = -\frac{1}{\cos^2\theta}\,\omega_{jk}\,.$$

Согласно же /3/

$$\langle : T'_{\alpha\beta} : \rangle = \frac{1}{\cos^2\theta}\langle : T_{\alpha\beta} : \rangle\,.$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна /11/ накладывают на тензор энергии-импульса следующие условия:

$$\langle : T_{00} : \rangle = \frac{3c^3}{8\pi\gamma}\,, \quad \langle : T_{0k} : \rangle = 0,$$
$$\langle : T_{jk} : \rangle = \frac{c^3}{8\pi\gamma}\,\omega_{jk}\,. \qquad /13/$$

Наоборот, при этих условиях уравнения Эйнштейна /11/ удовлетворяются. Нам осталось, следовательно, проверить, что тензор энергии-импульса /2/, построенный из оператора поля ϕ, в статическом сферическом мире удовлетворяет этим условиям. Так как

$$H = rc\int : T_{00} : \,d\Omega\,,$$

где $d\Omega = \sqrt{\omega}\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ - элемент площади /объема/ на S_3 и $\int d\Omega = 2\pi^2$, то в силу первого условия должно выполняться равенство

$$\langle H \rangle = \frac{3\pi c^4}{4\gamma}\,r\,. \qquad /14/$$

Дальше мы докажем, что

$$\langle : T_{00} : \rangle = \mathrm{const}, \quad \langle : T_{0k} : \rangle = 0 \qquad /15/$$

и что

$$3\langle : T_{jk} : \rangle = \langle : T_{00} : \rangle\,\omega_{jk}\,. \qquad /16/$$

После этого можно будет утверждать, что единственное требование, которое предъявляют уравнения Эйнштейна к радиусу r, есть /14/.

Прежде всего докажем, что

$$\langle C_{a_1\dots a_p} C_{b_1\dots b_q} \rangle = 0, \quad \langle C^{+}_{a_1\dots a_p} C^{+}_{b_1\dots b_q} \rangle = 0,$$
$$\langle C^{+}_{a_1\dots a_p} C_{b_1\dots b_q} \rangle = \delta_{pq}\,\delta_{a_1\dots a_p;b_1\dots b_p}\,\Lambda_{p+1}\,, \qquad /17/$$

где $\Lambda_{p+1} = \dfrac{1}{\exp\{\frac{hc}{r\Theta}(p+1) - \frac{\mu}{\Theta}\} - 1}$. /18/

Для доказательства выберем ортонормированный базис

$$Q^{\sigma}_{a_1 \dots a_p}, \quad \sigma = 1, \dots, (p+1)^2$$

в пространстве комплекснозначных симметричных тензоров $Q_{a_1 \dots a_p}$ с нулевым следом по паре индексов.

По определению

$$Q^{\sigma}_{a_1 \dots a_p} \; Q^{*\tau}_{a_1 \dots a_p} = \delta_{\sigma\tau} . \qquad /19/$$

Разложим по выбранному базису изучаемые операторы

$$C_{a_1 \dots a_p} = \sum_{\sigma=1}^{(p+1)^2} Q^{\sigma}_{a_1 \dots a_p} \, C_{p\sigma},$$
$$C^{+}_{a_1 \dots a_p} = \sum_{\sigma=1}^{(p+1)^2} Q^{*\sigma}_{a_1 \dots a_p} \, C^{+}_{p\sigma} . \qquad /20/$$

С помощью /19/ получаем

$$C_{p\tau} = Q^{*\tau}_{a_1 \dots a_p} \, C_{a_1 \dots a_p},$$
$$C^{+}_{p\tau} = Q^{\tau}_{a_1 \dots a_p} \, C^{+}_{a_1 \dots a_p} . \qquad /21/$$

Согласно /7/ эти операторы подчиняются каноническим перестановочным соотношениям

$$[C_{p\sigma} C_{q\tau}]_{-} = 0, \quad [C^{+}_{p\sigma} C^{+}_{q\tau}]_{+} = 0,$$
$$[C_{p\sigma} C^{+}_{q\tau}]_{-} = \delta_{pq}\delta_{\sigma\tau} , \qquad /22/$$

так как для любого симметричного тензора с нулевым следом по паре индексов

$$\delta_{a_1 \dots a_p ; b_1 \dots b_p} \, Q_{b_1 \dots b_p} = Q_{a_1 \dots a_p} . \qquad /23/$$

Кроме того, имеем

$$C^{+}_{a_1 \dots a_p} \, C_{a_1 \dots a_p} = \sum_{\sigma=1}^{(p+1)^2} C^{+}_{p\sigma} C_{p\sigma} . \qquad /24/$$

Следовательно, как это известно из квантовой статистики /3/,

$$\langle C_{p\sigma} C_{q\tau} \rangle = 0, \quad \langle C^{+}_{p\sigma} C^{+}_{q\tau} \rangle = 0,$$
$$\langle C^{+}_{p\sigma} C_{q\tau} \rangle = \delta_{pq} \delta_{\sigma\tau} \Lambda_{p+1} , \qquad /25/$$

где Λ_{p+1} есть /18/.

Сделаем здесь небольшое отступление, поскольку мы уже теперь можем выразить число частиц $\bar{N}$ и энергию E:

$$\bar{N} = \langle N \rangle = \sum_{q=1}^{\infty} q^2 \Lambda_q , \qquad /26/$$

$$E = \langle H \rangle = \frac{hc}{r} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q, \qquad /27/$$

где, напомним,

$$\Lambda_q = \frac{1}{\exp\{\frac{hcq}{r\Theta} - \frac{\mu}{\Theta}\} - 1} . \qquad /28/$$

Из формулы /27/ и условия /14/ получаем

$$\frac{3\pi c^3}{4\gamma h} r^2 = \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q . \qquad /29/$$

Таким образом, величины r, μ, $\bar{\Theta}$, $\bar{N}$ связаны двумя уравнениями, /26/ и /29/.

Докажем, наконец, равенства /17/. Из /19/ и /23/ находим, что

$$\sum_{\sigma=1}^{(p+1)^2} Q^{\sigma}_{a_1 \dots a_p} \; Q^{*\sigma}_{b_1 \dots b_p} = \delta_{a_1 \dots a_p ; b_1, \dots b_p} \qquad /30/$$

Отсюда и из /25/ и /20/ непосредственно следуют равенства /17/.

Основываясь на доказанных равенствах /17/ и учитывая /6/ и /8/, нетрудно подсчитать

$$G(N,M) = <:\phi(N)\phi(M):> =$$

$$/31/$$

$$= \frac{h}{2\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_q \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma} \cos q(\theta_1 - \theta_2),$$

где N и M - мировые точки с координатами $\theta_1, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ и $\theta_2, \eta^1, \eta^2, \eta^3$, γ - расстояние /угол/ между точками с координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 и η^1, η^2, η^3 на сфере S_3. Располагая этим результатом, уже нетрудно найти $<:T_{\alpha\beta}:>$. Имеем:

$$<:\phi^2:> = \lim_{N\to M} G(M,N) = \frac{h}{2\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q\Lambda_q = \text{const}. \qquad /32/$$

Поэтому /см. /2//

$$<:T_{\alpha\beta}:> = <:\phi_\alpha \phi_\beta:> - \frac{1}{6} <:\phi^2:> R_{\alpha\beta}.$$

Так как

$$R_{0\beta} = 0, \quad R_{jk} = -2\omega_{jk}, \qquad /33/$$

то

$$<:T_{0\beta}:> = <:\phi_0 \phi_\beta:>, \qquad /34/$$

$$<:T_{jk}:> = <:\phi_j \phi_k:> + \frac{1}{3} <:\phi^2:> \omega_{jk}. \qquad /35/$$

Дальше,

$$<:\phi_0 \phi_0:> = \lim_{N\to M} \frac{\partial^2}{\partial\theta_1 \partial\theta_2} G(M,N), \qquad /36/$$

т.е.

$$<:T_{00}:> = \frac{h}{2\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q = \text{const}. \qquad /37/$$

Таким образом, первое из условий /15/ выполняется. Но поскольку

$$\lim_{\theta_2 \to \theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_1} G(M,N) = 0, \qquad /38/$$

то выполняется и второе из этих условий.

Подсчитаем теперь

$$<:\phi_j \phi_k:> = \lim_{N\to M} \frac{\partial^2}{\partial\xi^j \partial\eta^k} G(M,N) =$$

$$/39/$$

$$= \frac{h}{2\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_q \lim_{\eta\to\xi} \frac{\partial^2}{\partial\xi^j \partial\eta^k} \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma}.$$

Поскольку $\frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma}$ является полиномом от $\Gamma = \cos\gamma = m_a n_a$ /полиномом Гегенбауэра G^1_{q-1} /, то любая производная по Γ от этой функции существует. Нам потребуются только первая и вторая производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^j \partial\eta^k} \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma} = \left(\frac{d}{d\Gamma} \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma} \right) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial\xi^j \partial\eta^k} +$$

$$+ \left(\frac{d^2}{d\Gamma^2} \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma} \right) \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^j} \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta^k}.$$

Имеем

$$\lim_{\eta\to\xi} \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^j} = 0, \quad \lim_{\eta\to\xi} \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta^k} = 0,$$

/40/

$$\lim_{\eta\to\xi} \frac{\partial^2\Gamma}{\partial\xi^j\partial\eta^k} = \omega_{jk}, \quad \frac{d}{d\Gamma} \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma} \Big|_{\gamma=0} = \frac{1}{3} q(q^2-1).$$

Поэтому

$$<:\phi_j \phi_k:> = \frac{h}{6\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q(q^2-1)\Lambda_q \omega_{jk}. \qquad /41/$$

Из результатов /41/ и /32/ и формулы /35/ находим

$$<:T_{jk}:> = \frac{h}{6\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q \omega_{jk}. \qquad /42/$$

Сравнивая эту формулу с формулой /37/, видим, что выполняется и последнее условие /16/.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову /мл./ за ценные советы и обсуждения.

Литература

1. *N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst.Henri Poincare, vol. IX, N. 2, Section A, 109-141, 1968.*
2. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6820, Дубна, 1972.*
3. *Н.Н.Боголюбов. Лекции по квантовой статистике. Избранные труды, т. 2, Киев, 1970.*

Рукопись поступила в издательский отдел
1 февраля 1974 года.