СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 7651

В.Н.Стрельцов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

P2 - 7651

В.Н.Стрельцов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Стрельцов В.Н.

Р2 - 7651

Некоторые вопросы релятивистской динамики

При описании динамики систем со сплошным распределением массы и заряда используются величины плотности силы, массы и заряда в единице 4-объема. Обсуждаются некоторые вопросы, касающиеся ковариантного вариационного принципа, ковариантной формы уравнений движения, а также ковариантной формулировки законов сохранения.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Streltsov V.N.

P2 - 7651

Some Problems of Relativistic Dynamics

When describing the dynamics of the systems with the continuous mass and charge distribution there were used the density values for the force, mass and charge per unit of 4-volume. Some problems are discussed concerned with the covariant variation principle, covariant form of the motion equations as well as with the covariant formulation of the concentration laws.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

§1. К вопросу о динамике систем со сплошным распределением массы и заряда

1. Перейдем от отдельной частицы к веществу со сплошным распределением массы и заряда. Для этого мы должны ввести вместо массы m ее инвариантную плотность μ^* и вместо заряда e его инвариантную плотность ρ^* [x]. Здесь следует отметить, что поскольку в рамках теории относительности элемент 3-объема не является инвариантом, то плотность /массы или заряда/ в единице 3-объема также не является инвариантной величиной [xx]. Указанному требованию, очевидно, будет удовлетворять плотность в единице инвариантного 4-объема. В результате, например, для уравнения движения в случае электромагнитного поля будем иметь

$$\mu^* w^i = \rho^* F^i_k u^k \quad (c = 1). \qquad /1/$$

Для того чтобы совершить обратный переход от плотности силы к полной силе, действующей на частицу, мы, очевидно, должны произвести интегрирование по 4-объему /мировой трубке/:

$$F^i = \int f^i d^4 V. \qquad /2/$$

---

[x] Поскольку вводимые таким образом величины μ^* и ρ^* /как и исходные m и e / - скаляры, то плотность силы f_i, как и сама сила F_i, должна представлять собою 4-вектор.

[xx] Обычно вводимая скалярная плотность $\mu^*_{об.} = -J^k u_k$ представляет собою плотность в единице пространственного объема только в собственной системе отсчета.

В частности, для силы инерции при этом найдем

$$F^i = \int \mu^* w^i \, d^4V = m w^i , \qquad /2а/$$

тогда как после интегрирования правой части /1/ для силы Лоренца будем иметь

$$F^i_{л} = \int \rho^* F^i_k u^k \, d^4V = e F^i_k u^k . \qquad /2б/$$

Следует отметить, что при выводе формул /2а/ и /2б/ мы полагали, очевидно, величины F^i_k, u^k и w^i постоянными внутри указанной мировой трубки.

1а. Рассмотрим теперь известное релятивистское выражение:

$$P^i = \int F^i \, d\tau , \qquad /3/$$

где P^i - 4-импульс частицы, а τ - собственное время. С учетом /2а/ при этом будем иметь

$$P^i = \int \left(\int \mu^* w^i \, d^4V \right) d\tau . \qquad /3а/$$

Если снова предположить, что 4-ускорение постоянно внутри данного 4-объема, то последнее выражение мы сможем переписать тогда в виде

$$P^i = \int \left(\int \mu^* d^4V \right) w^i \, d\tau = \int m \, du^i = m u^i . \qquad /3а'/$$

Привлекая /2б/, с другой стороны, получим

$$P^i_{эл.} = \int \left(\int \rho^* F^i_k u^k \, d^4V \right) d\tau . \qquad /3б/$$

В частном случае собственной системы отсчета x/ и при условии постоянства F^i_k вдоль данной мировой линии выражение /3б/ может быть переписано в форме xx/

$$P^i_{эл.} = \int \left(\int \rho^* u^k \, d\tau \right) F^i_k \, d^4V = \int \left(\int \rho^* dx^k \right) F^i_k \, d^4V . \qquad /3б'/$$

Если мы учтем далее, что в рассматриваемом специальном случае

$$\int \rho^* dx_k = \int \rho^* dx^4 = j^4 , \qquad /4/$$

то на основании /3б/ и /4/ величину

$$P_i = j^k F^i_k , \qquad /5/$$

где $k = 4$, мы сможем трактовать как плотность 4-импульса в единице 4-объема.

2. Введем далее тензор T^{ik} плотности импульса P^i в единице 3-объема xxx/

$$P^i = \int T^{ik} dV_k . \qquad /6/$$

В том случае, когда данная гиперповерхность /3-объем/ замкнута, можно, очевидно, преобразовать интеграл по ней в интеграл по заключенному в ней 4-объему. При этом будем иметь

$$\int T^{ik} dV_k = \int \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} d^4V . \qquad /7/$$

---

x/ Кроме всего прочего, мы предполагаем, что в собственной системе отсчета рассматриваемый бесконечно малый элемент 4-объема представляется квадратичной формой, в которой отличны от нуля только диагональные элементы, т.е. имеет вид

$$d^4V = (1/i) \, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 .$$

xx/ При этом мы изменили также порядок интегрирования, полагая, как и раньше, величины u^k постоянными внутри данной мировой трубки.

xxx/ Здесь следует отметить, что если вместо вектора 3-объема мы будем использовать дуальный ему тензор объема, то вместо тензора T^{ik} мы должны будем ввести тензор плотности энергии-импульса 4-го ранга /см., например, /1/ /.

Здесь можно отметить, что в частном случае $P^i = P^i_{эл.}$ рассматриваемый тензор T^{ik} будет представлять собою, очевидно, тензор энергии-импульса электромагнитного поля. При этом с учетом /5/ будем иметь, например, что

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = j^k F^i_k. \qquad /8/$$

3. Введем, кроме того, как обычно, представление 4-плотности силы f^i в виде расходимости некоторого тензора Θ^{ik}:

$$f^i = \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x^k}. \qquad /9/$$

Умножив обе части /9/ на элемент 4-объема и проинтегрировав по данной мировой трубке, получим:

$$F^i = \int \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x^k} \, d^4V . \qquad /10/$$

Воспользовавшись далее теоремой Гаусса-Остроградского, преобразуем интеграл по 4-объему в интеграл по огибающей его гиперповерхности

$$\int \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x^k} \, d^4V = \int \Theta^{ik} dV_k . \qquad /11/$$

На основании правой части полученного таким образом равенства можно заключить, что, например, величина Θ^{i4} будет определять собою плотность i -ой компоненты силы в единице пространственного объема и т.д.

Представим теперь тензор Θ^{ik} в виде известного выражения

$$\Theta^{ik} = \mu^* u^i u^k , \qquad /12/$$

где, однако, скаляр будет иметь другой смысл, чем обычная величина

$$\mu^*_{об.} = -J^k u_k . \qquad /13/$$

Здесь J^k - 4-ток плотности массы.

Очевидно, величина

$$\frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x^k} = \mu^* w^i + u^i \frac{\partial}{\partial x^k} (\mu^* u^k) \qquad /14/$$

будет представлять собою выражение для плотности силы, если только второй член в правой части обратится в нуль, т.е. в том случае, если выполняется условие:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\mu^* u^k) = 0 . \qquad /15/$$

§2. О ковариантных уравнениях Эйлера-Лагранжа и Гамильтона и о ковариантном вариационном принципе

Как известно /см., например, [2] /, уравнения Эйлера-Лагранжа, записанные в ковариантной форме, имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 . \qquad /16/$$

В то же время для ковариантных уравнений Гамильтона имеем

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{d x_i}{d\tau}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = - \frac{d P_i}{d\tau}. \qquad /17/$$

Здесь L и H - скалярные функции, которые, например, для частицы в электромагнитном поле имеют вид [x/]:

$$L = \frac{1}{2} m u_i u_i + e u_j A_j , \qquad /18/$$

$$H = P_i u_i - L = \frac{1}{2m} (P_i - e A_i)^2 . \qquad /19/$$

[x/] Отметим, что процедура получения на основании /18/ требуемого выражения для 4-силы обусловлена, кроме того, выполнением равенства $A_i (\partial u_i / \partial x_j) = 0$.

Напомним, что уравнение /16/ вытекает из ковариантного вариационного принципа, определяемого требованием равенства нулю вариации интеграла действия

$$\delta \int L\, d\tau = 0. \qquad /20/$$

Последнее выражение может быть представлено в виде суммы двух членов

$$\delta \int L_4\, dt + \delta \int P_a\, dx_a = 0. \qquad /21/$$

Легко видеть при этом, что, например, обращение в нуль первого члена будет выражать собою принцип Гамильтона:

$$\delta \int L_4 dt = 0, \qquad /21a/$$

тогда как равенство нулю второго члена будет определять собою принцип наименьшего действия Мопертюи.

С учетом сказанного можно утверждать, что полученное на основании принципа Гамильтона /21а/ релятивистское уравнение Эйлера-Лагранжа для функции L_4 будет справедливым только в таких частных случаях, когда также выполняется и принцип Мопертюи. x/

В случае непрерывного распределения массы и заряда для плотностей лагранжиана и гамильтониана на основании /18/ и /19/ будем иметь

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \mu^* u_i u_i + \rho^* u_j A_j, \qquad /18a/$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu^*} (p_i - \rho^* A_i)^2. \qquad /19a/$$

---

x/ Это замечание, очевидно, имеет силу и для уравнений Гамильтона с гамильтонианом H_4, являющимся временной компонентой 4-вектора.

§3. *О ковариантной формулировке законов сохранения*

Рассмотрим, например, следующие два уравнения:

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \frac{dP_a}{dt} = 0. \qquad /22а,б/$$

Если трактовать их как выражения, описывающие в полной мере законы сохранения энергии и импульса, то на основании принципа относительности можно утверждать тогда, что и после перехода к некоторой другой инерциальной системе отсчета x/ должны иметь место равенства

$$\frac{dE'}{dt'} = 0, \quad \frac{dP_a'}{dt'} = 0. \qquad /22'/$$

Нетрудно показать, однако, что в общем случае после указанного перехода равенства /22'/ уже не выполняются.

Поскольку, с другой стороны, левую часть выражения /22б/ можно рассматривать как определение силы, то последний факт должен означать появление сил при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Путь избавления от отмеченных трудностей лежит, конечно, в ковариантной формулировке законов сохранения энергии и импульса, т.е. в замене уравнений /22/ выражениями

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \quad \frac{dP_a}{d\tau} = 0.^{xx/} \qquad /23/$$

---

x/ В результате применения к уравнениям /22/ релятивистских формул преобразования.

xx/ При этом известное уравнение

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

вытекает из /23/ при выполнении, в частности, следующего условия:

$$u_a \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV_a = 0.$$

В заключение отметим, что использование ковариантной формулировки законов сохранения, и,в частности/23/, приводит немедленно к устранению парадоксов, связанных, скажем, с кажущимся нарушением равновесия сил при переходе от одной системы отсчета к другой, поскольку в рамках данной формулировки одновременное действие сил уже не является необходимым условием равновесия.

Литература

1. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-6694, Дубна, 1972.*
2. *В.Пановский, М.Филипс. Классическая электродинамика, ГИФМЛ, М., 1963, гл. 23.*

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1973 года.