ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7644

В.Н.Первушин

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В КВАНТОВАННЫХ КИРАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7644

В.Н.Первушин

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В КВАНТОВАННЫХ КИРАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Направлено в Physics Letters

S u m m a r y

A general method is given for calculating Lagrangians with the help of which the reduced S-matrix is constructed in the chiral quantum theory (i.e. the theory where all possible reductions/1/ - contractions of lines on diagrams/4/ - are performed).

The method proposed is a simple generalization of the results by D.V.Volkov. These results consist in that for constructing the reduced S-matrix in the tree-diagram approximation it suffices to pass over to the normal coordinate system. In this system the Cartan forms $\omega(\varphi)$ obey the fundamental Cartan equations/6/ with the zeroth boundary conditions. Making use of the results of refs./4,5/ we have shown that for constructing the reduced S-matrix in the chiral quantum theory it is sufficient to solve the same fundamental Cartan equations but with the nonzeroth boundary conditions. These conditions are the Cartan forms $\omega(\varphi)$ of the classical Goldstone fields. The fields Γ on which dependence is searched are "internal" quantized fields. It makes sense to call the obtained Lagrangian as the fundamental Lagrangian. When applying the standard perturbation theory this Lagrangian reproduces/5/ the Honerkamp covariant perturbation theory/4,1/ where all reductions (contractions) are made.

1. Кирально-инвариантные /1/ феноменологические лагранжианы успешно используются сейчас для построения квантовой теории сильных взаимодействий с применением аналитического /суперпропагаторного/ метода регуляризации /2/. Согласно последнему, для устранения расходимостей в теории достаточно лишь нелинейности лагранжиана. Физические результаты, полученные в таком подходе, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными по низкоэнергетическому пион-пионному рассеянию и формфактору пиона /3/.

Кирально-инвариантный метод вычисления суперпропагатора /т.е. суммы диаграмм с произвольным числом внутренних линий и фиксированным числом вершин/ был развит в работах Хонеркампа /4/ /см. также работу автора /5/, где был получен явный вид лагранжиана в этой ковариантной теории/.

В настоящей заметке мы хотим отметить тот факт, что ковариантную теорию возмущения Хонеркампа можно получить простым обобщением результатов Д.В.Волкова /1/ по построению редуцированной S-матрицы в приближении деревьев. Тем самым, по-видимому, дается общий метод построения редуцированных квантованных киральных теорий.

2. В приближении деревьев Д.В.Волковым было показано, что учет всевозможных редукций * полюсных

---

* Редукция - перебрасывание производных в вершинах на пропагаторы и сведение последних к δ -функциям /сжатие линий на диаграммах /4//.

диаграмм к эффективному контактному взаимодействию эквивалентен на массовой поверхности явно ковариантной процедуре перехода к нормальной системе координат. S-матрица, построенная с учетом всех редукций, называется редуцированной.

Как известно, лагранжианы в киральных теориях, $L(\omega(\phi),\psi)$, являются минимальными по числу производных инвариантами, построенными из форм Картана $\omega^{a}(\phi)$, $\omega^{a}_{\beta}(\phi)$, которые определяют лагранжианы взаимодействия голдстоуновских полей ϕ между собой и с другими полями ψ соответственно.

Чтобы получить явную функциональную зависимость форм Картана от голдстоуновских полей в нормальной системе координат, нужно решить т.н. фундаментальные уравнения Картана [6] с нулевыми граничными условиями /см. приложение/. S-матрица в приближении деревьев, как функционал от асимптотического поля $\pi^{(in)}$, определяется выражением

$$S_{tree}(\pi^{(in)}) = \exp\{i\int d^4_x[L(\omega(\phi),\psi) - \partial_\mu \phi(x)\,\partial_\mu \pi^{(in)}_{(x)}]\}$$

$$\frac{\delta L(\omega(\phi),\psi)}{\delta\phi} = -\Box\pi^{(in)}, \qquad /1/$$

где ϕ - "классическое" голдстоуновское поле.

3. Используя результаты работ [4, 5], нетрудно показать /см. приложение/, что для построения редуцированной S-матрицы в квантованной киральной теории нужно решить фундаментальные уравнения Картана на формы $\omega(\Gamma/\phi)$ с ненулевыми граничными условиями. Эти условия являются формами Картана от "классических" полей в нормальной системе координат [1]. При этом поля Γ, зависимость от которых определяется, являются "внутренними" полями, по которым берутся свертки или выполняется функциональное усреднение в зависимости от применяемого аппарата квантования. Лагранжиан для голдстоуновских частиц $1/2\,\omega^{a}(\Gamma/\phi)\,\omega^{a}(\Gamma/\phi)$ в теории $SU(2)\times SU(2)$ совпадает с лагранжианом [5], который воспроизводит ковариантную теорию возмущения Хонеркампа [4].

Лагранжиан, построенный из форм Картана $\omega^{a}(\Gamma/\phi)$, $\omega^{a}_{\beta}(\Gamma/\phi)$, имеет смысл назвать фундаментальным лагранжианом в редуцированной квантовой киральной теории.

Редуцированная S-матрица в виде континуального интеграла определена в работах [4,5] и, по-видимому, наиболее удобна для проведения процедуры регуляризации и перенормировок независимо от применяемых методов.

Что касается суперпропагаторного /С.П./ метода [2], то, как показано в работе автора [5], этот метод приводит к нормальному упорядочению фундаментального лагранжиана, так что редуцированная S-матрица, как функционал от асимптотического поля $\pi^{(in)}$, имеет вид

$$S(\pi^{(in)}) = S_{tree}(\pi^{in})\cdot\langle 0\,|\,T^*\exp\{i\int d^4_x : L_I :\}\,|\,0\rangle,$$

где

$$L_I = L(\omega(\Gamma/\phi),\psi) - L(\omega(\phi),\psi) - L_0(\Gamma,\psi),$$

L_0 - лагранжиан свободных полей. Разложение последнего выражения для S-матрицы по степеням L_I дает: в нулевом порядке все графы-деревья, первый порядок равен нулю в силу нормального произведения, второй порядок не содержит расходимостей и вычислен в работах [3]. Исследованию высших порядков в аналогичных теориях посвящены работы [7], в которых изучались лагранжианы взаимодействия без производных и доказана конечность теории для произвольного порядка, а также унитарность и причинность для 3-го, 4-го порядков. Для построения конечной квантовой киральной теории необходимо прежде всего обобщить эти результаты на лагранжианы взаимодействия с одной и двумя производными и более подробно рассмотреть проблему эквивалентности редуцированной и стандартной теорий, доказанной на формальном уровне [8].

В заключение автор благодарит Д.И.Блохинцева, Д.В.Волкова, М.К.Волкова, В.И.Огиевецкого и Л.Д.Фаддеева за полезные обсуждения.

Приложение

Пусть G - группа симметрии исходного лагранжиана, H - подгруппа G и группа симметрии вакуума с алгеброй генераторов X_a, Y_c;

$$[X_\alpha X_\beta] = i b^c_{\alpha\beta} Y_c \ ; \ [X_\alpha Y_c] = i a^\gamma_{\alpha c} X_\gamma ; \ [Y_a, Y_b] = i C^c_{ab} Y_c .$$

Фундаментальные уравнения Картана для форм $\omega^\alpha(\Gamma/\phi)$, $\omega^\alpha_\beta(\Gamma/\phi)$ имеют вид /6,1/

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\omega^\alpha(\Gamma t/\phi)}{\partial t} &= \partial\Gamma^\alpha + \omega^\alpha_\beta(\Gamma t/\phi)\,\Gamma^\beta \\ \frac{\partial\omega^\alpha_\beta(\Gamma t/\phi)}{\partial t} &= -R^\alpha_{\beta\nu\mu}\,\Gamma^\nu\omega^\mu(\Gamma t/\phi) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \omega^\alpha(0/\phi) &= \omega^\alpha(\phi), \\ \omega^\alpha_\beta(0/\phi) &= \omega^\alpha_\beta(\phi). \end{aligned}$$

Формы $\omega(\phi)$ удовлетворяют тем же уравнениям с нулевыми граничными условиями, $\omega(t\phi) = \omega(\Gamma t/0)|_{\Gamma=\phi}$. Здесь

$$R^\nu_{\mu\alpha\beta} = -b^c_{\mu\alpha}\, a^\nu_{\beta c} \ ; \left(SU(2)\times SU(2) : R^\ell_{ijk} = (\delta_{jk}\delta_{\ell i} - \delta_{ki}\delta_{\ell j})/F_\pi^2 \ ; \quad F_\pi = 92 \text{ МэВ}\right).$$

Решением этих уравнений являются выражения /при $t=1$ /:

$$\omega^\alpha(\Gamma/\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathfrak{M}^n)^\alpha_\beta \left[\frac{\omega^\beta(\phi)}{(2n)!} + \frac{(D\Gamma)^\beta}{(2n+1)!}\right],$$

$$\mathfrak{M}^\alpha_\beta = R^\alpha_{\mu\nu\beta}\,\Gamma^\mu\Gamma^\nu,$$

$$\Gamma^\beta\omega^\alpha_\beta(\Gamma/\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (\mathfrak{M}^{n+1})^\alpha_\beta \left[\frac{\omega^\beta(\phi)}{(2n+1)!} + \frac{(D\Gamma)^\beta}{(2n+2)!}\right] + \Gamma^\beta\omega^\alpha_\beta(\phi),$$

$$(D\Gamma)^\beta = \partial\Gamma^\beta + \omega^\beta_\gamma(\phi)\,\Gamma^\gamma, \quad \omega^\alpha(\phi) = \omega^\alpha(\Gamma/0)|_{\Gamma=\phi};$$

$$\omega^\alpha_\beta(\phi) = \omega^\alpha_\beta(\Gamma/0)|_{\Gamma=\phi}.$$

В частности, для группы SU(2) × SU(2) получим:

$$\omega^\alpha(\Gamma/\phi) = \omega^\alpha(\phi) + (D\Gamma)^\alpha + \Pi_{\alpha\beta}\Big[\omega^\beta(\phi)(\cos z - 1) + (D\Gamma)^\beta\Big(\frac{\sin z}{z} - 1\Big)\Big],$$

$$\omega^\alpha_\beta(\Gamma/\phi) = \omega^\alpha_\beta(\phi) + (\Gamma^\beta\delta^\alpha_\gamma - \Gamma^\alpha\delta^\beta_\gamma)\Big[\omega^\gamma(\phi)\,\frac{\sin z}{z F_\pi^2} + (D\Gamma)^\gamma\,\frac{\cos z - 1}{\vec{\Gamma}^2}\Big],$$

$$z = \sqrt{\frac{\vec{\Gamma}^2}{F_\pi^2}}, \qquad \Pi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}{\vec{\Gamma}^2}.$$

Фундаментальный лагранжиан $1/2\,\omega^\alpha(\Gamma/\phi)\,\omega^\alpha(\Gamma/\phi)$ совпадает с лагранжианом, полученным в работах /4,5/ /при этом нужно помнить, что член первого порядка по Γ в этом лагранжиане равен нулю в силу уравнения /1//. Обозначения работ /4,5/:

$$\omega^\alpha(\phi) = e^\alpha_i(\phi)\,\partial_\mu\phi^i \ ; \quad \omega^\alpha_\beta(\phi) = (\rho_\mu)_{\alpha\beta}(\phi) \ ; \ \partial\Gamma = \partial_\mu\Gamma .$$

Литература

1. *Д.В.Волков. Препринт ИТФ-69-75, Киев, 1969; ЭЧАЯ, 4, 3 /1973/.*
2. *M.K.Volkov. Ann.Phys., 49, 202 (1968);*
   Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 /1963/;
   E.S.Fradkin. Nucl.Phys., B49, 624 (1963).