СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7590

Л.Г.Заставенко

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ ОДНОЧАСТИЧНОГО ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ БЕЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7590

Л.Г.Заставенко

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ ОДНОЧАСТИЧНОГО ВОЗБУЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ БЕЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Заставенко Л.Г. Р2 - 7590

Вычисление массы одночастичного возбужденного состояния в простейшей модели квантовой теории поля без теории возмущений

Соображения релятивистской инвариантности позволяют вычислить массу одночастичного возбужденного состояния в модели $g[\phi^4]_2$ без решения задачи отыскания собственных значений уравнения возбужденных состояний.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Zastavenko L.G. P2 - 7590

Calculation of the One-Particle Excited State Mass in the Simplest Model of Quantum Field Theory without Perturbation Theory

Consideration of relativistic invariance allows one to calculate the mass of the one-particle excited state in the model $g[\phi^4]_2$ without solving the problem on search for eigenvalues of the excited state equation.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

В предыдущей работе /1/ высказано предположение, что данная ранее /2,3/ система уравнений основного состояния позволяет построить функционал основного состояния в модели с самодействием $g\phi^4$ в двумерном пространстве-времени во всем диапазоне изменения константы связи $0<g<\infty$ и массового параметра t /2/.

В настоящей работе мы продолжим рассмотрение /1/ и получим формулу, позволяющую путем численных расчетов определить квадрат массы одночастичного возбужденного состояния.

1. Сначала мы рассмотрим случай невырожденного основного состояния.

Замена переменных /1/ работы /1/ приводит систему уравнений основного состояния к виду, определенному формулой /2/ той же работы, и уравнения одночастичного возбужденного состояния /формула /17/ работы /3/ / к виду

$$\omega(q,\epsilon) - A(q;\epsilon^{-1}) = -3\int t_3^q(q,s,-s;\epsilon^{-1})\,ds\,,$$

$$(\omega(q,\epsilon) - S_3)\,t_3^q(1,2,3;\epsilon^{-1}) = 2D_4(1,2,3,-q;\epsilon^{-1})$$

$$-10\int t_5^q(1,2,3,s,-s;\epsilon^{-1})\,ds\,, \qquad /1/$$

$$(\omega(q,\epsilon)-S_5)\,t^q_5(1,2,3,4,5;\epsilon^{-1}) = 3\times 1 D_6(1,2,3,4,5,-q;\epsilon^{-1})$$

$$+\,2\times 3\,[D_4\ t^q_3] - 21\int t^q_7(1,2,3,4,5,s,-s;\epsilon^{-1})\,ds.$$

. . . .

Здесь

$$t^q_n(q_1,\dots;\epsilon^{-1}) = \gamma^p_n(p_1,\dots),$$

$$\omega(q,\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{g}}\Lambda(p),$$

$$q = p\,/\,\sqrt{g},$$

$$S_n = \sum_1^n A(q_i,\epsilon^{-1}). \qquad /1a/$$

1.1. Из релятивистской инвариантности модели следует

$$\omega(q,\epsilon) = \sqrt{q^2+\mu^2(\epsilon)}. \qquad /2/$$

Величина $\omega(q,\epsilon)$ в форме /2/ может быть получена, как результат решения задачи /1/ на определение собственного значения.

1.2. Именно, мы рассмотрим первое уравнение системы /1/ при $q\to\infty$. Разлагая /2/ и подставляя для $A(q,\epsilon^{-1})$ выражение

$$A(q,\epsilon^{-1}) = q + \frac{1}{2q}(\epsilon^{-1}+6\int(D_4(q,-q,s,-s;\epsilon^{-1})$$

$$-\,D_4(0,0,s,-s;\epsilon^{-1}))\,ds$$

$$+\dots,$$

следующее из первого уравнения системы /1/ [1], найдем

$$\mu^2(\epsilon) = \epsilon^{-1} + \lim_{q\to\infty}\{6\int[D_4(q,-q,s,-s;\epsilon^{-1}) -$$

$$-D_4(0,0,s,-s;\epsilon^{-1})]\,ds - 6q\int t^q_3(q,s_1,-s_1;\epsilon^{-1})\,ds_1\}. \qquad /3/$$

Из формулы /2/ [1] легко получить, что в случае $g\to\infty$

$$D_4(q,-q,s,-s;\epsilon^{-1}) = \frac{1}{|q|+|s|} + 0\left(\frac{1}{q^2}\right); \qquad /4/$$

только первый член этого выражения существенен при подсчете предела /3/. Функция $D_4(0,0,s,-s;\epsilon^{-1})$, входящая в /3/, может быть определена только в результате численного решения системы /2/ [1].

1.3. Наконец, для определения $0(q^{-1})$ части функции $t^q_3(q,s,-s;\epsilon^{-1})$, необходимой для подсчета предела в /3/, преобразуем второе и последующие уравнения системы /1/, подставив $q_1 = q\to\infty$. Второе уравнение /1/, при учете /4/, примет вид:

$$-S_2\,t^q_3(q,s_1,-s_1,\epsilon^{-1}) =$$

$$= \frac{2}{|q|+|s_1|} - 10\int t^q_5(q,s_1,-s_1,s_2,-s_2;\epsilon^{-1})\,ds_2. \qquad /5/$$

Здесь мы учли, что

$$\omega(q,\epsilon) - A(q,\epsilon^{-1}) \to 0 \qquad \text{при} \quad q\to\infty.$$

Первый член правой части третьего уравнения имеет порядок величины $0(q^{-2})$ и для нас не существенен;

аналогичным образом от второго члена остается лишь часть

$$2\times3\times\frac{2}{5}\,\mathrm{Simm}\,(1,2,3,4)\,D_4\ (1,2,3,x;\epsilon^{-1})\,t_3^q\,(4,q,-x\,;\,\epsilon^{-1}\,),$$

не содержащая q среди аргументов D_4 ; таким образом, третье уравнение /1/ примет вид

$$-S_4\ t_5^q\ (q,1,2,3,4)\ =$$

$$2\times3\times\frac{2}{5}\,\mathrm{Simm}\,(1,2,3,4)\,D_4(1,2,3,x)\ t_3^q\,(4,q,-x) \qquad /6/$$

$$-21\int t_7^q\,(1,2,3,4,q,s,-s)\,ds.$$

Четвертое уравнение /1/ даст

$$-S_6\ t_7^q\,(q,1,2,3,4,5,6)\ =$$

$$=\mathrm{Simm}\,(1,2,3,4,5,6)\,)\,[\,3\times3\,\frac{2}{7}\,D_6\,(1,2,3,4,5,x)\,t_3^q(q,6,-x)$$

$$+\,2\times5\times\frac{4}{7}\,D_4\,(1,2,3,x)\ t_5^q\ (q,4,5,6,-x)\ ]$$

$$-36\int t_9^q\ (q,1,2,3,4,5,6,s,-s)\,ds$$

и так далее.

1.4. Подставив в /3/ /4/ и /5/, приведем /3/ к виду

$$\mu^2(\epsilon)=\epsilon^{-1}+\lim_{q\to\infty}6\int ds\,[\frac{1}{|q|+|s|}+\frac{q}{A(s;\epsilon^{-1})(q+|s|)}-$$

$$-D_4(0,0,s,-s\,;\epsilon^{-1})-\frac{5q}{A(s;\epsilon^{-1})}\int t_5^q(q,s,-s,s_2,-s_2;\epsilon^{-1})ds_2].$$

/7/

Первые три члена подынтегрального выражения дают

$$\int ds\,[\,\frac{|q|+|s|\,+\,A\,(s;\epsilon^{-1})-|s|}{A\,(s;\epsilon^{-1})\,(|q|+|s|\,)}\ -$$

$$-D_4\,(0,0,s,\,-s\,;\,\epsilon^{-1}\,)\,]\ \xrightarrow[\text{при}\ q\to\infty]{}$$

$$\int ds\,[\,\frac{1}{A\,(s;\epsilon^{-1})}\,-\,D_4\,(0,0,s,-s\,;\,\epsilon^{-1})\,]\,; \qquad /8/$$

последний интеграл сходится.

Введем обозначения:

$$x_n\,(1,2,\ldots n;\,\epsilon^{-1}\,)\ =$$

$$=\lim_{q\to\infty}\,|\,q\,|\ \ t_{n+1}^q\ \ (q,1,2,\ldots n\,;\,\epsilon^{-1}). \qquad /9/$$

Можно показать /из /5/, /6//, что

$$\int x_4(s,-s,s_2,-s_2;\epsilon^{-1})ds_2=0\,(\,\frac{1}{s}\,)\qquad \text{при}\ \ s\to\infty\ ;$$

отсюда, а также из /8/ следует, что после подсчета предела /7/ принимает вид

$$\mu^2(\epsilon)\ =\epsilon^{-1}+6\ \int ds\,[\,\frac{1}{A\,(s;\,\epsilon^{-1})}\,(1-5\int x_4(s,-s,s_2,-s_2;\epsilon^{-1})\,ds_2) \qquad /10/$$

$$-\,D_4\,(0,0,\,s,\,-\,s\,;\,\epsilon^{-1}\,)\,]\ .$$

1.5. Выпишем на основании определения /9/ и уравнений вида /5/, /6/ уравнения для определения величин x_n :

$$-S_2\ x_2(1,2\,;\epsilon^{-1})=2-10\int x_4\,(1,2,s_2\,,-s_2\,;\,\epsilon^{-1}\,)\ ds_2\ ,$$

$$-S_4 x_4(1,2,3,4;\epsilon^{-1}) = 2\times 3\times \frac{2}{5}\,\mathrm{Simm}\,(1,2,3,4)$$

$$D_4(1,2,3,x;\epsilon^{-1})\; x_2(-x,4;\epsilon^{-1}) -$$

$$-21 \int x_6(1,2,3,4,s,-s;\epsilon^{-1})ds,$$

$$-S_6 x_6(1,2,\dots 6) = \mathrm{Simm}\,(1,2,\dots,6)\;[3\times 3\times \frac{2}{7}\times$$

$$D_6(1,2,3,4,5,x;\epsilon^{-1})\, x_2(-x,6;\epsilon^{-1})$$

$$+2\times 5\times \frac{4}{7} D_4(1,2,3,x;\epsilon^{-1})\, x_4(-x,4,5,6;\epsilon^{-1})\;]$$

$$-36 \int x_8(1,2,\dots,6,s,-s;\epsilon^{-1})ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad /11/$$

С учетом первого уравнения системы /11/ уравнение /10/ можно переписать в виде

$$\mu^2(\epsilon) = \epsilon^{-1} + 6\int ds\,[-x_2(s,-s;\epsilon^{-1}) - D_4(0,0,s,-s;\epsilon^{-1})]\,. \qquad /12/$$

1.6. Параметр ϵ в /12/ меняется в пределах от 0 до $+\infty$. Представляется наиболее вероятным, что функция $\mu^2(\epsilon)$ положительна во всем интервале изменения ϵ за исключением, быть может, нуля при $\epsilon = \infty$. Предположим, однако, что $\mu^2(\epsilon)$ обращается в нуль при некотором положительном и конечном значении,

$$\mu^2(\epsilon) > 0\,, \qquad \epsilon < \epsilon_0\,,$$

$$\mu^2(\epsilon_0) = 0\,,$$

и что есть область изменения параметра ϵ,

$$\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_1\,,$$

в которой функция $\mu^2(\epsilon)$ отрицательна. Тогда функции

$t_3^q(q,s,-s;\epsilon^{-1})$, $t_5^q\dots$ отличны от нуля лишь при

$$/a/ \qquad q^2 + \mu^2(\epsilon) \geq 0\,;$$

вне области /a/ эти функции должны быть равны нулю тождественно. Поскольку, однако, параметр ϵ входит в определяющие эти функции уравнения аналитически /через посредство аналитических функций $A(q;\epsilon^{-1})$, $D_4(q;\epsilon^{-1}),\dots$ /, то функции $t_3^q, t_5^q\dots$ должны быть аналитическими функциями ϵ во всей области $0 < \epsilon < \infty$; поэтому они должны быть равны нулю тождественно во всей области

$$q^2 + \min_{\epsilon} \mu^2(\epsilon) < 0\,.$$

Однако расчет по теории возмущений /при $\epsilon \to 0$ / показывает, что такой области нет.

Таким образом, функция $\mu^2(\epsilon)$ не может принимать отрицательных значений.

Только численный расчет поможет решить, какая из рассмотренных в этом пункте возможностей имеет место в действительности.

2. В случае вырожденного основного состояния замены, определенные формулой

$$\Lambda(p) = \sqrt{g\,\nu^2(\beta) + p^2}\,, \qquad /13/$$

формулами /5/ работы /1/ и формулами

$$\gamma_n^p(p_1,\dots p_n) = \tau_n^q(q_1,\dots q_n,\beta)\,,$$

$$p = q\sqrt{g}\,, \qquad /14/$$

$$Y\ (1,2,\ldots n;\beta) = \lim_{q\to\infty} |q|\ \tau_n^q(q,1,2,\ldots n;\ \beta), \qquad /15/$$

приводят к выражению

$$\nu^2(\beta) = \beta^2 + \int ds\,[-6Y_2\ (s,-s;\beta) - \frac{3}{2}\epsilon_3(s,-s;\beta)]$$

для функции $\nu^2(\beta)$, которая, согласно /13/, отличается лишь множителем g^{-1} от квадрата массы одночастичного возбужденного состояния. Здесь ϵ_3 - функция, определенная системой уравнений /6/ работы /1/, функции Y_n, $n = 1,2,\ldots$, определены системой уравнений

$$-S_1 Y_1(0;\beta) = 6\beta - 6\int Y_3\ (0,s,-s;\beta)\,ds,$$

$$-S_2 Y_2\ (1,2;\beta) = 2 + \frac{3}{2}\times 2\times\frac{1}{3}\beta\,\epsilon_3(1,2,0;\beta)\,Y_1\ (0;\beta)$$

$$-10\int Y_4\ (1,2,s,-s;\beta)\,ds,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad /16/$$

которая выводится из ненумерованной системы уравнений, выписанной после формулы /18/ в работе /3/, точно так же, как система уравнений /11/ выводится из системы уравнений /17/ работы /3/.

2.1. Условие /10/ работы /1/ оказывается, как этого и следовало ожидать на основании соображений пункта 3 той же работы, достаточным для равенства

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\mu^2(\epsilon) = \lim_{\beta\to 0}\nu^2(\beta). \qquad /17/$$

Литература

1. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р2-7555, Дубна, 1973.*
2. *Л.Г.Заставенко. ТМФ, 7, 20 /1971/.*
3. *Л.Г.Заставенко. ТМФ, 9, 355 /1971/.*

Рукопись поступила в издательский отдел
7 декабря 1973 года.