ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7585

Л.Г.Заставенко

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В БОЗОННОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ, ПРИГОДНАЯ И ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7585

Л.Г.Заставенко

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В БОЗОННОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ, ПРИГОДНАЯ И ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Направлено в ТМФ

§1. Введение

Теория возмущений /в нерелятивистской квантовой механике и квантовой теории поля/ дает формулировку и решение задачи рассеяния только в случае отсутствия связанных состояний; присутствие же их требует новой, независимой формулировки задачи рассеяния. Такая формулировка в нерелятивистской квантовой механике для системы N частиц дана Экштейном [/1/].

В настоящей работе мы, используя развиваемый в предыдущих исследованиях [/2-5/] подход к бозонной квантовой теории поля, распространяем рассмотрение Экштейна и на случай квантовой теории поля. Здесь дается более подробная формулировка результата, уже отмеченного в работе [/5/].

1.1. Мы исходим из выведенного в [/1/] уравнения

$$R_{\ell n} = (\Phi_\ell \,, (H - E_n)\Phi_n) - \int ds \frac{\bar{R}_{s\ell} \, R_{sn}}{E_s - E_\ell - i\epsilon} \qquad /1/$$

для определения матрицы перехода. Чтобы решать уравнение /1/, необходимо знать, помимо гамильтониана H, асимптотические состояния Φ_n и энергии E_n состояний рассеяния.

1.2. Задание этих величин и вывод уравнения /1/ для системы многих частиц в нерелятивистской квантовой механике мы рассмотрим в §2. Этот параграф не содержит новых результатов по сравнению с [1] /за исключением формул /22/ и /30/, которые, возможно, даются нами впервые/, но необходим для понимания дальнейшего.

1.3. В §3 /пункты 3.5 и 3.6/ дан рецепт выбора асимптотических состояний и энергий E_n в случае бозонной квантовой теории поля; для определенности мы имеем в виду модель нейтрального скалярного поля с самодействием $g\phi^4$ в двумерном пространстве времени [2], когда нет расходимостей. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$H=\int dk\,[-\frac{\delta^2}{\delta\phi(k)\,\delta\phi(-k)}+(M^2+k^2)\phi(k)\,\phi(-k)]\;+ \qquad /2/$$
$$+\,g\int\prod_{i=1}^{4}(dk_i\,\phi(k_i))\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4).$$

Рецепт этот применим как к случаю, когда гамильтониан /2/ имеет только одночастичные возбужденные состояния* и когда работает теория возмущений, так и тогда, когда гамильтонан имеет более сложные возбужденные состояния**, и когда теория возмущений не работает.

1.4. Необходимо подчеркнуть, что рецепт пунктов 3.5, 3.6, хотя и напрашивающийся после работ [1,2,5], дается нами без достаточного обоснования. Поэтому существенно, что подсчет амплитуды рассеяния по нашему способу при $g\to 0$ дает тот же результат, что и теория возмущений /[5], §3/. В последующем мы намерены дать проверку нашего рецепта в модели, где имеются двухчастичные возбужденные состояния.

---

* По определению, это возбужденные состояния, которые переходят в одночастичные свободные состояния при $g\to 0$.

** В дальнейшем такие состояния будут именоваться связанными.

1.5. В §3 /пункт 3.4/ дается независимый от уравнения /1/ способ определения амплитуды

$$R(k_1, k_2, \ldots, k_n\,;\,p_1, p_2, \ldots) \qquad /3/$$

процесса, в котором при столкновении частиц с импульсами p_1, p_2 рождаются n частиц с импульсами $k_1, k_2 \ldots k_n$: для определения этой амплитуды оказывается достаточным решить уравнение Шредингера для двухчастичного состояния рассеяния в форме, предложенной в работе [5] §2. Способ пункта 3.4 существенно полезен тем, что позволяет обойтись без вычисления входящего в /1/ континуального /в случае квантовой теории поля/ интеграла

$$A_{\ell n}=(\Phi_\ell,(H-E_n)\,\Phi_n): \qquad /4/$$

дело в том, что для такого вычисления в настоящее время не известны иные способы, кроме теории возмущений /см., однако [6] /.

Способ пункта 3.4 действителен, по-видимому, только в случае отсутствия связанных состояний.

1.6. Способ пункта 3.4, как и рецепт пунктов 3.5, 3.6, дается без полного обоснования.

1.7. По сравнению с другими известными в литературе формулировками задачи рассеяния [8,9] наша, как нам кажется, имеет, во всяком случае, преимущество простоты.

§2. Экштейнова формулировка задачи рассеяния для системы со многими каналами в нерелятивистской квантовой механике

Мы опишем здесь данную в [1] формулировку задачи рассеяния на простейшем примере системы двух частиц, каждая из которых взаимодействует с силовым центром /потенциалы $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$ / и которые, кроме того, взаимодействуют друг с другом /потенциал $V_{12}(x_1-x_2)$/; такая система определяется гамильтонианом

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)+U_1(x_1)+U_2(x_2)+V_{12}(x_1-x_2)=$$

$$=T_1+T_2+U_1+U_2+V_{12}$$

и уравнением Шредингера

$$(H-E)\Psi(x_1,x_2,x_3)=0. \qquad /5/$$

Предположим, для определенности, потенциалы U_1, U_2, V_{12} такими, что каждый из гамильтонианов H_1, H_2, H_{12},

$$H_1=T_1+U_1 \qquad /6/$$

$$H_2=T_2+U_2 \qquad /7/$$

$$H_{12}=T_1+T_2+V_{12} \qquad /8/$$

имеет одно связанное состояние:

$$(H_1-E_1)\Psi_1(x_1)=0, \quad E_1<0, \qquad /9/$$

$$(H_2-E_2)\Psi_2(x_2)=0, \quad E_2<0, \qquad /10/$$

$$(H_{12}-E_{12})\Psi_{12}(x_1-x_2)=0, \quad E_{12}<0, \qquad /11/$$

$$\int\Psi_1^2(x)dx=\int\Psi_2^2(x)dx=\int\Psi_{12}^2(x)dx=1. \qquad /12/$$

2.1. Рассмотрим теперь процесс, который происходит тогда, когда атом, состоящий из частиц /1,2/ и имеющий импульс p и энергию

$$E=p^2/4+E_{12}, \qquad /13/$$

налетает на силовой центр. Возможны следующие исходы соударения:

1/ атом упруго рассеялся, $p\to q$,

$$\frac{q^2}{4}+E_{12}=E; \qquad /14/$$

2/ атом развалился, и от силового центра отлетают две свободные частицы с импульсами q_1, q_2

$$\frac{q_1^2}{2}+\frac{q_2^2}{2}=E; \qquad /15/$$

3/ атом развалился, но от силового центра отлетает только свободная частица 1 с импульсом q_1, а частица 2 осталась связанной около силового центра:

$$\frac{q_1^2}{2}+E_2=E; \qquad /16/$$

4/ отлетает свободная частица 2, а частица 1 осталась связанной около силового центра:

$$\frac{q_2^2}{2}+E_1=E. \qquad /17/$$

2.2. Согласно работе [1], первому каналу следует поставить в соответствие асимптотическое состояние

$$\Phi_{q12}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Psi_{12}(x_1-x_2)e^{iq\frac{x_1+x_2}{2}}, \qquad /18/$$

второму, третьему и четвертому каналам - асимптотические состояния

$$\Phi_{q_1q_2}=\frac{1}{2\pi}e^{iq_1x_1+iq_2x_2}, \qquad /19/$$

$$\Phi_{q_1 2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i q_1 x_1} \Psi_2(x_2), \qquad /20/$$

$$\Phi_{q_2 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i q_2 x_2} \Psi_1(x_1). \qquad /21/$$

2.3. Решение уравнения Шредингера /5/, соответствующее описанному процессу, мы обозначим Ψ^+_{p12}; это решение следует искать в виде

$$\Psi^+_{p12}(x_1, x_2) = \Phi_{p12}(x_1, x_2) - \int \frac{dq\, L_{11}(q;p)}{\frac{q^2}{4} + E_{12} - E - i\epsilon} \Phi_{q12}(x_1, x_2) -$$

$$- \int \frac{dq_1\, dq_2\, L_{21}(q_1, q_2; p)}{\frac{q_1^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} - E - i\epsilon} \Phi_{q_1 q_2}(x_1, x_2) -$$

$$- \int \frac{dq_1\, L_{31}(q_1, p)}{\frac{q_1^2}{2} + E_2 - E - i\epsilon} \Phi_{q_1 2}(x_1, x_2) . \qquad /22/$$

$$- \int \frac{dq_2\, L_{41}(q_2, p)}{\frac{q_2^2}{2} + E_1 - E - i\epsilon} \Phi_{q_2 1}(x_1, x_2).$$

/налетающая волна в первом канале и расходящиеся волны во всех каналах с первого по четвертый/.

Выпишем формулы, подобные /22/, для случаев, когда налетающая волна имеется не в первом, а во втором, третьем или в четвертом каналах; обозначим эти формулы номером /22а/, а соответствующие решения уравнения Шредингера - $\Psi^+_{p_1 p_2}$, $\Psi^+_{p_1 2}$, $\Psi^+_{p_2 1}$. Определим далее функции Ψ^-_{p12}, $\Psi^-_{p_1 p_2}$, $\Psi^-_{p_1 2}$, $\Psi^-_{p_2 1}$ формулами, полученными из /22/ и /22а/ путем изменения

знака при ϵ: эти функции отличаются от функций /22/, /22а/ тем, что асимптотически состоят из налетающей и сходящейся волн. Перепишем символически формулы /22/, /22а/ в виде

$$\Psi^+_n = \Phi_n - \int \frac{d\ell\, L(\ell; n)}{E_\ell - E_n - i\epsilon} \Phi_\ell . \qquad /23/$$

Величины $L(\ell; n)$ на энергетической поверхности /см. /14/-/17// определяют амплитуду рассеяния.

2.4. Подстановка /23/ в уравнение Шредингера в принципе позволяет определить функцию $L(\ell; n)$ и, таким образом, амплитуду рассеяния. Практически, однако, удобнее это сделать иначе. Будем искать величины $\Psi^\pm_n$ в виде

$$\Psi^+_n = \Phi_n - \int \frac{d\ell\, R(\ell, n)}{E_\ell - E_n - i\epsilon} \Psi^-_\ell$$

$$\Psi^-_\ell = \Phi_\ell - \int \frac{ds\, R'(s, \ell)}{E_s - E_\ell + i\epsilon} \Psi^+_s . \qquad /24/$$

Покажем, что

$$R(\ell, n) = L(\ell, n), \qquad /25/$$

если $E_\ell = E_n$. Для доказательства, проитерировав, перепишем /24/ в виде

$$\Psi^+_n = \Phi_n - \int \frac{d\ell\, R(\ell, n)}{E_\ell - E_n - i\epsilon} \Phi_\ell$$

$$+ \int d\ell\, \Psi^+_\ell \int ds \frac{R'(\ell, s) R(s, n)}{(E_\ell - E_s + i\epsilon)(E_s - E_n - i\epsilon)} . \qquad /26/$$

Предполагая аналитичность функций $R'(\ell,s)$, $R(s,n)$ по s, можем сместить контур интегрирования по s на некоторую прямую $\operatorname{Im} E_s = c < 0$. Тогда подинтегральное выражение в интеграле по s оказывается ограниченным, и следует ожидать, что сам этот интеграл является аналитической функцией E_ℓ на всей вещественной оси. Но тогда последний интеграл в /26/ дает лишь быстро убывающую на больших расстояниях добавку к Ψ_n^+ , не влияющую на расходящиеся потоки; таким образом, эти потоки определяются только величиной $R(\ell,n)$ при $E_\ell = E_n$. Отсюда следует /25/.

2.5. Из /24/ легко вывести уравнение /1/ для определения функции $R(\ell,n)$. Для этого, однако, нам понадобится еще формула

$$\Psi_\ell^{\pm} = \Phi_\ell - \frac{1}{H-E_\ell \mp i\epsilon}(H-E_\ell)\Phi_\ell , \qquad /27/$$

дающая явное выражение состояния рассеяния через асимптотические состояния. Эта формула выводится /1/ тривиально: подставим в /5/ при $E=E_n$ функцию $\Psi=\Psi_n^+$ в виде $\Psi_n^+ = \Phi_n + \kappa$;

очевидно, $(H-E_n)\kappa = -(H-E_n)\Phi_n$;

требование, чтобы функция κ содержала только расходящиеся волны, определяет эту функцию в виде последнего члена /27/. Таким образом, формула /27/ доказана.

Для вывода уравнения /1/ подставим /24/ в /5/ при $E=E_n$; поскольку

$$H\Psi_\ell^{\pm} = E_\ell \Psi_\ell^{\pm}$$

и

$$\frac{E_\ell - E_n}{E_\ell - E_n \mp i\epsilon} = 1 ,$$

то получим

$$R_{\ell,n} = (\Psi_\ell^{-}, (H-E_n)\Phi_n). \qquad /28/$$

Подставим сюда формулу /27/; воспользовавшись в выражении

$$\left(\frac{1}{H-E_\ell + i\epsilon}(H-E_\ell)\Phi_\ell ,\ (H-E_n)\Phi_n\right)$$

спектральным представлением

$$\frac{1}{H-E_\ell + i\epsilon} = \int \Psi_s^+ \Psi_s^{+*} \frac{ds}{E_s - E_\ell + i\epsilon} \qquad /29/$$

и принимая во внимание /28/, получаем /1/.

2.6. Наш вывод /1/, в отличие от /1/, лежит целиком в рамках стационарного подхода.

2.7. Предположим, что гамильтониан /5/ имеет связанное состояние двух частиц около силового центра

$$(H-E_{1+2})\Psi_{1+2}(x_1,x_2)=0.$$

Тогда в правую часть /29/ следует добавить член

$$\frac{1}{E_{1\,2}-E_\ell}\Psi_{1+2}\Psi^*_{1+2},$$

что дает в /1/ добавку

$$-\frac{\bar R(1+2,\ell)R(1+2,n)}{E_{1+2}-E_\ell} ,$$

где

$$R(1+2,\ell) = \int \Psi_{1+2}(H-E_\ell)\Phi_\ell\, dx_1 dx_2 =$$

$$= (E_{1+2}-E_\ell)\int \Psi_{1+2}\Phi_\ell\, dx_1 dx_2 .$$

2.8. В заключение этого параграфа выпишем фурье-преобразование формулы /22/:

$$\tilde{\Psi}^{+}_{p\,12}(p_1,p_2)=\delta(p_1+p_2-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\Psi}_{12}\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)-$$

$$-\frac{L_{11}(p_1+p_2\,;p)}{\frac{(p_1+p_2)^2}{4}-\frac{p^2}{4}+-i\epsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\Psi}_{12}\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right)$$

$$-\frac{L_{21}(p_1,p_2;p)}{\frac{p_1^2}{2}+\frac{p_2^2}{2}-\frac{p^2}{4}-E_{12}-i\epsilon}-\frac{L_{31}(p_1,p)}{\frac{p_1^2}{2}+E_2-\frac{p^2}{4}-E_{12}-i\epsilon} \qquad /30/$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\Psi}_2(p_2)-\frac{L_{41}(p_2,p)}{\frac{p_2^2}{2}+E_1-\frac{p^2}{4}-E_{12}-i\epsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\Psi}_1(p_1).$$

Эта формула дает простую связь между особенностями фурье-образа состояния рассеяния, элементами матрицы рассеяния и фурье-образами кластерных волновых функций Ψ_1, Ψ_2, Ψ_{12}. /Напомним, что величины $L(\ell,n)$ на энергетической поверхности, согласно /25/, являются элементами матрицы рассеяния/.

§3. Формулировка задачи рассеяния в бозонной квантовой теории поля

Для определенности мы будем иметь в виду квантовую теорию скалярного нейтрального поля с самодействием $g\phi^4$ в случае двумерного пространства-времени /2/, когда нет расходимости. Этот вариант квантовой теории поля определяется гамильтонианом /2/ и оператором импульса

$$P=\int k\,dk\,\phi(k)\frac{\delta}{\delta\phi(k)}. \qquad /31/$$

Мы ограничим рассмотрение случаем невырожденного вакуума, то есть будем считать параметр M^2 "достаточно большим" /2/. При этом основное состояние гамильтониана $\Omega_0(\phi)$ имеет вид

$$\Omega_0(\phi)=e^{-\kappa} \qquad /32/$$

$$2\kappa=\int a(k)\phi(k)\phi(-k)dk+$$

$$+\int C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\prod_1^4(\phi(k_i)dk_i)\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)+\ldots$$

$$/33/$$

Подстановка /32/, /33/ в уравнение Шредингера дает уравнения для определения коэффициентных функций $a(k)$, C_4, ... Формально обозначим E_0 собственное значение гамильтониана, соответствующее функционалу /32/; тогда

$$(H-E_0)\Omega_0(\phi)=0. \qquad /34/$$

Кроме того,

$$P\Omega_0(\phi)=0. \qquad /35/$$

Над основным состоянием располагается спектр возбужденных состояний, которые бывают двух типов:
1/ состояния частиц и
2/ состояния рассеяния, описывающие процесс, происходящий при столкновении нескольких частиц.

3.1. Простейшим состоянием частицы, заведомо имеющим гамильтониан /2/, является одночастичное возбужденное состояние /см. сноску на стр. 4/. Обозначим $\Omega_{1\,p}(\phi)$ функционал одночастичного возбужденного состояния с импульсом p и $\Lambda_1(p)$ - соответствующую энергию возбуждения

$$H\Omega_{1p} = [E_0 + \Lambda_1(p)]\Omega_{1p} \qquad /36/$$

$$P\Omega_{1p} = p\Omega_{1p}. \qquad /37/$$

Из релятивистской инвариантности теории следует, что

$$\Lambda_1(p) = \sqrt{p^2 + m_1^2},$$

где m_1^2 от p не зависит.

Определим функционал $U_{1p}(\phi)$ соотношением

$$\Omega_{1p}(\phi) = U_{1p}(\phi)\Omega_0(\phi). \qquad /38/$$

Будем искать U_{1p} в виде

$$U_{1p}(\phi) = \phi(p) + \int \Gamma_3^{\,p}(k_1, k_2, k_3) \prod_1^3 (\phi(k_i) dk_i) \qquad /39/$$

$$\delta(k_1 + k_2 + k_3 - p).$$

Подстановка /38/, /39/ в гамильтониан дает уравнения для определения коэффициентных функций Γ_3, Γ_5,... и энергии $\Lambda_1(p)$ /4/. Необходимо отметить, что решение этих уравнений будет одночастичным возбужденным состоянием только в том случае, если оно удовлетворяет условиям

$$\Gamma_3 \to 0, \quad \Gamma_5 \to 0, \ldots \qquad \text{при} \quad g \to 0. \qquad /40/$$

Всякое решение уравнения Шредингера вида /38/, /39/ с аналитическими при вещественных значениях аргументов коэффициентными функциями Γ_3, Γ_5... будет состоянием частицы с импульсом p, но если условия /40/ не выполнены, это не будет одночастичным возбужденным состоянием; следует ожидать, что в нашей модели такие /не одночастичные/ состояния могут существовать только в некоторой области $g > g_{01} > 0$. Функционал /38/ является нечетным по ϕ. Рассмотрим четное по ϕ решение уравнения Шредингера

$$+ \ldots$$

$$\Omega_{2p}(\phi) = U_{2p}(\phi)\Omega_0(\phi),$$

$$U_{2p}(\phi) = \int \Gamma_2^{\,p}(k_1, k_2)\phi(k_1)\phi(k_2) dk_1 dk_2 \qquad /41/$$

$$\delta(k_1 + k_2 - p)$$

$$+ \int \Gamma_4^{\,p}(k_1, k_2, k_3, k_4) \prod_1^4 (\phi(k_i) dk_i)\, \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - p)$$

$$+ \ldots \qquad /42/$$

Если функционал /41/, /42/ удовлетворяет уравнению Шредингера и коэффициентные функции Γ_2, Γ_4,... аналитичны при вещественных значениях своих аргументов, функционал /41/ описывает некоторую частицу с импульсом p и энергией

$$\Lambda_2(p) = \sqrt{p^2 + m_2^2}, \quad m_2 < 2m_1.$$

3.2. Перейдем теперь к состояниям рассеяния. Ограничим рассмотрение состояниями, четными по ϕ. Пусть речь идет о столкновении двух одночастичных возбужденных состояний с импульсами p_1 и p_2, $p_1 + p_2 = p$. Тогда энергия возбуждения равна $\Lambda_1(p_1) + \Lambda_1(p_2)$ /что заведомо больше, чем $\Lambda_2(p)$ /; коэффициентная функция $\Gamma_2(k_1, k_2)$ имеет главную сингулярность

$$\delta(p_1 - k_1) + \delta(p_1 - k_2); \qquad /43/$$

эта сингулярность переходит в Γ_2, Γ_4 ... ввиду наличия членов вида $[\Gamma_2 C_4]$, $[\Gamma_2 C_6]$.. в правой части уравнений /4/, /17/. Таким образом, для состояний рассеяния коэффициентные функции зависят от своих аргументов неаналитически.

В /42/ удобно перейти от разложения по степеням ϕ к разложению по степеням

$$U_{1p}(\phi) \equiv U(p)^{/5/}, \qquad /39a/$$

здесь $U_{1p}(\phi)$ - функционал /39/ для одночастичного возбужденного состояния:

$$U_{2p_1,p_2}(\phi)=\int X_2^{p_1p_2}(k_1,k_2)U(k_1)U(k_2)dk_1dk_2\delta(p-k_1-k_2)+$$

$$+\int X_4^{p_1p_2}(k_1,k_2,k_3,k_4)\prod_i^4(U(k_i)dk_i)\delta(p-\sum_i^4 k_j) \qquad /44/$$

$+ \dots\dots$

Функции X_2, X_4,... определяются системой уравнений /5/ /2/.

Для рассматриваемого столкновения двух частиц с импульсами p_1 и p_2 коэффициентная функция $X_2^{p_1p_2}(k_1,k_2)$ имеет главную сингулярность /43/; ввиду аналитичности ядер Y_2, Y_4,... /5/ эта сингулярность не переходит в X_4, X_6... Кроме того, из уравнений /5/, /2/ видно, что все функции $X_{2n}^{p_1p_2}(k_1,k_2,\dots k_{2n})$ имеют сингулярности на энергетической поверхности:

$$X^{p_1p_2}(k_1,k_2,\dots k_{2n})=$$

$$=-\frac{L_{2n,2}^{p_1p_2}(k_1,k_2,\dots k_{2n})}{\sum_1^{2n}\Lambda_1(k_i)-\Lambda_1(p_1)-\Lambda_1(p_2)-i\epsilon}; \qquad /45/$$

здесь функции $L_{2n,2}$ аналитичны по своим аргументам при их вещественных значениях; при $n=1$ формула вида /45/ имеет место для части X_2, остающейся после вычитания сингулярности /43/. Таким образом,

$$U_{2p_1p_2}(\phi)=U(p_1)U(p_2)+$$

$$-\int\frac{L_{2,2}^{p_1p_2}(k_1,k_2)\prod_1^2(U(k_i)dk_i)\delta(p-k_1-k_2)}{\Lambda_1(k_1)+\Lambda_1(k_2)-\Lambda_1(p_1)-\Lambda_1(p_2)-i\epsilon}-$$

$$\int\frac{L_{42}^{p_1p_2}(k_1,k_2,k_3,k_4)\prod_1^4(U(k_i)dk_i)\delta(\sum k_i-p)}{\sum_1^4\Lambda_1(k_i)-\Lambda_1(p_1)-\Lambda_1(p_2)-i\epsilon} \qquad /46/$$

$- \dots.$

3.3. Полученная формула в сочетании с аналогичными формулами для более сложных соударений /трехчастичных и более/ вместе с /41/ и /22/, /23/ дает основание и даже заставляет принять функционалы вида

$$\Phi_{k_1k_2\dots k_4}=C\prod_i(U(k_i))\,\Omega_0(\phi) \qquad /47/$$

за функционалы асимптотических состояний n частиц с импульсами k_1, k_2, k_n *. Нормировочный множитель в /47/ следует принять равным

$$C=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{N_1(k_i)}}\right), \qquad /48/$$

здесь функция $N_1(k)$ определена формулой

$$N_1(k)=\int|U_{1k}(\phi)|^2\,\Omega_0^2(\phi)\delta\phi/ \qquad /49/$$

$$(\delta(0)\int\Omega_0^2(\phi)\delta\phi)$$

и есть, таким образом, среднее значение квадрата модуля функционала одночастичного возбужденного состояния по распределению $\Omega_0^2(\phi)$, деленное на фактор $\delta(0)=h^{-1}$ /см. пункт 2.5 работы /2/: при подсчете континуальных интегралов является существенным /7/

---

* /46/ отличается от /22/ наличием факторов $\delta(\Sigma k-p)$, выражающих сохранение импульса; аналогичные факторы появятся и в формуле типа /22/, если взять гамильтониан, допускающий сохранение импульса.

то, какова последовательность интервалов Δ_i в аппроксимации функционалов вида

$$\int a(k)\phi(k)\phi(-k)\,dk \sim \Sigma\,\Delta_i\, a(k_i)\phi(k_i)\phi(-k_i);$$

у нас $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = h$).

Благодаря /48/, /49/ имеет место формула нормировки

$$\int \bar{\Phi}_{k_1',k_2',\ldots k_n'}\ \Phi_{k_1 k_2 \ldots k_n}\ \delta\phi = \qquad /50/$$

$$= (\prod_{i=1}^{n} \delta(k_i' - k_i) + \ldots.)\int \Omega_0^2(\phi)\delta\phi;$$

здесь точками обозначены менее сингулярные члены /в которых часть множителей $\delta(k_i' - k_i)$, скажем, $\prod_1^3 \delta(k_i' - k_i)$, заменена на

$$F(k_1, k_1', k_2, k_2', \ldots k_s, k_s')\delta(k_1 + k_2 + \ldots k_s - k_1' - k_2' - k_s').$$

3.4. Рассмотрение пункта 3.3. дает возможность написать формулу

$$R(k_1, k_2, \ldots, k_n; p_1, p_2) =$$

$$= (\Sigma\Lambda_1(k_i) - \Lambda_1(p_1) - \Lambda_1(p_2))X_n^{p_1 p_2}(k_1, k_2, \ldots k_n) \qquad /51/$$

$$[(\prod_1^n N_1(k_i))/N_1(p_1)N_1(p_2)]^{1/2},$$

выражающую элемент матрицы рассеяния /на энергетической поверхности/ через функции $X_n^{p_1 p_2}$, определенные системой уравнений /2/ работы /5/. При $n=2$ $X_2^{p_1 p_2}$ в /51/ следует понимать в смысле замечания после формулы /45/.

3.5. Формула /51/ решает задачу определения матрицы рассеяния в простейшем случае, когда гамильтониан /2/ имеет единственное возбужденное состояние типа частицы - именно одночастичное возбужденное состояние. В этом случае есть и другой способ решения упомянутой задачи, а именно: она сводится к решению уравнения Экштейна /1/; необходимые для этого асимптотические состояния определяются формулами /47/-/49/, энергии состояний есть комбинации величин $\Lambda_1(k_i)$. Этот способ, по-видимому, сложнее предыдущего, поскольку он требует подсчета континуального интеграла /4/, входящего в /1/.

3.6. Существенным достоинством этого способа, однако, является то, что он допускает непосредственое обобщение на случай, когда гамильтониан имеет и более сложные, чем одночастичное, возбужденные состояния типа частиц. Именно, пусть, например, имеется четное по ϕ возбужденное состояние типа частицы, определенное функционалом $U_{2p}(\phi)$ /42/ с аналитическимн коэффициентными функциями. Тогда набор асимптотических состояний /47/ следует расширить до

$$\Phi_{k_1, k_2, k_n; q_1 \ldots q_\ell} = C\prod_1^n U_{1k_i}(\phi)\prod_1^\ell U_{2q_j}(\phi)\,\Omega_0; \qquad /52/$$

где

$$C = [\prod_1^n N_1(k_i)\prod^\ell N_2(q_j)]^{-1/2}$$

и $\qquad /53/$

$$N_2(q) = \int |U_{2q}(\phi)|^2\,\Omega_0^2\delta\phi/(\delta(0)\int\Omega_0^2\delta\phi).$$

Асимптотическое состояние /52/ соответствует системе n "простых" частиц с импульсами $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и ℓ "сложных" частиц с импульсами $q, q, \ldots, q_\ell$.

После этого для определения матрицы рассеяния можно снова пользоваться уравнением /1/, энергии E_n и E_ℓ в /1/ будут комбинациями величин $\Lambda_1(k)$ и $\Lambda_2(q)$.

Отметим, что наличне сложных возбужденных состояний с необходимостью приводит к появлению в уравнении /1/ членов вида рассмотренных в пункте 2.6 /для состояний, четных по ϕ; для состояний, нечетных по ϕ, такие члены имеются всегда; добавки к /1/ имеют вид

$$-\int \frac{dp}{\Lambda_i(p)-E_\ell} \bar{R}(p, \ell) R(p,n),$$

где

$$R(p,n) = \frac{1}{\sqrt{N_i(p)}} (U_{ip}(\phi)\Omega_0, (H-E_n)\Phi_n),$$

$$i = 1,2).$$

Пользуюсь случаем поблагодарить Б.Н.Захарьева и М.И.Широкова, познакомивших меня с работой [1], а также Л.Д.Фаддеева и И.Я.Арефьеву, заметивших, что асимптотические состояния /47/-/48/ тождественны с введенными в работе [9].

Литература

1. H.Ekstein. Phys.Rev., 101, 880 (1956).
2. *Л.Г.Заставенко. ТМФ, 7, 20 /1971/.*
3. *Л.Г.Заставенко. ТМФ, 8, 335 /1971/.*
4. *Л.Г.Заставенко. ТМФ, 9, 355 /1971/.*
5. *Л.Г.Заставенко. ТМФ, 10, 58 /1972/.*
6. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ Р2-7116, Дубна, 1973.*
7. W.Garczynski. Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.sci.math. astronom. et phys., 21, 355 (1973).
   Ф.А.Березин. ТМФ, 6, 194 /1971/.
8. H.Ekstein. Nuovo Cimento, 4, 1017 (1956).
9. L.Van Hove. Physica, 21 (901) 1955; 22, 343 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел 13 декабря 1973 года.