ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 7572

В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов

ПРИЧИННОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7572

В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов

ПРИЧИННОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в Communications in Mathematical Physics

I. Введение

Хорошо известно, что принцип причинности лежит в основе всех направлений теории элементарных частиц.

В квантовой теории поля этот принцип наряду с постулатами о релятивистской ковариантности и квантовомеханической природе явлений в микромире является основным при построении теории (построение S- матрицы /1/, аксиоматический подход Вайтмана /2/, дисперсионные соотношения /3/ и т.д.).

В локальной теории поля условие причинности находит своё математическое выражение как требование локальной коммутативности гайзенберговых полей $\phi(x)$:

$$[\phi(x), \phi(y)]_- = 0 \qquad \text{при} \quad x \sim y \,, \tag{1.1}$$

или в форме условия микропричинности для S-матрицы :

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)} S^+\right) = 0 \qquad \text{при} \quad x \lesssim y \,. \tag{1.2}$$

Эти условия носят формальный математический характер и являются скорее постулатами о математической структуре полей $\phi(x)$ в (1.1) и S-матрицы в (1.2), нежели постулатами физической причинности. Это связано с тем, что понятие о точечности событий, предполагаемое в (1.1) и (1.2), не совместимо с представлениями квантовой механики.

В последнее время предпринимаются многочисленные попытки сформулировать так называемое физическое условие причинности /4/, т.е. отыскать те минимальные требования к амплитудам физических процессов, которые гарантировали бы отсутствие всяких явно непричинных явлений в макромире. Однако до сих пор эта проблема остаётся открытой, а условия (I.I) или (I.2) являются фактически единственными "рабочими" формулировками условия причинности, обеспечившими хорошо известные результаты в различных направлениях локальной квантовой теории поля. Существенно заметить, что предсказания локальной теории согласуются с экспериментом вплоть до расстояний, достижимых в настоящее время ($\approx 10^{-15}$см). Это, во-первых, свидетельствует, по-видимому, о том, что математическое условие причинности заведомо гарантирует выполнение физического условия, если таковое удастся сформулировать, а, во-вторых, представление о точечности событий является хорошим приближением вплоть до энергий, достижимых в настоящее время.

Однако трудности с ультрафиолетовыми расходимостями, с одной стороны, и тот факт, что представление о строгой локализуемости реальных событий является приближённым понятием, с другой стороны, породили многочисленные попытки построить самосогласованную теорию, отказавшись от локальности взаимодействия и, следовательно, что кажется очевидным, от микропричинности теории. Однако в этом случае теория может считаться приемлемой только тогда, когда нарушение микропричинности локализовано в достаточно малых пространственно-временных областях. Изучение причинных свойств S- матрицы в таких теориях имеет первостепенное значение.

В настоящей работе мы покажем, что построенная одним из авторов квантовая теория поля с нелокальным взаимодействием /5/ удовлетворяет условию микропричинности в форме (I.2) в каждом порядке теории возмущений.

2. Лагранжиан и S - матрица при нелокальном взаимодействии

В настоящей работе будем рассматривать теорию однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$, для которого плотность лагранжиана записывается в виде

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + g\mathcal{L}_I(x),$$
$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} : [\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - m^2\varphi(x)]: , \tag{2.1}$$
$$g\mathcal{L}_I(x) = g : [\Phi(x)]^N :$$

Здесь N - некоторое целое число и

$$\Phi(x) = \int dx' K(x-x')\varphi(x') = K(\ell^2\Box)\varphi(x), \tag{2.2}$$

где

$$K(x-x') = K(\ell^2\Box)\delta^{(4)}(x-x') - \tag{2.3}$$

нелокальная обобщённая функция (см.[6]). Параметр ℓ имеет смысл размера области взаимодействия.

Вообще говоря, можно было бы рассмотреть более общий случай (неполиномиальные лагранжианы и различные способы введения нелокальности во взаимодействие), как это было сделано при доказательстве унитарности S-матрицы в[7]. Однако этого мы здесь делать не будем, чтобы не загромождать изложение. Методы, которые будут изложены ниже, легко могут быть перенесены на общий случай.

Введение нелокальности в лагранжиан взаимодействия описанным выше способом приводит к тому, что в ряду теории возмущений для S-матрицы причинная функция скалярного поля изменяется:

$$\frac{1}{m^2-k^2-i\varepsilon} \longrightarrow \frac{[K(\ell^2 k^2)]^2}{m^2-k^2-i\varepsilon} . \tag{2.4}$$

Мы предполагаем, что функция $V(z)=[K(-z)]^2$ удовлетворяет свойствам (E) :

1) $V(z)$ – целая аналитическая функция в комплексной z- -плоскости порядка роста $\rho=\frac{1}{2}$, т.е. $\exists C>0, \ell_1>0$, что $|V(z)|\leq C\exp\{\ell_1\sqrt{|z|}\}$;

2) $V(z)=O\left(\frac{1}{|z|^{1+a}}\right)$ при $Re\,z\to+\infty$, где $0<a<1$;

3) $V(-\ell^2 m^2)=1$;

4) $[V(z)]^*=V(z^*)$.

Например:

$$V(-\ell^2 k^2)=\left(\frac{\sin \ell\sqrt{m^2-k^2}}{\ell\sqrt{m^2-k^2}}\right)^4$$ и т.д.

Пространство основных функций Z состоит из всех целых функций произвольного порядка роста $f(z_1,\dots,z_n)$ от n комплексных переменных $z_j=x_j+iy_j$ $(j=1,\dots,n)$, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\dots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n\,|f(x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)|<\infty$$

при произвольных $y_1,\dots,y_n$.

Пространство $\tilde{Z}$, которое является пространством фурье-образов функций f из Z , состоит из дифференцируемых функций $\tilde{f}(p_1,\dots,p_n)$, для которых $\exists C_{\{N_j\}}>0$, что

$$\left|\tilde{f}(p_1,\dots,p_n)\right| \leq C_{\{N_j\}} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n} N_j |p_j|\right\}$$

при любых $N_j > 0$.

Стандартные методы квантовой теории поля [I] приводят к тому, что S-матрица формально представляется в виде

$$S[g] = T \exp\left\{ i \int dx\, g(x) \mathcal{L}_I(x) \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n\, g(x_1) \dots g(x_n)\, S_n(x_1,\dots,x_n). \qquad (2.5)$$

Здесь $g(x)$ – функция включения взаимодействия, $S_n(x_1,\dots,x_n)$ – оператор, который можно представить в виде разложения по нормальным произведениям поля $\varphi(x)$:

$$S_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{m_1\dots m_n} K^{(n)}_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n) : \frac{\varphi^{m_1}(x_1)}{m_1!} \dots \frac{\varphi^{m_n}(x_n)}{m_n!} : \qquad (2.6)$$

Коэффициентные функции выражаются через произведения нелокальных пропагаторов поля $\varphi(x)$:

$$D(x_1-x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4k\, V(-l^2k^2)\, e^{-ik(x_1-x_2)}}{m^2-k^2-i\varepsilon} \qquad (2.7)$$

Поскольку эта функция в силу свойств (E) существует только как обобщённая функция, заданная на пространстве Z, произведение причинных функций математически не определено. Определение конструкций вида

$$K^{(n)}_{m_1\dots m_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{ij} D(x_i - x_j)$$

является основной проблемой при построении конечной S-матрицы.

Обычным приёмом при решении этой проблемы является использование некоторой промежуточной регуляризации, придающей математический смысл элементам S- матрицы.

Коэффициентные функции $K^{(n)}_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ должны быть заданы как обобщённые функции на Z. Они строятся как предел локально интегрируемых функций $K^{(n)\delta}_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ при помощи регуляризации, задаваемой параметром δ, таким образом, что в несобственном смысле

$$\lim_{\delta \to 0} K^{(n)\delta}_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) = K^{(n)}_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) \in Z',$$

или, иначе,

$$S[g] = \lim_{\delta \to 0} S^{\delta}[g], \tag{2.8}$$

где $g(x) \in Z$.

В работе [7] сформулирована такая процедура регуляризации, что предел (2.8) существует и $S[g]$- матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений.

Несколько другая регуляризация, которая позволяет провести каноническое квантование нелокального лагранжиана (2.1) и обладает теми же свойствами, сформулирована в [8].

3. Условие причинности

В дальнейшем мы будем проверять условие причинности, записанное в форме

$$R(x,y)=\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S[g]}{\delta g(y)}\,S^{+}[g]\right)=0 \tag{3.1}$$

при $x \lesssim y$. Положим $y=0$, тогда нам надо было бы доказать, что

$$\int dx\, R(x,0)\, f_G(x)=0 \tag{3.2}$$

для любых функций $f_G(x)$, отличных от нуля только на областях пространства-времени $G\subset R^4$, лежащих вне конуса будущего относительно точки $x=0$, т.е.

$$G \not\subset V^{+}=\{x:\ x_0\geqslant 0,\ x^2\geqslant 0\}. \tag{3.3}$$

Таким образом, для проверки условия причинности в форме (3.2) достаточно иметь в пространстве основных функций, на котором строится теория, подпространства функций с ограниченным носителем. Более того, факт наличия подпространств таких функций в основном пространстве был положен в основу для максимального расширения класса обобщённых функций, на которых может быть построена строго локальная квантовая теория поля (см. /9,10/).

Основной трудностью при формулировке и проверке условия причинности в нелокальной квантовой теории является то обстоятельство, что среди функций основного пространства отсутствуют функции с ограниченным носителем.

Поэтому условие причинности, сформулированное выше, не может быть непосредственно проверено ввиду отсутствия функций $f(x)$, носителями которых были бы некоторые произвольные ограниченные множества из R^4.

Следовательно, проблема, с которой мы сталкиваемся при изучении причинных свойств $S[g]$- матрицы в нелокальной теории, заключается в том, чтобы дать метод исследования пространственно-временных свойств операторозначных обобщённых функций, коэффициентные функции которых представляют собой аналитические функционалы, т.е. определены лишь на пространствах аналитических функций.

Наш постулат состоит в том, что локальные пространственно-временные свойства в R^4 обобщённых функций, заданных на пространстве целых функций Z, могут быть определены при помощи проектирующих последовательностей функций $\{f_{G,\lambda}(x)\}$, основные свойства которых следующие :

1. $$f_{G,\lambda}(z) \in Z, \quad \lambda > 0,$$

2. $$\lim_{\lambda \to 0} f_{G,\lambda}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin G, \\ \psi(x) \neq 0, & x \in G. \end{cases}$$

Подробно все свойства проектирующих последовательностей будут рассмотрены ниже (см. также /II/).

Мы будем говорить, что S- матрица удовлетворяет условию микропричинности, если

$$\lim_{\lambda \to 0} \int dx \, R(x,0) f_{G,\lambda}(x) = 0 \tag{3.4}$$

для любых проектирующих последовательностей $\{f_{G,\lambda}(x)\}$, таких, что область G удовлетворяет условию (3.3).

Нетрудно видеть, что в случае локализуемых теорий определение (3.4) совпадает с обычной формулировкой условия микропричинности.

4. Проектирующие последовательности функций

Проектирующие последовательности функций в конфигурационном пространстве определим следующим образом /10/.

Определение: Пусть $\mathfrak{Z}$ - пространство всех целых функций $f(z_0, z_1, z_2, z_3)$ четырёх комплексных переменных. Будем называть последовательность функций $\{f_{\Gamma,\lambda}(z)\}$ проектирующей, если:

1) область $\Gamma \subset R^4$;

2) $f_{\Gamma,\lambda}(z) = f_{\Gamma,\lambda}(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{Z}$, $\lambda > 0$;

3) $\int d^4x\, f_{\Gamma,\lambda}(x+iy) = \mathrm{mes}\,\Gamma$, $\lambda > 0$, $\forall y$;

4) $|f_{\Gamma,\lambda}(x+iy)| = O\left(\frac{1}{\|y\|}\right)$, $\|y\| \to \infty$, $x \notin \Gamma$;

5) $\lim\limits_{\lambda \to 0} f_{\Gamma,\lambda}(x+iy) = 0$, $x \notin \Gamma$, $\forall y$;

6) $\lim\limits_{\lambda \to 0} f_{\Gamma,\lambda}(x+iy) = \psi(x+iy) < \infty$, $x \in \Gamma \subset R^4$, $\forall y$.

Открытая область $\Gamma \subset R^4$ называется носителем проектирующей последовательности.

Обозначим пространство всех проектирующих последовательностей при произвольных носителях Γ через $\mathcal{J}$, а пространство проектирующих последовательностей, носители которых содержатся в некоторой ограниченной области $G \subset R^4$, - через $\mathcal{J}(G)$.

Существенно заметить, что функции, принадлежащие $\mathfrak{J}$, имеют бесконечный порядок роста, т.е.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^N}{\max\limits_{\|z\|=z} \log^+|f_\lambda(z)|} = 0\ , \quad \forall N>0,$$

если $f_{\Gamma,\lambda}(z) \in \mathfrak{J}$. Поэтому $f_\lambda(z) \in Z$.

Пространство $\mathfrak{J}$ не пусто. Функции пространства $\mathfrak{J}$ можно построить, например, следующим образом. В пространстве $Z \subset \mathfrak{Z}$ существуют функции $g(z)$ одного комплексного переменного, которые удовлетворяют условиям:

I) существует такое число $d>0$, зависящее от g, что

$$|g(z)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

при $z\to\infty$ вне полосы $|Re\, z| > d$;

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) = 1 .$$

Приведём пример такой функции:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du\, e^{iuz}}{\Gamma(\sqrt{1+u^2})} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{du \cos uz}{\Gamma(\sqrt{1+u^2})} . \quad (4.I)$$

Для этой функции справедливы оценки

$$g(z) = \begin{cases} O(e^{-|z|}), \ |Re\, z| > \frac{\pi}{2}, \quad z\to\infty, \\ \\ O(\exp\{e^{|z|}\}), \ |Re\, z| < \frac{\pi}{2}, \ z\to\infty. \end{cases} \quad (4.2)$$

Построим последовательность функций:

$$g_{\Gamma,\lambda}(z)=\int\limits_{\Gamma_\lambda} d^4x'\,\psi(x')\prod_{j=0}^{3}\frac{1}{\lambda}g\left(\frac{z_j-x_j'}{\lambda}\right). \tag{4.3}$$

Здесь $\psi(x')$ - произвольная целая функция; например, $\psi(x')=e^{iqx'}$, где q - произвольный 4-вектор,

$$\Gamma_\lambda=\left\{x:\ \min_{\xi\in S}\|x-\xi\|\geq\lambda d,\ x\in\Gamma,\ \xi\in S=\bar{\Gamma}\setminus\Gamma\right\},$$

Γ - произвольная ограниченная область из R^4.

Последовательность (4.3) обладает следующими свойствами.

I.
$$\lim_{\lambda\to 0} g_{\Gamma,\lambda}(z)=\psi(z)\,\theta_\Gamma(x), \tag{4.4}$$

где

$$\theta_\Gamma(x)=\begin{cases}1, & x\in\Gamma,\\ 0, & x\notin\Gamma.\end{cases}$$

Другими словами, в каждой из областей $\Gamma+iR^4$ и $(R^4\setminus\bar{\Gamma})+iR^4$ последовательность $\{g_{\Gamma,\lambda}(z)\}$ равномерно сходится к аналитической функции $\psi(z)$ и 0 соответственно.

II. Пусть функция восьми переменных $F(x,y)$ локально интегрируема и

$$\lim_{\lambda\to 0}\iint d^4x\,d^4y\,F(x,y)\,g_{\Gamma,\lambda}(x+iy)=0$$

для $\forall g_{\Gamma,\lambda}(z) \in \mathcal{J}(G)$, т.е. при любых целых $\psi(z)$ в (4.3), и $\Gamma \subset G$, тогда

$$F(x,y) = 0$$

для всех $x \in G$ и $y \in R^4$.

III. Рассмотрим аналитический функционал

$$\int\limits_{L} d^4 z\, F(z)\, g_{\Gamma,\lambda}(z),$$

где L – некоторая поверхность интегрирования в пространстве C^4. Пусть поверхность интегрирования L может быть непрерывно деформирована в области аналитичности функции $F(z)$ к поверхности L_1, такой, что

$$\text{или} \quad L_1 \subset \Gamma + iR^4,$$

$$\text{или} \quad L_1 \subset (R^4 \setminus \bar{\Gamma}) + iR^4.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{L_1} d^4 z\, F(z)\, g_{\Gamma,\lambda}(z) = \int\limits_{L_1} d^4 z\, F(z) \lim_{\lambda \to 0} g_{\Gamma,\lambda}(z) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{L_1} d^4 z\, F(z)\psi(z), & L_1 \subset \Gamma + iR^4, \\ 0, & L_1 \subset (R^4 \setminus \bar{\Gamma}) + iR^4. \end{cases}$$

5. Принцип физической локальности

Как известно[I], при построении ряда теории возмущений для S- матрицы в локальной квантовой теории поля оказывается, что выражение

$$S_n(x_1,\dots,x_n)=T\left(\mathcal{L}_I(x_1)\cdot\dots\cdot\mathcal{L}_I(x_n)\right) \tag{5.1}$$

не является самым общим выражением, удовлетворяющим условиям инвариантности, симметрии, унитарности и причинности. Эти условия определяют $S_n(x_1,\dots,x_n)$ с точностью до некоторого квазилокального оператора $\Lambda_n(x_1,\dots,x_n)$, коэффициентные функции которого имеют вид

$$B\left(\dots,\frac{\partial}{\partial x_j},\dots\right)\delta^{(4)}(x_1-x_2)\dots\delta^{(4)}(x_1-x_n), \tag{5.2}$$

причём B не зависит от x_j и содержит производные только конечной степени.

В основу этого вывода[I] положено, во-первых, требование причинности, которое полностью определяет операторную функцию $S_n(x_1,\dots,x_n)$ через предыдущие функции $S_1,\dots,S_{n-1}$ в области определения своих аргументов, в которой $x_1 \gtrsim x_j$ (хотя бы одного из $j=2,3,\dots,n$), и, во-вторых, постулат, что $S_n(x_1,\dots,x_n)$ является операторнозначной обобщённой функцией умеренного роста.

Таким образом, из условия причинности (3.I) в формулировке Боголюбова и Ширкова[I] вытекает требование, чтобы квазилокальный оператор $\Lambda_n(x_1,\dots,x_n)$ был сосредоточен в точке $x_1=x_2=\dots=x_n$. Это требование, конечно, гарантирует выполнение условия причинности, но оно является слишком жёстким и может быть ослаблено. Как это можно сделать?

Обычное понимание действия локальных или квазилокальных обобщённых функций можно сформулировать в виде следующего определения.

<u>Определение I.</u> Релятивистски-инвариантная обобщённая функция $K(x_1-x_2)$ называется локальной и сосредоточенной в точке $x_1=x_2$, если

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2\, f_{G_1}(x_1)K(x_1-x_2)f_{G_2}(x_2)=0$$

для $\quad \forall f_{G_j}(x)\in\mathcal{D}(G_j) \qquad (j=1,2)$

при $\quad G_1\cap G_2=\varnothing .$

Общий вид локальной обобщённой функции, удовлетворяющей сформулированному определению, следующий:

а)
$$K(x_1-x_2)=\sum_{n=0}^{N} c_n \Box^n \delta^{(4)}(x_1-x_2) \tag{5.3}$$

при некотором $N<\infty$ в случае обобщённых функций умеренного роста,

б)
$$K(x_1-x_2)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Box^n \delta^{(4)}(x_1-x_2) \tag{5.4}$$

в случае пространства Джаффе /8,9/, если

$$\int_0^\infty \frac{du\, \log^+|K(u^2)|}{1+u^2}<\infty ,$$

где $$|K(\varkappa^2)| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \varkappa^{2n} .$$

Как говорилось выше, использование таких функций при построении квазилокальных операторов $\Lambda_n(x_1,\dots,x_n)$ заведомо гарантирует выполнение микропричинности в форме (3.I) или (3.2). Однако с точки зрения условия причинности ограничение функциями, сосредоточенными в точке, представляется нам слишком жёстким. Действительно, при проверке условий типа причинности, локальной коммутативности или изучении распространения волновых пакетов необходимо рассматривать не любые области пространства-времени, а области, разделенные пространственно-подобными поверхностями, поскольку нас всегда интересует, как развиваются те или иные события с течением времени.

Можно сказать, что задача о причинном влиянии одной области пространства-времени на другую может быть поставлена корректно в том и только в том случае, если эти две области могут быть отделены друг от друга пространственно-подобной поверхностью. В противном случае в каждой области будут существовать точки, находящиеся в причинных конусах другой области, и между событиями, протекающими в этих областях, может существовать взаимное влияние, так что невозможно проследить, как изменения событий в одной области влияют на изменения событий в другой. Поэтому дадим

<u>Определение 2 (принцип физической локальности).</u> Будем говорить, что релятивистски-инвариантная функция $K(x_1 - x_2)$ удовлетворяет принципу физической локальности, если

$$\iint d^4x_1 d^4x_2 f_{G_1}(x_1) K(x_1-x_2) f_{G_2}(x_2) = 0 ,$$

$$\forall f_{G_j}(x) \in \mathcal{D}(G_j) \qquad (j=1,2)$$

при любых таких областях G_1 и G_2, которые могут быть разделены пространственно-подобной поверхностью.

Легко можно показать, что в случае обобщённых функций как умеренного роста, так и удовлетворяющих условию строгой локальности Джаффе, определение 2 эквивалентно определению I, т.е. общий вид локальных обобщённых функций, удовлетворяющих определению 2 и инвариантных при преобразованиях Лоренца, даётся (5.3) и (5.4). Поэтому для этих пространств определение 2 ничего нового не даёт. Однако в случае обобщённых функций, заданных на пространствах аналитических функций, возникают нетривиальные обобщённые функции, отличные от (5.2)- (5.4), которые удовлетворяют принципу физической локальности.

Рассмотрим пространство основных функций Z. В этом пространстве отсутствуют функции с ограниченным носителем, поскольку оно состоит из целых аналитических функций. Поэтому нам надо определить способ, при помощи которого мы будем изучать пространственно-временные свойства аналитических функционалов в вещественном пространстве R^4.

Наш постулат состоит в том, что пространственно-временные свойства функционалов на Z в вещественном X-пространстве R^4 определяются при помощи проектирующих последовательностей.

Поэтому определение 2 должно быть сформулировано следующим образом.

Определение 2^{I}. Будем говорить, что релятивистски-инвариантная обобщённая функция $K(x_1-x_2)$, заданная на Z, удовлетворяет принципу физической локальности, если

$$\lim_{\lambda_1\to 0}\lim_{\lambda_2\to 0}\int d^4x_1\int d^4x_2\, f_{G_1,\lambda_1}(x_1)K(x_1-x_2)f_{G_2,\lambda_2}(x_2)=0,$$

$$\forall f_{G_j,\lambda_j}(x)\in \Pi(G_j)\qquad (j=1,2) \tag{5.5}$$

при любых таких областях G_1 и G_2, между которыми можно поместить пространственно-подобную поверхность.

Более удобно пользоваться несколько иной формой определения 2^{I}.

Именно:

Определение 2^{II}. Релятивистски-инвариантная обобщённая функция $K(x)$ удовлетворяет принципу физической локальности, если

$$\lim_{\lambda\to 0}\int d^4x\; K(x)\,g_{G,\lambda}(x)=0,$$

$$\forall g_{G,\lambda}(x)\in \Pi(G). \tag{5.6}$$

При этом область G такова, что всегда существует такая пространственно-подобная поверхность, которая содержит точку $x=0$ и не пересекает область G.

Следует заметить, что все локальные обобщённые функции вида (5.3) и (5.4) удовлетворяют принципу физической локальности. Поэтому изучение пространственно-временных свойств локальной квантовой теории поля с помощью проектирующих последовательностей приводит к обычным результатам.

Сейчас мы покажем, что обобщённые функции $K(x_1-x_2)$, удовлетворяющие условиям (E), являются физически локальными.

Рассмотрим функционал

$$(K, g_{\Gamma,\lambda}) = \int d^4x\, K(x) g_{\Gamma,\lambda}(x) =$$

$$= \int\limits_{\rho_0^2+\vec{\rho}^2 \le e^2} d^4\rho\, a(\rho^2)\, g_{\Gamma,\lambda}(i\rho_0, \vec{\rho}), \tag{5.7}$$

где $g_{\Gamma,\lambda}(z) \in \mathcal{J}(G)$.

Пусть Σ - некоторая пространственно-подобная поверхность, проходящая через точку $X = 0$. Без ограничения общности можно считать, что область G лежит в прошлом относительно Σ, как показано на рис. I. Поскольку область G ограниченная, то всегда существует такой пространственно-подобный конус

$$Con_G = \left\{ X: X_0 > 0,\ X_0^2 = A_G^2 \vec{X}^2;\ 0 < A_G < 1-\gamma,\ \gamma > 0 \right\},$$

что область G лежит в прошлом относительно этого конуса. Постоянная A_G строго меньше единицы и зависит от области G.

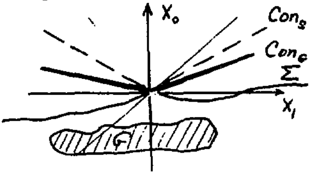

Рис. I

Перепишем интеграл (5.7) в сферических координатах:

$$(K, g_{\Gamma,\lambda}) = \int_0^\ell d\rho\,\rho^3 \int_0^\pi d\alpha \sin^2\alpha \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, a(\rho^2)\,\times$$
$$\times\, g_{\Gamma,\lambda}(i\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha\cos\theta, \rho\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\alpha\sin\theta\sin\varphi). \qquad (5.8)$$

В плоскости комплексного переменного $\alpha + i\beta$ интегрирование по α проводится по отрезку $[0,\pi]$. Поскольку подынтегральная функция целая, контур интегрирования можно сдвинуть, как показано на рис. 2.

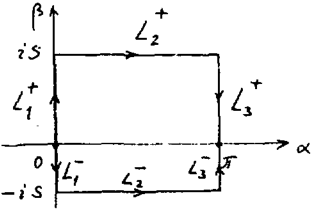

Рис. 2

Здесь S – некоторое произвольное положительное число. Легко проверить, что вещественные части аргументов z_j $(j=0,1,2,3)$ функции $g_{\Gamma,\lambda}(z_0, z_1, z_2, z_3)$ в (5.8) ведут себя следующим образом:

(1) на контурах $L_1^+ = [0, iS]$ и $L_3^+ = [\pi + iS, \pi]$

$$\operatorname{Re} z_j = x_j = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, 3),$$

(2) на контуре $L_2^+ = [iS, iS+\pi]$

$$x_0 = \rho\, \operatorname{sh} s \cdot \sin\alpha\,,$$
$$x_1 = \rho\, \operatorname{ch} s\, \sin\alpha \cos\theta\,,$$
$$x_2 = \rho\, \operatorname{ch} s\, \sin\alpha \sin\theta \cos\varphi\,,$$
$$x_3 = \rho\, \operatorname{ch} s\, \sin\alpha \sin\theta \sin\varphi\,,$$

т.е. эти точки находятся на конусе

$$Con_S = \{ x : x_0 > 0,\ x_0^2 = (\operatorname{th} s)^2 \vec{x}^2 \}.$$

Если S выбрать достаточно большим, так, чтобы

$$A_G < \operatorname{th} s < 1,$$

что всегда можно сделать, поскольку $A_G < 1-\gamma$, то конус будет лежать внутри конуса Con_G.

Таким образом, область интегрирования находится вне области $G + iR^4$ и на ней любая проектирующая последовательность из $\mathcal{J}(G)$ равномерно сходится к нулю. Поэтому условие (5.6) выполнено.

Если область G лежит в будущем относительно Σ, то для доказательства (5.6) следует в (5.8) перейти к интегрированию по контуру $L^- = \{ L_1^- = [0, -is],\ L_2^- = [-is, \pi - is],\ L_3^- = [\pi - is, \pi] \}$.

Окончательно, обобщённые функции, удовлетворяющие условиям (E), являются физически локальными, но не локальными, поскольку они не удовлетворяют определению I.

6. Причинность запаздывающих функций

Для того, чтобы продемонстрировать механизм выполнения условия причинности, рассмотрим нелокальную запаздывающую функцию $D_{ret}(x)$, фурье-образ который имеет вид

$$\tilde{D}_{ret}(p) = \frac{W(p^2)}{m^2 - p^2 - ip_0\varepsilon}, \tag{6.1}$$

где $W(p^2)$ – целая функция порядка роста 1/2 и типа ℓ, убывающая при $p^2 \to -\infty$. Для этой функции справедливо представление

$$W(p^2) = \int\limits_{\rho_0^2+\vec{\rho}^2 \le \ell^2} d^4\rho \; a(\rho^2)\, e^{p_0\rho_0 + i\vec{p}\vec{\rho}} \tag{6.2}$$

Интегрирование проводится по евклидову шару $\rho^2 = \rho_0^2 + \vec{\rho}^{\,2} \le \ell^2$.

Функция $D_{ret}(x)$ является обобщённой функцией, заданной на пространстве Z так, что существует функционал

$$(D_{ret}, f) = \int d^4p \; \tilde{D}_{ret}(p)\tilde{f}(p) < \infty$$

для любой $f \in Z$. Для этого функционала в X – пространстве справедливо представление

$$(D_{ret}, f) = \int\limits_{\rho^2 \le \ell^2} d^4\rho \; a(\rho^2) \int\limits_{V^+} d^4x \; A(m, x^2) f(x_0 + i\rho_0, x_1 + \rho_1), \tag{6.3}$$

где
$$A(m, x^2) = -\frac{m}{4\pi} \frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}}, \quad x^2 = x_0^2 - \vec{x}^{\,2}.$$

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что

$$\lim_{\lambda \to 0} (D_{ret}, g_{r,\lambda}) = 0 \tag{6.4}$$

для любой проектирующей последовательности $g_{\Gamma,\lambda} \in \mathcal{J}(G)$, если

$$G \not\subset V^+ = \{x :\ x_0 \geqslant 0,\ x^2 \geqslant 0\}.$$

Доказательство, как и в предыдущем разделе, состоит в том, что в представлении (6.3) для любой ограниченной G вне конуса будущего V^+ всегда можно выбрать область интегрирования таким образом, чтобы на всей этой области любая проектирующая последовательность функций из $\mathcal{J}(G)$ равномерно сходилась к нулю.

Итак, рассмотрим

$$(D_{ret}, g_{\Gamma,\lambda}) = \int\limits_{p^2 \leq \ell^2} d^4p\, a(p^2) f_{\Gamma,\lambda}^-(ip_0, p_1, p_2, p_3), \quad (6.5)$$

$$f_{\Gamma,\lambda}^-(z) = \int\limits_{V^+} d^4x' A(m, x'^2)\, g_{\Gamma,\lambda}(z + x'). \quad (6.6)$$

Функция $f_{\Gamma,\lambda}^-(z)$ равномерно стремится к нулю вне области

$$G^- = \{z :\ x = \xi + \eta,\ \xi \in G,\ \eta \in V^-;\ y \in R^4\},$$

$$V^- = \{x :\ x_0 < 0,\ x^2 > 0\}$$

для всех $\Gamma \subset G$. Для любой ограниченной $G \not\subset V^+$ существует такой конус

$$Con_G = \{x :\ x_0 > 0,\ x_0^2 = A_G^2 \vec{x}^2,\ 0 < A_G < 1 - \gamma,\ \gamma > 0\},$$

что область G^- и, следовательно, любая $\Gamma^- \subset G^-$ лежат вне этого конуса. Постоянная A_G строго меньше единицы и зависит от области G.

Поскольку конус Con_G является пространственно-подобной поверхностью, относительно которой область G^- лежит в прошлом, то справедливы все утверждения раздела 5 и условие (6.4) выполнено. Это означает, что запаздывающая функция (6.1) удовлетворяет условию микропричинности.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть запаздывающая функция $D_{ret}(x)$ в импульсном пространстве допускает представление Йоста-Лемана-Дайсона /12/

$$\tilde{D}_{ret}(p) = \int d^4u \int\limits_{M^2}^{\infty} \frac{dm^2\, W((u-p)^2)\, \Phi(u,m)}{W(m^2)(m^2-(p-u)^2 - i\varepsilon(p-u)_0)}. \qquad (6.7)$$

Предполагается, что все интегралы в данном представлении хорошо сходятся. Функция $W(z)$ – целая, порядка роста 1/2 и убывает при $Re\, z \to -\infty$, тогда для неё также справедливо представление (6.2). Эта функция также является обобщённой функцией, заданной на пространстве основных функций Z, т.е. существует функционал

$$(D_{ret}, f) = \int d^4p\, \tilde{D}_{ret}(p)\tilde{f}(p).$$

Простыми преобразованиями для этого функционала легко получить представление

$$(D_{ret}, f) = \int d^4u \int_{M^2}^{\infty} \frac{dm^2\, \Phi(u,m)}{W(m^2)} \int_{\rho^2 \le \ell^2} d^4\rho\, a(\rho^2) \times$$

$$\times \int_{V^+} d^4x\, A(m, x^2)\, f(x_0 + i\rho_0, \vec{x} + \vec{\rho})\, e^{-i[u_0(x_0 + i\rho_0) - \vec{u}(\vec{x} + \vec{\rho})]} . \qquad (6.8)$$

Легко видеть, что структура этого выражения точно совпадает с (6.5). Поскольку предполагается, что все интегралы в (6.8) достаточно хорошо сходятся, то все выкладки, проведённые выше, справедливы и в этом случае. Итак, получим

$$\lim_{\lambda \to 0} (D_{ret}, g_{\Gamma,\lambda}) = 0,$$

$$\forall g_{\Gamma,\lambda} \in \mathcal{T}(G), \text{ если } G \not\subset V^+ .$$

Задача теперь состоит в том, чтобы показать, что в нелокальной теории матричные элементы S - матрицы, ответственные за выполнение причинности, допускают представление (6.7).

7. Представление запаздывающего произведения в n-ом порядке теории возмущений

Как легко показать, запаздывающая операторнозначная обобщенная функция $R(x,0)$ может быть представлена в виде

$$R(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \sum_{\mathcal{D}_n} R_{\mathcal{D}_n}(x,0) , \qquad (7.1)$$

где сумма по $\mathcal{D}_n$ означает суммирование по всем связным диаграммам в n -ом порядке теории возмущений.

Покажем, что для любого матричного элемента $\langle\alpha|R_{\mathcal{D}_n}(x,0)|\beta\rangle$ справедливо представление (6.7), т.е.

$$\langle\alpha|R_{\mathcal{D}_n}(x,0)|\beta\rangle=\int d^4p\, e^{-ipx}\,\widetilde{R}_{\mathcal{D}_n}(p)\,, \tag{7.2}$$

$$\widetilde{R}_{\mathcal{D}_n}(p)=\int d^4u\int\limits_{x_0^2}^{\infty}dx^2\,\frac{W((p-u)^2)\;\Phi(u,x)}{W(x^2)\left(x^2-(p-u)^2-i\varepsilon(p-u)_0\right)}\,, \tag{7.3}$$

где функция $W(z)$ - целая и удовлетворяет условиям

$$|W(z)|\leqslant C\exp\{\ell_n\sqrt{|z|}\}\,,\quad n\ell\leqslant\ell_n<\infty\,,$$

$$W(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right),\ \operatorname{Re} z\to-\infty\,. \tag{7.4}$$

Доказательство немедленно следует из следующих утверждений:

I. Функция $\widetilde{R}_{\mathcal{D}_n}(p)$ строится как предел регуляризованного выражения $\widetilde{R}^{\delta}_{\mathcal{D}_n}(p)$, т.е.

$$\lim_{\delta\to0}\widetilde{R}^{\delta}_{\mathcal{D}_n}(p)=\widetilde{R}_{\mathcal{D}_n}(p)\,.$$

Предел при $\delta\to0$ существует, как показано в /7/.

2. Аналитические свойства предельных амплитуд $\widetilde{R}_{\mathcal{D}_n}(p)$ в конечной плоскости импульсных переменных те же самые, что и в локальной теории (см. /5,7/), кроме бесконечно удалённой точки.

3. Все матричные элементы убывают в пространственно-подобных направлениях импульсных переменных, так что при $p^2 \to -\infty$

$$\tilde{R}_{\mathcal{D}_n}(p) \to 0.$$

4. Матричные элементы в каждом порядке теории возмущений растут во времени-подобном направлении, так что при $p^2 \to +\infty$

$$\tilde{R}_{\mathcal{D}_n}(p) = O\left(\exp\left\{(n-1)(\ell+\varepsilon)\sqrt{p^2}\right\}\right),$$

где n – порядок теории возмущений, поскольку функция, соответствующая произвольному связному графу Фейнмана $\mathcal{D}_n$, не может расти быстрее, чем свёртка $(n-1)$ нелокальных пропагаторов (2.4).

5. До снятия регуляризации S^δ-матрица соответствует локальной теории (см./7,8/) так, что

$$R^\delta_{\mathcal{D}_n}(x,0) = \theta(x_0)\theta(x^2)\tau^\delta(x). \quad (\delta>0).$$

Следовательно, представление (7.3) справедливо. Тип функции $W(z)$ должен быть не больше $(n-1)\ell$, где ℓ – тип форм-фактора в пропагаторе частицы (2.7).

Поскольку представление (7.3) справедливо для произвольного связного графа теории возмущений, условие микропричинности (3.2) оказывается выполненным в n – ом порядке теории возмущений.

8. Заключение

Итак, оказалось, что нелокальная S- матрица, построенная с помощью формфакторов, являющихся целыми функциями порядка роста $\rho = \frac{1}{2}$, удовлетворяет условию микропричинности. Сейчас ещё трудно в полной мере оценить этот факт и понять, какие более глубокие причины лежат в основе этого результата.

Возможно, что мы имеем обобщение квантово-полевого уравнения Шредингера следующего типа. В локальном случае имеем

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = g H_I(t)\Psi(t),$$

где

$$g H_I(t) = g\int d\vec{x} : \varphi^N(\vec{x},t) :$$

Такое уравнение ведёт к микропричинной S-матрице, поскольку взаимодействие локально.

Формально наше введение нелокальности можно представить как

$$\varphi(\vec{x},t) \to \int\limits_{\rho^2\leq \ell^2} d^4\rho\, a(\rho^2)\,\varphi(\vec{x}+\vec{\rho},\, t+i\rho_0),$$

т.е.

$$H_I(t) \to \int\limits_{-\ell}^{\ell} d\tau\, H_I(t+i\tau). \qquad (8.1)$$

Следует подчеркнуть, что эти формулы носят чисто формальный характер, поскольку пока никакой операторной реализации нелокальной теории без привлечения регуляризационной процедуры найти не удалось.

По всей видимости, гамильтониан (8.I), хотя и соответствует нелокальной теории, но решения уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = g\int_{-\ell}^{\ell} d\tau\, H_I(t+i\tau)\Psi(t)$$

обладают основными свойствами микропричинной теории.

Эти проблемы требуют дальнейшего изучения.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору Д.И. Блохинцеву, Б.М. Барбашову, Н.А. Черникову и Б.Н. Файнбергу за полезные обсуждения.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957.
2. Р. Стритер, А. Вайтман. РСТ, спин и статистика и все такое. Наука, Москва, 1966.
3. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, Москва, 1958.
4. Д.И. Блохинцев. Пространство и время в микромире. Наука, Москва, 1970;

G.Wanders. Nuovo Cim., 14, 168, 1959;

R.J.Eden, P.V.Landshoff. Ann.Phys., 31, 370, 1965;

H.P.Stapp. Phys.Rev., 139, 257, 1965;

Д.А. Киржниц. Труды I международного совещания по нелокальной теории поля (Дубна, 1967). ОИЯИ, Р2-3590, 1967.

5. Г.В. Ефимов. Препринт ИТФ-68-52, 54,55, Киев, 1968; Проблемы физики ЭЧАЯ, том. I, вып. I, стр. 256, Атомиздат, 1970; Материалы II и III совещаний по нелокальной теории поля. ОИЯИ, 2-5400, Дубна, 1970; ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973.
6. Г.В. Ефимов. Препринт ИТФ-68-52, Киев, 1968; Commun.Math.Phys., 7, 138, 1968.
7. В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов. ОИЯИ, Р2-6586, Дубна, 1972; Commun.Math.Phys., 31, 1, 1973.
8. Г.В. Ефимов. ОИЯИ, Р2-6864, Дубна, 1972.
9. A.M.Jaffe. Phys.Rev.Lett., 17, 661, 1966; Phys.Rev., 158, 1454, 1967.
10. Р. Йост. Общая теория квантованных полей. "Мир", Москва, 1967.
11. Г.В. Ефимов. ОИЯИ, Р2-6756, Дубна, 1972.
12. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, Москва, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 ноября 1973 года.