СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7558

Р.А.Асанов

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ С ИСТОЧНИКАМИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 7558

Р.А.Асанов

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ С ИСТОЧНИКАМИ

S u m m a r y

The behaviour of various fields in the process of collapse is rather much discussed (cf. [1] and cit.lit.) as the problem of gravitational collapse is very intriguing now. Particularly, the scalar field comes into question. From the work by Price [2], for instance, a conclusion is drawn that the scalar field can be present below the horizon and is absent beyond it. This result has been achieved under the very essential assumption of negligible small back effect of the scalar field on the metric. It was often emphasized that this assumption can be nonvalid [1,3].

Nevertheless, we have succeeded here in deriving the exact static solution to the Einstein equations with cosmological term, which is rather consistent with the conclusion about absence of the scalar field. Note, that the horizon is absent in our solution. This is quite reasonable as the solution corresponds to a model of the body of a radius larger than $3\varkappa m/c^2$, which is filled in with a dustlike matter without pressure, with the sources of scalar massless field and with the scalar field itself. Outside the body only the gravitational field (3) is present. We, of course, avoid the interpretation of classical exterior solution of the Schwarzschild problem (3) at long distances. The simplest generalization of equation for the scalar massless field (8) is employed. The solution is obtained by using a small addition to the solution (4) of the corresponding interior Schwarzschild problem which represents the static dustlike body of a radius larger than $3\varkappa m/c^2$ (eq.(4'), $\Lambda_0 < 1/9$). Our solution is given by eqs.(4', 16-19) and schematically by graph. The interior solution has no singularities.

В связи с широко обсуждаемым вопросом о поведении различных полей в процессе коллапса неоднократно рассматривалось поведение скалярного поля (см. обзоры и литературу в /1/). Рассмотрение Прайса /2/ приводит к заключению, что скалярное поле может находиться под поверхностью горизонта, но отсутствует вне её. Вывод был получен при сильном предположении - о незначительности обратного влияния скалярного поля на метрику, хотя это совсем не очевидно /3/. Тем не менее нам удалось в рамках космологических уравнений Эйнштейна получить точное статическое решение, перекликающееся с выводом об отсутствии внешнего скалярного поля. Правда, в этом решении горизонта нет, что естественно, поскольку оно соответствует модели тела с радиусом, большим $3\varkappa m/c^2$, заполненного пылевидным веществом с источниками скалярного безмассового поля и самим скалярным полем. Вне тела имеется только гравитационное поле. Разумеется, мы отвлекаемся от интерпретации классического внешнего решения (3) на больших расстояниях.

Напомним, что для уравнений Эйнштейна

$$G_\mu^\nu + \Lambda \delta_\mu^\nu = -8\pi\varkappa T_\mu^\nu , \qquad (I)$$

здесь Λ - космологическая постоянная, $\varkappa$ -ньютонова гравитационная постоянная, $c=1$, в статической сферически-симметричной метрике

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + e^{\nu}dt^2,$$
$$\lambda = \lambda(r), \quad \nu = \nu(r) \qquad (2)$$

может быть получено решение, соответствующее телу конечных размеров, заполненному пылевидным веществом без давления. Вне тела $(T_\mu^\nu = 0)$ решение будет иметь вид

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\varkappa m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \qquad (3)$$

Выберем для внутреннего решения $(r \leq r_0)$ поведение метрической функции $e^{\nu} = const$. Тогда внутреннее решение имеет вид

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1-\Lambda r^2}; \quad e^{\nu} = e^{\nu(r_0)} = e^{\nu_0} = 1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}; \quad \rho = \frac{\Lambda}{4\pi\varkappa}, \qquad (4)$$

$$r_0 = \left(\frac{3\varkappa m}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{3}}\varkappa m, \qquad (4^{I})$$

здесь ρ -инвариантная плотность массы, $\Lambda_0 = \Lambda\varkappa^2 m^2$ - безразмерная величина. Очевидно, для неособенности внутреннего решения достаточно положить $0 < \Lambda_0 < \frac{1}{9}$, отсюда $r_0 > 3\varkappa m$.

Попытаемся теперь ввести внутри тела некоторое небольшое скалярное безмассовое поле с источниками таким образом, чтобы внешнее решение (3) и "размер" r_0 оставались прежними, а внутреннее решение было близким (4).

Материальный тензор скалярного поля выберем в простейшей форме:

$${}_{ск}T_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi}\nabla_\mu\varphi\,\nabla^\nu\varphi.$$

Уравнения Эйнштейна принимают вид:

$$-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1-e^{\lambda}}{r^2} + \Lambda e^{\lambda} = -\varkappa\varphi'^2 - 8\pi\varkappa\rho e^{\lambda}, \qquad (5)$$

$$\frac{\nu'}{r} + \frac{1-e^{\lambda}}{r^2} + \Lambda e^{\lambda} = \varkappa\varphi'^2, \qquad (6)$$

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{2r} + \frac{1}{4}\nu'(\nu'-\lambda') + \Lambda e^{\lambda} = -\varkappa\varphi'^2, \qquad (7)$$

и простейшее уравнение скалярного поля запишется в виде

$$\varphi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu'-\lambda'}{2}\right)\varphi' = 4\pi j e^{\lambda}, \qquad (8)$$

здесь j -инвариантная плотность источников скалярного поля. Тождество Бьянки $\nabla_\sigma T_1^\sigma = 0$ даёт

$$\frac{\nu'\rho}{2} + j\varphi' = 0. \qquad (9)$$

Сумма уравнений (6) и (7) приводит к уравнению, которое интегрируется и даёт

$$e^{\lambda(r)} = \left(1 + \frac{r\nu'}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{D + 2\Lambda\int_r^{r_0} r^2(r^2e^{\nu})'dr}{r^2e^{\nu}}\right)^{-1},$$
$$D = \left(\frac{1}{4}\frac{(r^2e^{\nu})'^2}{e^{\nu+\lambda}} - r^2e^{\nu}\right)\Bigg|_{r=r_0}. \qquad (10)$$

Входящее сюда произвольное r_0 будем считать в дальнейшем совпадающим с "размером" тела r_0 $(4')$. Тогда постоянная D примет значение

$$D = -3\varkappa^2m^2\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\Lambda_0}} - 3\right) < 0, \quad \text{если } \Lambda_0 < \frac{1}{9}. \qquad (11)$$

Из выражения (10) следует, что для обеспечения условия эвклидовости при $r \to 0$ $(e^{\lambda(0)} = 1)$ нужно положить

$$D + 2\Lambda\int_0^{r_0} r^2(r^2e^{\nu})'dr = 0. \qquad (12)$$

Попытаемся ввести скалярное поле путём следующего изменения решения (4):

$$e^{\nu} = e^{\nu_0} + f(r). \tag{13}$$

Из условия непрерывности e^{ν} и её производной на функцию $f(r)$ следуют требования

$$f(r_0) = 0, \quad f'(r_0) = 0.$$

Из условия (12), которому решение (4), конечно, удовлетворяет, будет очевидно следовать требование

$$2\Lambda \int_0^{r_0} r^{-2}(r^2 f)'\, dr = 0,$$

откуда

$$\int_0^{r_0} r^3 f(r)\, dr = 0.$$

Этим требованиям удовлетряет, например, функция

$$f(r) = A\left(1 - 9x^2 + 14x^3 - 6x^4\right), \tag{14}$$

здесь $x = \frac{r}{r_0}$, A – постоянная, на которую будет получено ограничение сверху. В самом деле, остальные обычные условия "сшивания" будут автоматически выполнены: для e^{λ} в силу соотношения (10) и для $\varkappa\varphi'^2$ – в силу уравнения (6). Однако следует убедиться в естественных требованиях положительности величин $\varkappa\varphi'^2$ и инвариантной плотности массы ρ. Нетрудно убедиться, что для выполнения этих требований достаточно положить

$$0 \leq A \leq \frac{1}{30}\left(1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}\right)\sqrt[3]{9\Lambda_0} = e^{\nu_0} \cdot \frac{\sqrt[3]{9\Lambda_0}}{30}, \tag{15}$$

при этом дополнительных ограничений на Λ_0, кроме $\Lambda_0 < \frac{1}{9}$, не возникает.

Итак, полученное внутреннее решение выглядит следующим образом:

$$e^{\nu} = e^{\nu_0} + A\left(1 - 9x^2 + 14x^3 - 6x^4\right), \quad x = \frac{r}{r_0}. \tag{16}$$

Эта функция мало отличается от e^{ν_0} в силу (15) и того, что полином по модулю не превышает единицы. Функция

$$e^{\lambda} = \frac{\left[1 - 3Ae^{-\nu}x^2(1-x)(3-4x)\right]^2}{1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}\,x^2 + 3Ae^{-\nu}\sqrt[3]{9\Lambda_0}\,x^4(1-x)^2} \tag{17}$$

тоже не сильно отличается от значения

$$e^{\lambda} = \left(1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}\,x^2\right)^{-1} = \left(1 - \Lambda r^2\right)^{-1}.$$

Скалярное поле выражается формулой

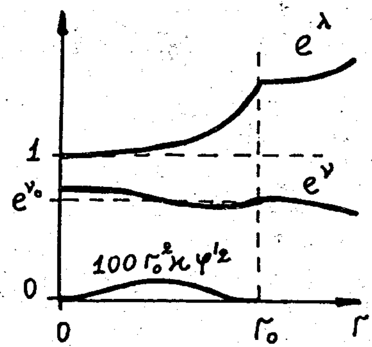
$$\varkappa\varphi'^2 = 3Ax^2(1-x)^2 r_0^{-2} e^{-2\nu}\left\{1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}\,x^2 + 3Ae^{-\nu}\sqrt[3]{9\Lambda_0}\,x^4(1-x)^2\right\}^{-1} \cdot$$
$$\cdot\left\{\left(1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}\right)\sqrt[3]{9\Lambda_0} + A\sqrt[3]{9\Lambda_0}\left(1 - 16x^3 + 18x^4\right) - 3A(3-4x)^2\right\}. \tag{18}$$

Очевидно, это выражение обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, а при других значениях положительно. Выражение для плотности массы ρ выписывать не будем, но заметим, что ρ всюду положительна и нигде не обращается в нуль. Таким образом, внутреннее решение не имеет никаких особенностей и гладко "сшито" с внешним решением без скалярного поля (3). Остаётся заметить, что плотность источников скалярного поля

$$j = -\frac{1}{2}\frac{\nu'\rho}{\varphi'} = \frac{\sqrt{3A\varkappa}\, r_0\, x(3-4x)\,\rho}{\sqrt{\left\{1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}\,x^2 + \ldots\right\}^{-1}\left\{\left(1 - \sqrt[3]{9\Lambda_0}\right)\sqrt[3]{9\Lambda_0} + \ldots\right\}}} \tag{19}$$

обращается в нуль при $X \to 0$, а также при $X = \frac{3}{4}$, где меняет свой знак.

Приношу благодарность профессору М.А. Маркову за предложенную тему и постоянное внимание.



Литература

1. М.А. Марков. УФН, 111, 3 (1973); Preprint JINR, E2-6831, Dubna, 1972.
2. R.H.Price. Phys. Rev., D5, 2419, 2439 (1972).
3. Р.А. Асанов. Препринт ОИЯИ, Р2-7230, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел 16 ноября 1973 года.