ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7555

Л.Г.Заставенко

ТЕОРИЯ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7555

Л.Г.Заставенко

ТЕОРИЯ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в ТМФ

Заставенко Л.Г.

Р2 - 7555

Теория сильной связи в простейшей модели квантовой теории поля

Рассмотрен предел сильной связи для модели $g[\phi^4]_2$.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1973

Zastavenko L.G.

P2 - 7555

Strong Coupling Theory in the Simplest Model of Quantum Field Theory

The strong coupling limit is considered for $g[\phi^4]_2$ model.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

В настоящей работе рассматривается случай сильной связи в модели скалярного нейтрального поля с самодействием $g\phi^4$ в двумерном пространстве-времени. Мы будем рассматривать уравнения основного состояния и одночастичных возбужденных состояний в этой модели в форме, данной в работах /1,2/.

1. Сначала рассмотрим случай невырожденного вакуума / /1/, пункт 2.1 /2/ пункт 4.1/. Произведя в системе уравнений основного состояния //9/, работа /1/ / замену

$$\begin{aligned} p &= q\sqrt{g} \\ k &= s\sqrt{g} \\ a(p) &= A(q)\sqrt{g} \\ C_4(p) &= D_4(q)\sqrt{g}, \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \qquad /1/$$

приведем эту систему к виду

$$A^2(q;\epsilon^{-1}) = q^2 + \frac{1}{\epsilon} + 6\int[D_4(q,-q,s,-s;\epsilon^{-1}) - D_4(0,0,-s,s;\epsilon^{-1})]ds \qquad /2/$$

$$D_4 S_4 = 2 + 15 \int D_6 ds$$

$$D_6 S_6 = -4 [D_4 D_4] + 28 \int D_8 ds ,$$

. . . .

здесь

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A(q_i ; \epsilon^{-1}) \qquad /3/$$

$$\epsilon = g/m^2 . \qquad /4/$$

Уравнение/2/ /как это и отмечалось в /1/ /, зависит не от двух параметров m^2 и g по-отдельности, а лишь от их комбинации ϵ .

1.1. Случай $\epsilon \to 0$ является случаем слабой связи; при этом

$$A(q; \epsilon^{-1}) = \sqrt{q^2 + \frac{1}{\epsilon}} + \ldots$$

$$D_4(q_1, q_2, q_3, q_4; \epsilon^{-1}) = \frac{2}{S_4} + \ldots$$

$$D_6 = -4[D_4 D_4]/S_6 + \ldots$$

. . . .

среди коэффициентных функций наибольшей является A,

$$D_4 < \epsilon A$$

$$D_6 < \epsilon D_4 .$$

. . . .

1.2. Случай сильной связи реализуется, согласно /4/, при $\epsilon \to \infty$.Система уравнений /2/ не содержит в этом пределе малого параметра; таким образом, случай сильной связи с вычислительной точки зрения неизмеримо сложнее, чем случай слабой связи.

1.3. Предположим, что система уравнений /2/ при $\epsilon = \infty$ имеет решение с достаточно быстро убывающими при $n \to \infty$ функциями D_{2n}, и что это решение может быть с заданной точностью получено обрыванием /2/ на функции D_{2n} с достаточно большим номером. Если это предположение справедливо, то задача отыскания основного состояния в рассматриваемой модели сводится, при заданной точности, к решению конечной системы уравнений, полученной обрыванием /2/. Это создает возможность численного определения коэффициентных функций функционала основного состояния в случае сильной связи. Заметим также, что если сформулированное в начале этого пункта предположение верно при $\epsilon = \infty$,то оно тем более верно при всех ϵ , $\epsilon < \infty$.

1.4. Может показаться, что решение системы /2/ при малых значениях параметра $-1/\epsilon$ может быть представлено рядом по степеням этого параметра. Легко убедиться, однако, что это не так: ряд не будет сходиться в окрестности точки $q=0$.Действительно, пусть

$$A(q; \epsilon^{-1}) = A_0(q) + \epsilon^{-1} A_1(q) + \ldots \qquad (a).$$

$$D_4(q; \epsilon^{-1}) = {}_0D_4(q) + \epsilon^{-1} {}_1D_4(q) + \ldots$$

. . . .

Тогда

$$2A_0(q) A_1(q) = 1 + 6\int [{}_1D_4(q-q\,s-s) - {}_1D_4(0\,0\,s-s)] ds .$$

Здесь второй член в правой части исчезает при $q \to 0$,так что при малых q

$$A_1(q) = \frac{1}{2A_0(q)} + \ldots$$

Но $A_0(0) = 0$; поэтому в разложении (α) первая поправка при малых q оказывается больше, чем главный член; отсюда и следует непригодность этого разложения при малых q.

1.5. Необходимым условием справедливости высказанных выше предположений о решении системы /2/ при $\epsilon = \infty$ является обращение в нуль правых частей в /2/ при $q = 0$, $\epsilon = \infty$; иначе функции $D_4(q;0)$, $D_6(q;0)$... будут обращаться в бесконечность при $q=0$ /ввиду того, что $A(0;0) = 0$ /, чего происходить не должно: мы ожидаем, что все функции $D_{2n}(q;0)$ ограничены.

1.6. Уравнения для определения возбужденных состояний //17/, [2]/ не содержат явно g. Так как $\gamma_1^p(k) = 1$, то преобразования вида /1/ для одночастичного возбужденного состояния суть

$$\Lambda(p) = \sqrt{g}\,\omega\,(q,\epsilon^{-1})$$

$$\gamma_n^p(p_1,\dots p_n) = t_n^q(q_1,\dots q_n;\ \frac{1}{\epsilon}) \qquad /1a/$$

$$p = \sqrt{g}\,q.$$

2. Перейдем к случаю вырожденного основного состояния / [1], пункт 2.2, [2], пункт 4.2/. Произведя в системе уравнений основного состояния / [1], /19// замену

$$p = q\sqrt{g}$$

$$a(p) = B(q;\beta)\sqrt{g}$$

$$C_3(p) = \beta\,\epsilon_3(q;\beta)\sqrt{g} \qquad /5/$$

$$C_4(p) = \epsilon_4(q;\beta)\sqrt{g}$$

$$C_5(p) = \beta\,\epsilon_5(q;\beta)\sqrt{g}$$

. . . .

и исключив с помощью первого уравнения [1] /19/, параметр M^2, приведем эту систему к виду

$$B^2(q;\beta) = q^2 + 8\beta^2 + \int ds\,[\,6\epsilon_4(q,-q,s,-s;\beta)$$

$$-\frac{3}{2}\epsilon\ (s,-s,0;\beta)\,] = 0 \qquad /6/$$

$$\epsilon_3 S_3 = 8 + 10\int \epsilon_5\,ds$$

$$\epsilon_4 S_4 + \frac{3\cdot 3}{4}[\,\epsilon_3\epsilon_3]\beta^2 = 2 + 15\int \epsilon_6\,ds$$

$$\epsilon_5 S_5 + 2\cdot 3\ [\,\epsilon_3\epsilon_4] = 21\int \epsilon_7\,ds.$$

. . . .

Здесь S_n - величины, полученные заменой $A \to B$ в /3/.

2.1. Случай слабой связи для системы /6/ реализуется при $\beta \to \infty$, случай сильной связи - при $\beta \to 0$.

2.2. Относительно системы /6/ при $\beta = 0$ сделаем предположение, подобное сформулированному в пункте 1.3. Соответственно будем считать, что каждая из функций $B(q,\beta)$, $\epsilon_n(q,\beta)$ при $\beta \to 0$ стремится к конечному пределу.

2.3. Так как $B(q,0) = 0$, то, подобно пункту 1.4, легко убедиться, что решение системы /6/ не может быть представлено рядом по степеням β^2, сходящимся при всех q.

3. Предельные случаи $\beta \to \infty$ и $\epsilon \to 0$ являются противоположными.

Действительно, рассмотрим массовый параметр M^2 из формулы /1/ работы [1] как функцию параметров β^2 и ϵ при данном g. Согласно формулам /11/ и /19/ работы [1] вместе с /2/, /5/ имеем

$$M^2 = M_1^2(\epsilon^{-1}) = g\left[\frac{1}{\epsilon} - 6\int D_4(0,0,t,-t;\frac{1}{\epsilon})\,dt\right] = \qquad /7/$$

$$= g\left\{\frac{1}{\epsilon} - 6\int\left[D_4(0,0,t,-t;\frac{1}{\epsilon}) - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right]dt - 12\ln(2\ell)\right\}$$

и

$$M^2 = M_2^2(\beta) = g\left[-4\beta^2 - \frac{3}{2}\int(\epsilon_3(0,t,-t,\beta) - \frac{4}{\sqrt{1+t^2}})\,dt\right.$$

$$\left.-12\ln(2\ell)\right]. \qquad /8/$$

Отсюда, с учетом формулы /3/ работы /1/, легко получить формулы /22/ и /23/ той же работы. Таким образом, случаям $\epsilon \to 0$ и $\beta^2 \to \infty$ заведомо соответствуют разные значения параметра M^2. С ростом ϵ величина M^2 убывает /при больших значениях ϵ^{-1}/, с убыванием β^2 величина M^2 растет /при больших значениях β^2/.

3.1. Если бы функция $M_1^2(\epsilon^{-1})$ при росте ϵ сначала убывала, а потом начала расти, это означало бы, что данному значению M^2 отвечает по крайней мере два значения ϵ и, следовательно, два разных функционала основного состояния, что кажется маловероятным. Поэтому мы будем ожидать, что функция $M_1^2(\epsilon^{-1})$ монотонно убывает с ростом ϵ во всей области $0 < \epsilon$. Аналогичным образом мы будем ожидать, что функция $M_2^2(\beta)$ монотонно убывает с ростом β^2 во всей области $\beta^2 > 0$.

По той же причине будем ожидать

$$M_2^2(0) \lessgtr M_1^2(0). \qquad /9/$$

Функционал основного состояния в случае невырожденного и вырожденного вакуума представляется в виде $e^{-\kappa}$ и $e^{-\tilde{\tilde{\kappa}}}$ соответственно, где функционалы κ и $\tilde{\tilde{\kappa}}$ определены формулами /8/ и /18/ работы /1/. Если бы в формуле /9/ стоял знак точного неравенства, это означало бы, что в области

$$M_2^2(0) < M^2 < M_1^2(0)$$

ни одна из формул /8/, /18/ работы /1/ не описывает функционала основного состояния, и для него следует искать какое-то другое представление. Такое положение нам кажется маловероятным, и мы будем ожидать, что

$$M_2^2(0) = M_1^2(0). \qquad /9a/$$

Согласно /7/, /8/, последнее равенство сводится к соотношению

$$\int dt\,[\,4D_4(0,0,t,-t;0) - \epsilon_3(0,t,-t;0)\,] = 0. \qquad /10/$$

3.2. Итак, мы ожидаем, что

$$\lim_{\epsilon\to\infty} \kappa(\epsilon) = \lim_{\beta\to 0} \tilde{\tilde{\kappa}}(\beta). \qquad /11/$$

Ввиду /5/ коэффициентные функции ϵ_{2n+1} не дают при $\beta=0$ вклада в $\tilde{\tilde{\kappa}}$. Для коэффициентных функций $B(q,0)$, $\epsilon_{2n}(q,0)$ получается система уравнений, совпадающая, при выполнении условия /10/, с системой уравнений /2/ при $\epsilon = \infty$.

Таким образом, условия /10/ достаточно для выполнения условия сшивания /11/.

4. Рассмотрим в заключение полное сечение процесса столкновения двух частиц с импульсами p и 0, в котором образуются n частиц, в предельном случае $g\to\infty$. Это сечение может быть вычислено по формуле

$$\sigma_n(p) = \frac{2\pi}{\frac{|p|}{\Lambda(p)}}\int |H|^2\,\delta(\Sigma\Lambda(k_i) - \Lambda(p) - \Lambda(0))\,\delta(\Sigma k_i - p)\,\Pi\, dk_i. \qquad /12/$$

Здесь, согласно /3/,

$$H(p,0;k_1,k_2,\ldots k_n) = (\Sigma\Lambda(k_i) - \Lambda(p) - \Lambda(0))$$

$$\left(\frac{\prod_{i}^{n} N(k_i)}{N(p)\ \ N(0)}\right)^{1/2} X_n^{0\,p}(k_1, k_2, \dots k_n) \qquad /13/$$

величина $N(p)$ определена формулами /39/, /49/ работы /3/, амплитуды X -системой уравнений /2/ работы /4/, $p/\Lambda(p)$- скорость налетающей частицы.

Уравнения, определяющие функции $X_n^{0p}(k_1, k_2, \dots k_n)$, не содержат явно зависимости от g, поэтому преобразование, подобное /1/, /1а/, есть

$$X_n^{0p}(k_1, k_2, \dots k_n) = g^c T_n^{0r}(q_1, q_2, \dots q_n; \frac{1}{\epsilon}), \qquad /1б/$$

где c - некоторое число, не зависящее от n. Так как $X_n^{0p}(k_1, k_2)$ содержит часть $\delta(k_1)$ /исходная плоская волна/, то $c = -1/2$. Далее, из /1/, /1а/ легко показать, что

$$N(k) = L\left(\frac{k}{\sqrt{g}}, \frac{1}{\epsilon}\right) g^{-\frac{1}{2}} \qquad /1в/$$

/напомним, что в левой части формул /1/, /1а/, /1б/, /1в/ мы не выписали зависимости от m и g; таким образом, эти формулы дают переход от функций, зависящих от двух параметров m и g, к функциям, зависящим лишь от комбинации ϵ /4/ этих параметров/. Итак, формула /12/ принимает вид

$$\sigma_n(p) = \frac{2\pi}{v} \int F\left(0, \frac{p}{\sqrt{g}}; q_1, q_2, \dots q_n; \frac{m^2}{g}\right)$$

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} \omega\left(q_i, \frac{m^2}{g}\right) - \omega\left(\frac{p}{\sqrt{g}}, \frac{m^2}{g}\right) - \omega\left(0, \frac{m^2}{g}\right)\right)$$

$$\delta\left(\sum q_i - \frac{p}{\sqrt{g}}\right) \prod d q_i ,$$

где функция F определяется по формулам /13/, /1/-/1в/. Если $\omega(0,0) > 0$ и $m^2/g \ll 1$, то все сечения $\sigma_n(p)$ при $g \to \infty$ ведут себя как

$$\sigma_n(p) = \frac{f_n\left(\frac{p}{\sqrt{g}}\right)}{v}. \qquad /14/$$

5. Простейшим способом проверки сделанных в этой работе предположений является, как нам кажется, численный счет.

Литература

1. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 7, 20, 1971.*
2. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 9, 355, 1971.*
3. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ Р2-7585, Дубна, 1973.*
4. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 10, 58, 1972.*

Рукопись поступила в издательский отдел 16 ноября 1973 года.