СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7554

Н.М.Атакишиев, А.Т.Филиппов

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССИВНЫХ СУПЕРПРОПАГАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7554

Н.М.Атакишиев, А.Т.Филиппов

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССИВНЫХ СУПЕРПРОПАГАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

I. В работе /I/ был предложен весьма общий метод построения определённого класса суперпропагаторов, т.е. четырехмерных преобразований Фурье $F(p^2)$ для выражений

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[-\lambda \Delta_F(x) \right]^n, \qquad (I.I)$$

где $\Delta_F(x)$ – пропагатор скалярной частицы с массой m x). В случае $m = 0$ применение этого метода приводит к достаточно простому дифференциальному уравнению для $F(p^2)$. Несмотря на то, что в общем случае уравнение имеет бесконечный порядок, удаётся построить его решения в виде степенных рядов. Использование в качестве граничного условия при $p^2 \to 0$ поведения, определяемого свободным пропагатором, позволяет найти в случае $m = 0$ решение этого уравнения, зависящее от одной произвольной константы xx).

Хотя нахождение аналитического вида $F(p^2)$ для произвольной массы m является сложной задачей, в ряде случаев это удаётся сделать. В частности, как заметил Окубо /4/, для преобразования Фурье $f(p^2)$ суперпропагатора

$$\tilde{f}(x) = \lambda \Delta_F(x) \left[1 + \lambda \Delta_F(x) \right]^{-1} = \lambda \Delta_F - \lambda \Delta_F \cdot \tilde{f}, \qquad (I.2)$$

---

x) Пусть $R(n-1) = \frac{c_{n+1}}{c_n}$, где $n = 1, 2, \ldots$ Метод работы /I/ применим ко всем $\tilde{F}(x)$, для которых существует аналитическое продолжение $R(z)$ на комплексные значения $n = z$, удовлетворяющее условиям Карлсона (см. /I/, а также следующий раздел этой работы).

xx) Выбор произвольной константы может быть зафиксирован дополнительным требованием "минимальной сингулярности" $F(p^2)$: $\mathrm{Re}\, F, \mathrm{Im}\, F \to 0$ при $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 \to -\infty$ /2/ (более сильное условие предложено в /3/). Более детальное обсуждение и ссылки на другие методы построения суперпропагаторов можно найти в работе /I/. В данном сообщении мы будем рассматривать суперпропагаторы, удовлетворяющие этому условию.

которому соответствуют коэффициенты $c_n \equiv 1$, может быть построена теория возмущений по массе m. В данной работе зависимость $f(p^2)$ от m исследуется без предположения о малости m.

Выбор суперпропагатора $\tilde{f}(x)$ продиктован следующими соображениями. Во-первых, он интересен для приложений (см.[5]). Во-вторых, если ввести обозначение $\delta_\lambda \equiv \lambda \frac{d}{d\lambda}$, то формальное действие оператора $T(\delta_\lambda)$ на $\tilde{F}(x)$ приводит к суперпропагатору

$$\tilde{F}^{(T)}(x) = T(\delta_\lambda) F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(T)} \left[-\lambda \Delta_F(x)\right]^n, \tag{I.3}$$

где $c_n^{(T)} = c_n T(n)$. Поэтому, если известно преобразование Фурье $f(p^2)$ суперпропагатора (I.2), то действием оператора $T(\delta_\lambda)$ на $f(p^2)$ можно определить суперпропагатор $f^{(T)}(p^2)$, соответствующий коэффициентам $c_n^{(T)} = c_n T(n)$. Так, например, по $f(p^2)$ может быть определено преобразование Фурье для важного случая "экспоненциального" суперпропагатора $f^{(e)}(p^2)$, которому соответствуют коэффициенты $c_n^{(e)} = (n!)^{-1}$. Кроме того, выбор суперпропагатора $\tilde{f}(x)$ связан с тем, что в этом частном случае общее интегро-дифференциальное уравнение для $f(p^2)$ (см.[I]) решается простым интегральным преобразованием, что упрощает исследование зависимости от массы.

В этой работе, как и в предыдущей[I], мы проводим все вычисления в евклидовой метрике $x^2 = \vec{x}^2 + x_0^2$, $p^2 = \vec{p}^2 + p_0^2$. Переход к псевдоевклидовой метрике осуществляется с помощью аналитического продолжения по импульсным переменным. Обоснование использования евклидовой метрики см. в [I],[2]. В работе[5] показано, каким образом можно построить суперпропагаторы при

$m = 0$, вообще не используя переход к евклидовой метрике. Дифференциальное уравнение для суперпропагатора получено в работе[5] непосредственно в псевдоевклидовой метрике. Ниже мы будем предполагать, что $c_n > 0$ и $\lambda > 0$. Можно показать (см.[I,2,5]), что при этом мнимая часть суперпропагатора не является положительно определённой и поэтому его нельзя получить из эрмитова неполиномиального лагранжиана. Чтобы получить выражения для физического суперпропагатора, соответствующего другому знаку λ $(-\lambda > 0)$, необходимо выполнить аналитическое продолжение по λ, обойдя особую точку $\lambda = 0$ сверху или снизу и взяв вещественную часть получившегося при этом выражения[x)]. Таким образом, рецепт построения суперпропагатора, используемый в этой работе, сводится к следующему: I) вычисляем суперпропагатор в евклидовой метрике при $\lambda > 0$ как решение соответствующего интегро-дифференциального уравнения (или же как решение дифференциального уравнения с граничными условиями: при $p \to 0$ $f \sim p^{-2}$, при $p \to \infty$, $f \to 0$);
2) выполняем "гармоническое" продолжение по λ к значениям $-\lambda > 0$; 3) аналитически продолжаем суперпропагатор на все комплексные значения p^2, включая разрез $-\infty < p^2 < 0$. Из результатов работ[I,2,5] следует, что полученный этим методом суперпропагатор совпадает с суперпропагатором, найденным ранее без использования гармонического продолжения по λ и евклидовой метрики[5] и, разумеется, имеет на разрезе $p^2 < 0$ положительную мнимую часть. Кроме того, в тех случаях, когда при

---

x) Мы будем называть эту операцию "гармоническим" продолжением.

$m=0$ удаётся найти достаточно простые аналитические выражения для суперпропагатора, можно показать, что условие минимальной сингулярности выполняется автоматически. Поэтому мы воспользуемся описанным методом построения суперпропагатора и в случае $m \neq 0$. Как показано в конце этой работы, от гармонического продолжения по λ можно избавиться, однако переход к евклидовой метрике существен.

Заметим, что в работе /6/ была предпринята попытка найти разложение массивного суперпропагатора по степеням λ и $\ln\lambda$. Фактически в этой работе, по-видимому, найдены первые члены такого разложения лишь для выражений вида $\lambda\Delta_F \tilde{F}(\lambda\mathcal{D}_F)$, где $\mathcal{D}_F \equiv \Delta_F|_{m=0}$, а $\tilde{F}(x)=\sum c_n x^n$ – целая функция порядка $<1/2$, причём коэффициенты c_n допускают аналитическое продолжение в комплексную плоскость n, удовлетворяющее условиям Карлсона. Эту задачу мы легко можем решить при значительно более слабых условиях на c_n (см. первое примечание в этой работе и следующий раздел), используя метод работы /I/. Для этого достаточно в уравнении (3.6) работы /I/ пренебречь m под знаком интеграла и оставить m в неоднородном члене $\sim(m^2+p^2)^{-1}$. Если однородное уравнение при $m=0$ решается в известных специальных функциях (что всегда имеет место, если c_{n+1}/c_n -рациональная функция n, см. /I/), мы можем написать выражение для суперпропагатора, соответствующего $\lambda\Delta_F F(\lambda\mathcal{D}_F)$, в виде однократного интеграла от известных функций.

2. Обсудим теперь операторное преобразование (I.3) более подробно. Пока оператор $T(\delta_\lambda)$ действует лишь на целые степени λ^n, вполне достаточно формального определения $T(\delta_\lambda)\lambda^n = T(n)\lambda^n$. Однако для того, чтобы определить действие $T(\delta_\lambda)$ на функцию $f(p^2)$, в разложении которой по λ содержатся члены $\lambda^n \ln\lambda$ (см. /I/ и следующие разделы этой работы), мы потребуем, чтобы функция $T(z)$ была голоморфной в некоторой области комплексной плоскости z, содержащей точки $z=n$ $(n=1,2,3,\dots)$. Тогда в окрестности каждой такой точки $T(\delta_\lambda)$ можно разложить в сходящийся степенной ряд по δ_λ и тем самым определить действие $T(\delta_\lambda)$ на любую голоморфную в этой области функцию от λ. В частности,

$$T(\delta_\lambda)(\lambda^n \ln^m\lambda) = T(\delta_\lambda)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{d^m}{d\varepsilon^m}\lambda^{n+\varepsilon}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{d^m}{d\varepsilon^m}\lambda^{n+\varepsilon}T(n+\varepsilon)\right] = \lambda^n \sum_{k=0}^{m} C_m^k (\ln\lambda)^{m-k} T^{(k)}(n), \tag{2.I}$$

где $$T^{(k)}(n) \equiv \frac{d^k}{dz^k}T(z)\Big|_{z=k}$$

Наложенное на $T(z)$ условие голоморфности не обеспечивает, однако, однозначности определения $T(\delta_\lambda)f(p^2)$. Действительно, положим $T^{*}(z)=T(z)+a\sin\pi z$, где $a(z)$ – любая голоморфная в указанной выше области функция. Тогда $T^{*}(\delta_\lambda)\lambda^n \equiv T(n)\lambda^n$ и $\tilde{F}^{(T^*)}(x) \equiv \tilde{F}^{(T)}(x)$. В то же время $F^{(T^*)}(p^2) \neq F^{(T)}(p^2)$, так как, например,

$$T^{*}(\delta_\lambda)\lambda^n \ln\lambda = T(\delta_\lambda)[\lambda^n \ln\lambda] + \lambda^n \pi a(n)\cos(n\pi).$$

Чтобы избавиться от этой неоднозначности, мы наложим на $T(z)$ дополнительные условия, которые в случае $m=0$ позволяют получить операторным методом выражение для суперпропагатора $F^{(T)}(p)$, совпадающее с полученным в работе /I/. Чтобы использовать для вычисления F и $F^{(T)}$ метод работы /I/, необходимо предположить, что существуют функции $R(z)$ и $R^{T}(z)$, удовлетворяющие условиям Карлсона ($УК$), и такие, что

$R(n-1)=c_{n+1}/c_n$, $R^{(T)}(n-1)=c^{(T)}_{n+1}/c^{(T)}_n$, $n=1,2,3,\ldots$.
Аналогичным образом мы теперь наложим $УК$ на $T(z)$. Точнее, предположим, что существует функция $T(z)$, удовлетворяющая условиям I) $T(z)$ голоморфна в полуплоскости $Re\, z\geqslant 0$, 2) $|T(z)|<M\exp(A|z|)$ при $Re\, z\geqslant 0, A>0$, 3) $|T(iy)|<M\exp\{(\pi-\varepsilon)|y|\}$ $-\infty<y<+\infty$, $\varepsilon>0$, и такая, что $T(n)=c_n^{(T)}/c_n$ при $n=1,2,\ldots$. Если такая функция существует, то, согласно теореме Карлсона/7/, она единственна. Таким образом, принятые нами условия обеспечивают возможность однозначного построения суперпропагатора $F^{(T)}(p^2)$ по известному суперпропагатору $F(p^2)$ применением к последнему дифференциального оператора $T(\delta_\lambda)$. Эту технику можно использовать при определении обширного класса суперпропагаторов. Для этого достаточно построить "геометрический" суперпропагатор (I.2) и далее последовательно вычислять действие различных операторов $T(\delta_\lambda)$ на полученное выражение. Так, положив $T(z)=\{\Gamma(z+1)\}^{-1}$, получим из "геометрического" суперпропагатора "экспоненциальный" с коэффициентами $c_n^{(T)}=(n!)^{-1}$. Затем, подействовав на экспоненциальный суперпропагатор тем же самым оператором, получим суперпропагатор, соответствующий $c_n^{(T^2)}=(n!)^{-2}$ и т.д. Пользуясь операторами $T(\delta_\lambda)$, удовлетворяющими описанным выше требованиям, можно тем самым построить практически все когда-либо исследовавшиеся безмассовые суперпропагаторы. Остаётся теперь лишь проверить, что операторный метод эквивалентен методу работы/I/. С этой целью рассмотрим основное уравнение этой работы (см. уравнение (3.5)):

$$\tilde{F}(x)=c_1\lambda\Delta_F(x)+\lambda\Delta_F(x)R(\delta_\lambda-1)\tilde{F}(x)\,. \qquad (2.2)$$

Подействовав на него оператором T, после очевидных преобразований получим

$$\tilde{F}^{(T)}(x)=c_1^{(T)}\lambda\Delta_F(x)+\lambda\Delta_F(x)\left[\frac{T(\delta_\lambda+1)}{T(\delta_\lambda)}R(\delta_\lambda-1)\right]\tilde{F}^{(T)}(x). \qquad (2.3)$$

Функция $R^{(T)}(z-1)=\dfrac{R(z-1)\,T(z)}{T(z)}$ при $z=n$ совпадает с $c_{n+1}^{(T)}/c_n^{(T)}$. Если теперь наложить на $R^T(z-1)$ $УК$, то уравнение (2.3) совпадает с уравнением работы/I/ для $\tilde{F}^{(T)}(x)$. Таким образом, мы показали эквивалентность обоих методов при указанном дополнительном предположении о функции $R^{(T)}(z-1)$. Не исключено, что всю совокупность требований, наложенных на $T(z)$, можно заменить более слабыми предположениями, однако для всех встречающихся на практике суперпропагаторов наши требования легко выполняются. Заметим, в частности, что дополнительное условие на $R^{(T)}(z-1)$ является чрезвычайно слабым, что видно из рассмотрения частного случая $T(z)=\Gamma^\alpha(z+1)$, где α – любое число. (Если $R(z-1)$ удовлетворяет $УК$, то и $R^T(z-1)$ удовлетворяет $УК$ при любом α.)

3. В предыдущем разделе мы показали, что задача о построении массивных суперпропагаторов (I.I) сводится к построению геометрического суперпропагатора (I.2). Перейдём теперь к решению этой задачи.

Преобразование Фурье суперпропагатора (2) в евклидовой метрике имеет вид:

$$f(p^2)=\frac{4\pi^2}{p}\int_0^\infty x^2 J_1(px)f(x)\,dx= \qquad (3.I)$$
$$=\frac{4\pi^2}{p}\int_0^\infty x^2 J_1(px)\frac{\lambda\Delta_F(x)}{1+\lambda\Delta_F(x)}\,dx.$$

Итерирование уравнения (I.2) приводит к интегралам x)

$$\int_0^\infty x^2 J_1(px)\{\lambda\Delta_F(x)\}^n dx = \left(\frac{m\lambda}{4\pi^2}\right)^n \int_0^\infty x^2 J_1(px)\frac{K_1^n(mx)}{x^n}dx,$$

т.е. во всех нетривиальных приближениях $(n=2,3,\dots)$ получаем расходящиеся выражения (напомним, что $K_1(t)\sim t^{-1}$ при $t\to 0$). Однако, если знаменатель $1+\lambda\Delta_F$ подынтегрального выражения (3.I) записать в виде $(1+\lambda\mathcal{D}_F)(1-\varphi_0)$, где

$$\varphi_0(x)\equiv\frac{\lambda[\mathcal{D}_F(x)-\Delta_F(x)]}{1+\lambda\mathcal{D}_F(x)}=\frac{\lambda[1-mxK_1(mx)]}{\lambda+4\pi^2x^2}, \qquad (3.2)$$

то легко убедиться, что $\varphi_0(x)<1$ для всех $x\in[0,\infty)$. Поэтому сомножитель $[1-\varphi_0(x)]^{-1}$ может быть представлен в виде бесконечного ряда $\sum_{n=0}^\infty \varphi_0^n(x)$, равномерная сходимость которого на всём промежутке $[0,\infty)$ позволяет выполнить сначала интегрирование по x , а затем суммирование по n , т.е.

$$f(p^2)=\frac{4\pi^2}{p}\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty x^2J_1(px)\frac{\lambda\Delta_F(x)\varphi_0^n(x)}{1+\lambda\mathcal{D}_F(x)}\equiv\sum_{n=0}^\infty f_n(p^2). \qquad (3.3)$$

Первое приближение для $f(p^2)$,очевидно,есть преобразование Фурье функции

$$f_0(x)=\frac{\lambda\Delta_F(x)}{1+\lambda\mathcal{D}_F(x)}=\lambda\Delta_F(x)-\lambda\Delta_F(x)f^{(0)}(x),$$

где $f^{(0)}(x)=f(x)|_{m=0}$.

x) В евклидовой метрике $\Delta_F(x)=\dfrac{m}{4\pi^2x}K_1(mx)$,

$$\mathcal{D}_F(x)=\Delta_F(x)|_{m=0}=\frac{1}{4\pi^2x^2}.$$

Все $f_n(p^2)$ $(n=0,1,2,\dots)$ определяются сходящимися интегралами:

$$f_n(p^2)=4\pi^2\lambda^{n+1}\frac{m}{p}\int_0^\infty x^3J_1(px)\frac{[1-mxK_1(mx)]^n}{(\lambda+4\pi^2x^2)^{n+1}}K_1(mx)dx, \qquad (3.4)$$

т.е. на каждом шаге итерации для $f(p^2)$ получается конечное выражение. Этим задача в принципе решена. Исследуем теперь структуру выражений (3.4) более подробно.

Переходя к безразмерным переменным $\xi=\frac{\lambda p^2}{4\pi^2}$, $y=\frac{2\pi x}{\sqrt{\lambda}}$ и $\mu=\frac{m}{p}$, представим $f_n(p^2)$ в виде

$$f_n(p^2)=\frac{\lambda}{p^2}I_n(\xi,\mu),$$

где

$$I_n(\xi,\mu)=\xi^n\int_0^\infty y^2J_1(y)\frac{[1-\mathcal{K}_1(\mu y)]^n}{(y^2+\xi)^{n+1}}\mathcal{K}_1(\mu y)dy, \qquad (3.5)$$

$$\mathcal{K}_1(z)\equiv zK_1(z). \qquad (3.6)$$

Поведение интегралов $I_n(\xi,\mu)$ при малых ξ рассмотрено в приложении, в котором показано, что при $\xi\to 0$

$$I_n(\xi,\mu)\cong\xi^n\{\varphi_1(\xi,\mu)+\xi\varphi_2(\xi,\mu)\ln^{n+1}\xi+ +\xi^2\varphi_3(\xi,\mu)\ln^{n+2}\xi+\xi^2\varphi_4(\xi,\mu)\ln^n\xi+\dots\}, \qquad (3.7)$$

где опущены слагаемые,пропорциональные $\ln^{n-1}\xi$, $\ln^{n-2}\xi$, ..., $\ln\xi$, и все $\varphi_i\sim const$ при $\xi\to 0$. Помимо неаналитической зависимости $f(p^2)$ от константы λ , столь характерной для неперенормируемых теорий, это означает, что наибольшая степень $\ln\lambda$, дающая вклад в $f(p^2)$ на "n" - ом шаге итерации, равна $n+2$.

Из формул (3.3), (3.5) и (3.7) следует, что сумма $\sum\limits_{c}^{\kappa-1} I_n$ первых "κ" приближений позволяет учесть все особенности $f(p^2)$ по λ, вплоть до членов вида $\lambda^{\kappa+1}\ln\lambda$ включительно. Рассмотрим сначала

$$I_0(\xi,\mu)=\int_0^\infty \frac{J_1(y)\,\mathcal{K}_1(\mu y)}{\xi+y^2}\,y^2dy.$$

Для определения $\varphi_1(\xi,\mu)$ при малых ξ воспользуемся разложением Ломмеля /8/ для функции $\mathcal{K}_1(\mu y)$:

$$\mathcal{K}_1(\mu y)=\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu\xi)^n}{2^n n!}\cdot\frac{K_{n-1}(\mu\sqrt{\xi+y^2})}{(\xi+y^2)^{\frac{n-1}{2}}}. \qquad (3.8)$$

Первый член разложения (3.8) приводит к интегралу типа Сонина-Гегенбауэра для $I_0(\xi,\mu)$, который вычисляется по формуле

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\,K_\nu(b\sqrt{t^2+z^2})\,(z^2+t^2)^{-\frac{\nu}{2}}\,t^{\mu+1}dt=$$

$$=a^\mu b^{-\nu} z^{\mu-\nu+1}(a^2+b^2)^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}K_{\nu-\mu-1}(z\sqrt{a^2+b^2}), \qquad (3.9)$$

справедливой при $Re\,\mu>-1$ и $Re\,z>0$ /8/. Полученное таким образом выражение

$$I_0^{(1)}(\xi,\mu)=\frac{\sqrt{\xi}\,K_1(\sqrt{\xi(1+\mu^2)})}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (3.10)$$

при $\mu\to 0$ совпадает с соответствующим выражением для суперпропагатора с нулевой массой $f^{(0)}(p^2)=\frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2\pi p}K_1\left(\frac{p\sqrt{\lambda}}{2\pi}\right)=\frac{\lambda}{p^2}\xi K_1(\xi)$ и позволяет найти $\varphi_1(0,\mu)=(1+\mu^2)^{-1}$ (см. формулу (3.7)), если учесть, что $K_1(z)\simeq z^{-1}+\frac{z}{2}\ln z+$.. при $z\to 0$.

Подстановка следующего члена разложения (3.8) в подынтегральное выражение для $I_0(\xi,\mu)$ приводит к вкладу в $f(p^2)$ членов такого же порядка, какие имеются и в

$$I_1(\xi,\mu)=\xi\int_0^\infty y^2 J_1(y)\frac{[1-\mathcal{K}_1(\mu y)]}{(\xi+y^2)^2}\,\mathcal{K}_1(\mu y)\,dy.$$

Для того, чтобы учесть члены одного и того же порядка в I_0 и $I_1(\xi,\mu)$, нужно воспользоваться первым членом разложения (3.8) для функции $\mathcal{K}_1(\mu y)$, входящей в $I_1(\xi,\mu)$, и вторым членом этого же разложения – в интегральном представлении для $I_0(\xi,\mu)$, т.е.:

$$I_0^{(2)}(\xi,\mu)+I_1^{(1)}(\xi,\mu)=\frac{\xi\mu^2}{2}\int_0^\infty y^2 J_1(y)\frac{K_0(\mu\sqrt{\xi+y^2})}{\xi+y^2}dy+$$

$$+\xi\int_0^\infty y^2 J_1(y)\,\mathcal{K}_1(\mu\sqrt{\xi+y^2})(\xi+y^2)^{-2}\left[1-\mathcal{K}_1(\mu\sqrt{\xi+y^2})\right]dy.$$

Используя соотношение $zK_0(z)=zK_2(z)-2K_1(z)$, это выражение можно представить в виде

$$I_0^{(2)}(\xi,\mu)+I_1^{(1)}(\xi,\mu)=\frac{\xi\mu^2}{2}\int_0^\infty y^2 J_1(y)\frac{K_2(\mu\sqrt{\xi+y^2})}{\xi+y^2}-$$

$$-\xi\mu^2\int_0^\infty y^2 J_1(y)\,K_1^2(\mu\sqrt{\xi+y^2})\,(\xi+y^2)^{-1}dy.$$

Первое слагаемое также является интегралом типа Сонина-Гегенбауэра и вычисляется по формуле (3.9). Второе слагаемое можно несколько упростить, воспользовавшись интегральным представлением Никольсона (см. /8/):

$$K_1^2(z)=2\int_0^\infty K_2(2z\,ch\,t)\,dt, \quad Re\,z>0.$$

Тогда интеграл по переменной y также берётся по формуле (3.9), и мы получаем следующий результат:

$$I_0^{(2)}(\xi,\mu)+I_1^{(1)}(\xi,\mu)= \qquad (3.11)$$

$$=\frac{\xi}{2}K_0(\sqrt{\xi(1+\mu^2)})-\frac{\xi}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{ch^2t}K_0(\sqrt{\xi(1+4\mu^2ch^2t)}).$$

Объединение формул (3.I0) и (3.II) приводит к выражению

$$I^{(2)}(\xi,\mu) = \frac{\sqrt{\xi}\; K_1\left(\sqrt{\xi(1+\mu^2)}\right)}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\xi}{2} K_0\left(\sqrt{\xi(1+\mu^2)}\right) - $$
$$- \frac{\xi}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{ch^2 t}\; K_0\left(\sqrt{\xi(1+4\mu^2 ch^2 t)}\right), \qquad (3.I2)$$

правильно описывающему в поведении $I(\xi,\mu)$ при малых ξ члены вида $\sim const$, $\sim \xi \ln \xi$ и $\sim \xi$. Так как $K_0(z) \simeq -\ln z$ при $z \to 0$, то третье слагаемое в (3.I2) при малых ξ сводится к легко берущемуся интегралу

$$\frac{\xi}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{ch^2 t} \ln\sqrt{\xi(1+4\mu^2 ch^2 t)} = \frac{\xi}{4}\left\{\ln(\xi\mu^2) + \sqrt{1+4\mu^2}\,\ln\frac{\sqrt{1+4\mu^2}+1}{\sqrt{1+4\mu^2}-1}\right\}.$$

Следовательно, при малых λ зависимость фурье-образа суперпропагатора $f(x) = \lambda\Delta_F[1+\lambda\Delta_F]^{-1}$ от массы описывается формулой

$$f(p^2) = \frac{\lambda}{m^2+p^2} + \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\left\{\ln\frac{\lambda m^2}{16\pi^2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{1+4\mu^2}\;\ln\frac{\sqrt{1+4\mu^2}+1}{\sqrt{1+4\mu^2}-1} + 2\gamma - 1\right\} + \ldots, \qquad (3.I3)$$

где $\mu = \frac{m}{p}$ и γ -постоянная Эйлера. Как уже было отмечено выше, в случае $m=0$ фурье-образ суперпропагатора $f^{(0)}(x)$ определяется точно /I/ и при $\lambda \to 0$

$$f^{(0)}(p^2) \simeq \frac{\lambda}{p^2} + \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\left[\ln\frac{\lambda p^2}{16\pi^2} + 2\gamma - 1\right] + \ldots \qquad (3.I4)$$

Полученное для $f(p^2)$ выражение (3.I3) при $m \to 0$ совпадает с (3.I4).

Действие оператора $\Gamma^{-1}(\delta_\lambda+1)$ на $f(p^2)$, описываемую формулой (3.I3), приводит к определению зависимости от массы при малых λ преобразования Фурье "экспоненциального" суперпропагатора

$$\tilde{f}^{(e)}(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left[-\lambda\Delta_F(x)\right]^n,$$

которая имеет следующий вид:

$$f^{(e)}(p^2) \simeq \frac{\lambda}{m^2+p^2} + \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left\{\ln\frac{\lambda m^2}{16\pi^2} + \sqrt{1+4\mu^2}\;\ln\frac{\sqrt{1+4\mu^2}+1}{\sqrt{1+4\mu^2}-1} + 3\gamma - \frac{5}{2}\right\} + \ldots \qquad (3.I5)$$

Аналогично можно найти первые члены разложения по степеням λ и $\ln\lambda$ для других суперпропагаторов.

4. Если в формуле (I.2) считать $(-\lambda)$ положительным, то суперпропагатор $\tilde{f}(x)$ не является физическим. Хотя соответствующий физический суперпропагатор

$$\tilde{\chi}(x) = \frac{\lambda\Delta_F(x)}{1-\lambda\Delta_F(x)} \qquad (4.I)$$

формально может быть получен из $\tilde{f}(x)$ изменением знака λ, однако из-за наличия логарифмической точки ветвления функции $f(p^2)$ по λ при $\lambda = 0$ нельзя однозначно определить преобразование Фурье $\chi(p^2)$ по $f(p^2)$. Эта неоднозначность определения преобразования Фурье $\chi(p^2)$ суперпропагатора (4.I) проявилась бы и в том случае, если бы с самого начала рассматривалось интегральное представление именно для $\chi(p^2)$. Действительно, в этом случае, аналогично представлению (3.I), для $\chi(p^2)$ получается следующее выражение:

$$\chi(p^2) = \frac{\lambda}{p^2}\int_0^\infty \mathcal{J}_1(t)\,\frac{t^2\mathcal{K}_1(\mu t)}{t^2-\xi\,\mathcal{K}_1(\mu t)}\,dt. \tag{4.2}$$

В отличие от представления (3.I) знаменатель подынтегрального выражения в (4.2) обращается в нуль в точке t_c, являющейся решением трансцендентного уравнения $t_c^2=\xi\,\mathcal{K}_1(\mu t_c)$. Поэтому представление (4.2) имеет смысл лишь при задании правила интегрирования в особой точке t_c, что приводит к неоднозначности в определении $\chi(p^2)$.

Как уже было отмечено в начале работы, неоднозначность определения $\chi(p^2)$ может быть устранена дополнительным требованием выполнения условия минимальной сингулярности $\mathrm{Re}\,\chi/\mathrm{Im}\,\chi\to 0$ при $p^2\to-\infty$. В случае представления (4.2) наложение этого условия на $\chi(p^2)$ приводит к вполне определенному выбору правила интегрирования в особой точке. Наиболее просто это выглядит при $m=0$, когда

$$\chi=\chi^{(c)}(p^2)=\frac{\lambda}{p^2}\int_0^\infty\frac{t^2\mathcal{J}_1(t)\,dt}{t^2-\xi}. \tag{4.3}$$

Легко убедиться, что условие минимальной сингулярности при $p^2\to-\infty$ выполняется лишь тогда, когда интеграл (4.3) берётся в смысле главного значения, т.е.

$$\chi^{(c)}(p^2)=-\frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{4p}\,Y_1\!\left(\frac{p\sqrt{\lambda}}{2\pi}\right).$$

Что же касается определения $\chi(p^2)$ по $f(p^2)$, то при $m=0$ легко показать, что условие минимальной сингулярности, устраняющее неоднозначность определения $\chi(p^2)$, эквивалентно следующему выбору $\chi(p^2)$:

$$\chi(p^2,\lambda)=-\frac{1}{2}\left[f(p^2,\lambda e^{i\pi})+f(p^2,\lambda e^{-i\pi})\right]. \tag{4.4}$$

Мы полагаем, что такая же связь между суперпропагаторами $\chi(p^2)$ и $f(p^2)$ имеет место и при $m\neq 0$, т.е. при $\lambda\to 0$:

$$\chi(p^2)\simeq\frac{\lambda}{m^2+p^2}-\frac{\lambda^2}{16\pi^2}\left\{\ln\frac{\lambda m^2}{16\pi^2}+\sqrt{1+4\mu^2}\,\ln\frac{\sqrt{1+4\mu^2}+1}{\sqrt{1+4\mu^2}-1}+2\gamma-1\right\}+\ldots \tag{4.5}$$

Заметим, что указанное выше правило обхода особой точки подынтегрального выражения позволяет получить все результаты без использования гармонического продолжения по λ, которое, таким образом, является просто удобным приёмом для вычисления интегралов. При этом следовало бы доказать, что после применения оператора $\mathcal{T}$ мы получаем суперпропагаторы, удовлетворяющие условию минимальной сингулярности (хотя бы при $m=0$). Для всех простых суперпропагаторов это проверяется непосредственно, однако доказать это утверждение в общем случае мы пока не смогли. Если пока принять его без доказательства, то результаты этой работы позволяют получать разложение по степеням λ и $\ln\lambda$ для весьма общего класса массивных суперпропагаторов.

В заключение авторам приятно выразить благодарность за полезные обсуждения Б.А. Арбузову, М.К. Волкову и С.М. Курашову.

Приложение

Для исследования поведения интегралов

$$I_n(\xi,\mu) = \xi^n \int_0^\infty J_1(y)\, K_1(\mu y)\, \frac{[1-\mathcal{K}_1(\mu y)]^n}{(\xi+y^2)^{n+1}}\, y^2 dy \qquad (\text{П.I})$$

при малых ξ и фиксированном μ выберем некоторое число δ, такое, что $0<\xi^{1/2}<\delta<\infty$. Разбив промежуток интегрирования по y на две части – от нуля до δ и от δ до бесконечности – и воспользовавшись формулой *)

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \left(\gamma + \ln\frac{z}{2}\right) I_1(z) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}\frac{h_k + h_{k+1}}{k!\,(k+1)!},$$

первую часть $I_n(\xi,\mu)$ можно представить в виде

$$I_n^{(1)}(\xi,\mu) = \sum_{m=0}^{n}\int_0^{\delta^2}\frac{t^n a_m(t,\mu)\ln^m t\, dt}{(\xi+t)^{n+1}} + \sum_{m=0}^{n+1}\int_0^{\delta^2}\frac{t^{n+1} b_m(t,\mu)\ln^m t\, dt}{(\xi+t)^{n+1}}. \qquad (\text{П.2})$$

Здесь $a_m(t,\mu)$ и $b_m(t,\mu)$ – целые функции переменной t, стремящиеся при $t\to 0$ к некоторым константам. Так как от сомножителей t^n и t^{n+1} в (П.2) можно избавиться с помощью формулы

$$t^n = (t+\xi-\xi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\xi)^k (t+\xi)^{n-k},$$

а степени знаменателя подынтегральных выражений легко получить дифференцированием по ξ, то определение $I_n^{(1)}(\xi,\mu)$ сводится к вычислению интегралов

---

x) $h_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$

$h_0 = 0.$

$$\mathcal{J}_m(\xi,\mu) = \int_0^{\delta^2}\frac{a_m(t,\mu)\ln^m t\, dt}{t+\xi}.$$

Теперь особенности по ξ легко выделяются, если $\mathcal{J}_m(\xi,\mu)$ представить в виде

$$\mathcal{J}_m(\xi,\mu) = a_m(0,\mu)\int_0^{\delta^2}\frac{\ln^m t\, dt}{t+\xi} + \int_0^{\delta^2}\frac{[a_m(t,\mu)-a_m(0,\mu)]}{t+\xi}\ln^m t\, dt.$$

Все особенности $\mathcal{J}_m(\xi,\mu)$ по ξ заключены лишь в первом интеграле, и при малых ξ имеем:

$$\mathcal{J}_m(\xi,\mu) \simeq \ln^{m+1}\xi\,\varphi_1 + \ln^{m-1}\xi\,\varphi_2 + \xi\varphi_3\ln^m\xi + \ldots, \qquad (\text{П.3})$$

где все $\varphi_i(\xi,\mu)\sim const$ при $\xi\to 0$.

При интегрировании по y от δ до бесконечности можно воспользоваться строгим неравенством $\xi<y^2$ и представить знаменатель подынтегрального выражения (П.I) в виде равномерно сходящегося ряда по степеням ξ/y^2, т.е.

$$I_n^{(2)}(\xi,\mu) = \xi^n\int_\delta^\infty J_1(y)\,\mathcal{K}_1(\mu y)\,[1-\mathcal{K}_1(\mu y)]^n\left(1+\frac{\xi}{y^2}\right)^{-n-1} y^{-2n} dy = \xi^n\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k\mathcal{N}_k(\mu). \qquad (\text{П.4})$$

Объединяя оба интеграла, получаем окончательно, что при малых ξ

$$I_n(\xi,\mu) \simeq \xi^n\left\{\varphi_1(\xi,\mu) + \xi\varphi_2\ln^{n+1}\xi + \xi^2\varphi_3\ln^{n+2}\xi + \xi^2\varphi_4\ln^n\xi + \ldots\right\}, \qquad (\text{П.5})$$

где опущены слагаемые, пропорциональные $\ln^{n-1}\xi$, $\ln^{n-2}\xi$, ..., $\ln\xi$, и все $\varphi_i(\xi,\mu)\sim const$ при $\xi\to 0$.

Литература

I. N.M.Atakishiev, A.T.Filippov. Comm.Math.Phys.,24,74(1971).

2. A.T.Filippov. Proc.Topical Conf.on Weak Int., preprint CERN 69-7, Geneva (1969).

3. H.Lehmann, K.Pohlmeyer. Comm.Math.Phys.,20, 101 (1971).

4. S.Okubo. Prog.Theor.Phys.,11, 80 (1954).

5. A.T.Filippov. Preprint JINR,E2-6936, Dubna (1973).

6. М.К. Волков. ТМФ, 2, I97 (I970).

7. R.Boas. Entire Functions. Acad.Press.,N.Y., 1954.

8. M.Bateman, A.Erdelyi. Higher Transcendental Functions. Mc. Graw-Hill, N.Y.,1953.

Рукопись поступила в издательский отдел
I6 ноября I973 года.

Атакишиев Н.М., Филиппов А.Т.

P2 - 7554

Вычисление массивных суперпропагаторов в некоторых неполиномиальных теориях поля

Предложен новый метод построения "массивных суперпропагаторов" весьма общего вида. Метод сводится к применению определенных дифференциальных операторов к простейшему суперпропагатору, для которого найдено разложение по степеням g и $\ln g$.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Atakishev N.M., Filippov A.T.

P2 - 7554

Calculation of Massive Superpropagators in Some Nonpolynomial Field Theories

A new method for constructing "massive superpropagators", i.e., the Fourier transform of $\sum_{n=1}^{\infty} C_n [\lambda \Delta_F(x)]^n$, with coefficients C_n of rather general form is proposed. The method is based on constructing the superpropagator corresponding to $C_n \equiv 1$ and applying to it some differential (in λ) operator. The expansion of the superpropagator with $C_n \equiv 1$ in the series of powers of λ and of $\ln\lambda$ is obtained. Expansions for superpropagators with arbitrary C_n are obtained by applying the corresponding differential operators.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973