ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7551

Ф.Х.Абдуллаев, А.Ю.Юматов

N θ - СЕКТОР МОДЕЛИ ЛИ С ФОРМФАКТОРОМ ИЗ КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 7551

Ф.Х.Абдуллаев,* А.Ю.Юматов

$N\theta$ - СЕКТОР МОДЕЛИ ЛИ С ФОРМФАКТОРОМ ИЗ КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в ТМФ

* Институт ядерной физики АН Узб. ССР

ВВЕДЕНИЕ

Модель Ли [1] является одной из немногих нетривиальных квантовополевых моделей, допускающих точное решение. В связи с этим она интенсивно изучалась многими авторами. В частности, рассматривались вопросы, связанные с появлением "духовых" состояний, введением и интерпретацией нестабильных состояний в квантовой теории поля, определением их масс и времени жизни. Последний круг вопросов часто решался с использованием конкретного вида формфактора модели, который выбирался из класса мероморфных функций (например, вида $\Lambda^2/(\Lambda^2+\vec{k}^2)$ [2,3]). Однако введение таких формфакторов приводит к бессмысленности исследования аналитических свойств амплитуды вследствие появления дополнительных особенностей и поэтому сделанные выводы о наличии ряда стабильных и нестабильных состояний и их классификация представляются недостаточно обоснованными. В настоящей работе будет изучаться функция Грина V-частицы, причем в качестве формфактора выбрана целая функция, которая не нарушает аналитических свойств амплитуд по энергетической переменной.

В § I описывается модель и приводится ограничение на "элементарную" длину (импульс обрезания), которое позволяет избежать появления "духового" состояния в $N\theta$ секторе модели. Соответствующие оценки легко проводятся с использованием представления Меллина-Бернса для формфактора. В § 2 изучаются аналитические свойства функции Грина V-частицы в комплексной плоскости энергии. В § 3 эти свойства иллюстрируются на примере частного выбора формфактора $\frac{\sin\sqrt{\vec{k}^2\ell/2\mu}}{\sqrt{\vec{k}^2\ell/2\mu}}$ в модели с нерелятивистской θ-частицей. Аналитические свойства оказываются аналогичными свойствам амплитуды нерелятивистского рассеяния на потенциальной яме.

I. Описание модели

Гамильтониан модели выберем в виде

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = m_{V_0}\int dp\, V^+(\vec p)V(\vec p) + \int dp\, N^+(\vec p)N(\vec p) +$$

$$+ \int dp\, \omega(\vec p)\,\theta^+(\vec p)\,\theta(\vec p)\,; \quad \omega(\vec q) = \sqrt{\vec q^{\,2}+\mu^2}$$

$$H_I = -\frac{g_0}{(2\pi)^{3/2}}\int dp\, dp'\, dq\, \frac{F(\omega(q)\ell)}{\sqrt{2\omega(\vec q)}}\,\delta(\vec p-\vec p\,'-\vec q)\times$$

$$\times\left\{V^+(\vec p)N(\vec p\,')\theta(\vec q) + \text{э.с.}\right\}, \qquad (I)$$

где $V^+, V, N^+, N, \theta^+, \theta$ – операторы рождения и уничтожения V, N и θ – частиц соответственно.

$$\left[V(\vec p), V^+(\vec p\,')\right]_+ = \left[N(\vec p), N^+(\vec p\,')\right]_+ = \delta(\vec p-\vec p\,')$$

$$\left[\theta(\vec p), \theta^+(\vec p\,')\right] = \delta(\vec p-\vec p\,'),$$

все остальные коммутаторы равны нулю.

Формфактор $F(z)$ является целой аналитической функцией и удовлетворяет следующим условиям:

I) порядок роста $1/2 \le \rho < 1$

2) $F(z^*) = F^*(z)$

3) $|F(z)| = O(|z|^{-1/2-\alpha})$; $z \to \infty, \arg z = 0, \alpha > 0$

4) $F(\mu\ell) = 1$.

Далее для простоты будем рассматривать функции порядка роста $\rho = 1/2$ и конечного типа σ. Как известно, функция Грина V – частицы равна

$$G(E) = \left[E - m_{V_0} - \frac{g_0^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{d|\vec{K}|\,\vec{K}^2 F^2(\omega\ell)}{\omega(\vec{K})(E - m_N - \omega(\vec{K}) + i\varepsilon)}\right]^{-1} =$$

$$= \left[E - m_{V_0} - g_0^2 \sum(E)\right]^{-1}, \qquad (2)$$

где $\sum(E)$ – оператор собственной энергии.

Для того чтобы не появилось "духовое" состояние в секторе при заданном значении перенормированной константы связи g_r, необходимо и достаточно /I/

$$g_r^2 \left.\frac{d\sum(E)}{dE}\right|_{E=m_V} < 1.$$

Рассмотрим для простоты случай стабильной V – частицы и примем $m_V \approx m_N$. Тогда

$$\left.\frac{d\sum}{dE}\right|_{E=m_N} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{d|\vec{K}|\,F^2(\omega\ell)\vec{K}^2}{[\omega(\vec{K})]^3}. \qquad (3)$$

Используя представление Меллина-Бернса для $F^2(z)$ /4/

$$F^2(z) = \frac{1}{2i}\int\limits_{\beta+i\infty}^{\beta-i\infty} d\zeta \frac{v(\zeta) z^\zeta}{\sin\pi\zeta\, \Gamma(1+\zeta)} \qquad \beta < 0$$
,

можно записать

$$\left.\frac{d\Sigma}{dE}\right|_{E=m_N} = \frac{1}{(4\pi)^2 i}\int\limits_{\alpha+i\infty}^{\alpha-i\infty} d\zeta \frac{v(\zeta)(\mu\ell)^\zeta}{\sin\pi\zeta\,\Gamma(1+\zeta)} B\left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{\zeta}{2}\right). \qquad (4)$$

Чтобы получить асимптотический ряд по параметру $(\mu\ell)$ (который предполагается малым), нужно сдвигать контур интегрирования по ζ вправо и вычислять вычеты в полуцелых точках действительной оси. Если учесть лишь первый член этого ряда, то

$$\left.\frac{d\Sigma}{dE}\right|_{E=m_N} \approx -\frac{1}{(2\pi)^2}\Big\{2v'(0) + v(0)\Big[2\log(\mu\ell)$$
$$- 3\psi(1) + \frac{\pi}{2}\psi\left(\tfrac{3}{2}\right)\Big]\Big\} \qquad \psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x)$$

или, оставляя лишь член с $\log(\mu\ell)$

$$\ell \gtrsim \frac{1}{\mu}\exp\left[-\frac{\pi^2}{v(0)g_r^2}\right],$$

что с точностью до несущественных множителей совпадает с обычной оценкой /5/

$$\ell \gtrsim |E_0|^{-1} \approx \frac{1}{\mu}\exp\left[-g_r^{-2}\right],$$

где E_0 – энергия "духового" состояния.

§ 2. Аналитические свойства функции Грина V -частицы

Как видно из выражения (2), оператор собственной энергии $\Sigma(z)$ имеет единственную особую точку - точку ветвления при $z = m_N + \mu$, и на первом листе римановой поверхности переменного z допускает следующую оценку:

$$|\Sigma(z)| = \frac{1}{(2\pi)^2}\left|\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega\sqrt{\omega^2-\mu^2}\,F^2(\omega\ell)}{\omega+m_N-z}\right| \leq \frac{const}{|z|^{2a}}$$

при достаточно больших $|z|$

Такими свойствами обладает оператор собственной энергии в модели Ли с любым формфактором, убывающим как $\omega^{-1/2-a}$ (например $\Lambda^2/(\Lambda^2+\vec{k}^2)$ см. [2]).

Определим теперь $\Sigma(z)$ на втором римановом листе как результат аналитического продолжения с верхней полуплоскости переменного z. Полюс подынтегрального выражения $\omega_0 = z - m_N$ движется из верхней полуплоскости в нижнюю, захватывая контур. Тогда можно написать

$$\Sigma_{II}(z) = \Sigma_{I}(z) + 2\pi i \text{ (Вычет подынтегрального выражения в } \omega=\omega_0) = \Sigma_I(z) + \frac{i\sqrt{(z-m_N)^2-\mu^2}\,F^2((z-m_N)\ell)}{2\pi} \quad (5)$$

$\Sigma_K(z) = \Sigma(z)$ на K - том листе

$|\Sigma(z)| < exp[(\sigma+\delta)\sqrt{|z|}]$ для всякого $\delta > 0$ и достаточно больших $|z|$, причем очевидно, что $\Sigma_{II}(z)$ экспоненциально растет во всех направлениях на втором листе, кроме луча

$\arg z = 0$, по которому он убывает как $const/z/^{-2a}$. Таким образом, поведение $\sum(z)$ на II листе римановой поверхности энергии резко отличается от поведения на первом (и отличается от поведения $\sum(z)$ в модели с мероморфным формфактором, где есть убывание на всех листах во всех направлениях). Стабильному состоянию и резонансам отвечают полюса функции Грина

$$G(z) = \left[z - m_{v_0} - g_0^2 \sum(z)\right]^{-1},$$

т.е. решения уравнения

$$z - m_{v_0} - g_0^2 \sum(z) = 0. \qquad (6)$$

Напомним, что мы рассматриваем случай стабильной V -частицы. Функция $G(E)$ имеет на I листе правильные аналитические свойства: полюс, лежащий ниже порога, и точку ветвления. На II листе решения уравнения (6) могут лежать только на кривой

$$|z - m_{v_0}| = g_0^2 |\sum_{II}(z)|.$$

В силу оценки (5) эта кривая расположена в правой полуплоскости симметрично относительно действительной оси. Нам не удалось в общем случае доказать, что на этой кривой лежит бесконечное число решений уравнения (6), но, по-видимому, это так. Подобное доказательство, однако, легко может быть проведено в случае модели Ли с нерелятивистской θ -частицей /1/. Гамильтониан модели

$$H = m_{v_0} \int d^3p\, V^+(\vec{p}) V(\vec{p}) + m_N \int d^3p\, N^+(\vec{p}) N(\vec{p}) +$$

$$+ \int d^3p \left(\mu + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu}\right) \theta^+(\vec{p})\,\theta(\vec{p}) - \frac{g_0}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\mu}} \int d^3p\, d^3p'\, d^3q\, \cdot$$

$$\times F\left(\frac{\vec{k}^2 \ell}{2\mu}\right) \delta(\vec{p}-\vec{p}\,'-\vec{q}) \left\{ V^+(\vec{p})\, N(\vec{p}\,')\, \theta(\vec{q}) + \text{э. с.} \right\}.$$

Функция Грина V -частицы

$$G_N(E) = \left[E - m_{V_0} - g_0^2 \sum\nolimits_N (E) \right]^{-1}$$

$$\sum\nolimits_N (E) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{\vec{k}^2 F^2\left(\frac{\vec{k}^2 \ell}{2\mu}\right) d|\vec{k}|}{2\mu(E - m_N - \mu) - \vec{k}^2 + i\varepsilon}. \tag{7}$$

Рассмотрим оператор собственной энергии V -частицы как функцию безразмерного комплексного переменного $\zeta = \sqrt{\ell(E - m_N - \mu)}$

$$\sum\nolimits_N = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{2\mu}{\ell}} \int_0^{\infty} \frac{t^2 F^2(t^2)\, dt}{\zeta^2 - t^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{2\mu}{\ell}}\, \Phi(\zeta). \tag{8}$$

У функции $\Phi(\zeta)$ возможна лишь одна особая точка $\zeta = 0$, причем эта особая точка не может быть точкой ветвления, поскольку, как легко проверить, $\Phi(\zeta e^{2\pi i}) = \Phi(\zeta)$. Тогда $\zeta = 0$ является устранимой особой точкой и (8) задает целую аналитическую функцию переменной ζ, если доопределить $\Phi(0) = \lim_{\zeta \to 0} \Phi(\zeta)$. Уравнение (6) может быть переписано так:

$$\zeta^2 + \alpha = g_0^2 \beta\, \Phi(\zeta), \tag{6'}$$

где $\alpha = \ell(m_N + \mu - m_{V_0})$; $\beta = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{2\mu\ell}$.

Из теории целых функций известно (см., например[6]), что уравнения, подобные (6'), всегда имеют бесконечное число корней, и, следовательно, уравнение (6) в случае нерелятивистской θ-частицы всегда имеет оесконечное число корней.

§ 3. Частный случай формфактора

Более детальное исследование аналитических свойств функции Грина удобно провести с формфактором $F(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ порядка роста $1/2$. Тогда

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t\,dt}{\zeta^2 - t^2} = \frac{\pi i}{4\zeta}\left(e^{2i\zeta} - 1\right).$$

Уравнение (6') можно переписать так:

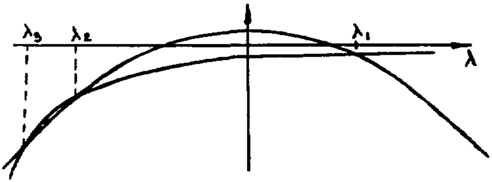
$$\zeta^2 + \alpha = \frac{i\gamma}{\zeta}\left(e^{2i\zeta} - 1\right), \tag{6''}$$

где $\gamma = \frac{\pi}{4} g_0^2/\beta$.

На мнимой оси $\zeta = i\lambda$ имеем

$$\alpha - \lambda^2 = \frac{\gamma}{\lambda}\left(e^{-2\lambda} - 1\right).$$

Переменная ζ линейно связана с волновым числом, поэтому корень λ_1 (см. рисунок) соответствует стабильной V-частице; λ_2, λ_3 - антисвязанному состоянию.



Корень λ_1 появляется всегда при $\alpha > -2\gamma$, корни λ_2, λ_3 существуют лишь при достаточно малых γ. При больших $|\zeta|$ легко выписать асимптотическую формулу для решений уравнения (6'') в комплексной плоскости

$$\zeta_n = -\frac{3i}{2}\log(3\pi n\gamma^{-1/3}) + \frac{3i}{8n} \pm \left[\frac{3\pi(n+1)}{4} - \frac{3\log(3\pi n\gamma^{-1/3})}{4\pi n}\right],$$

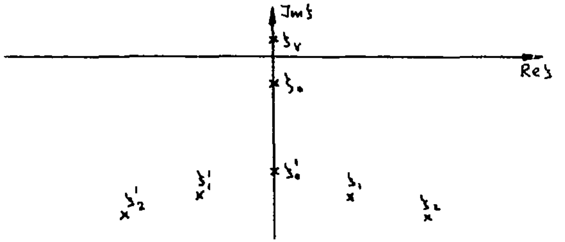
при этом (6) удовлетворяется с точностью до $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$.

Окончательно получаем следующее распределение корней в комплексной плоскости ζ (см. рисунок):

I). Корень ζ_V, лежащий на полуоси $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, соответствует стабильной V – частице.

2). Корни $\zeta_0\ \zeta_0'$, лежащие на полуоси $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$, появляются при малых γ и соответствуют антисвязанным состояниям.

3). Бесконечный набор пар корней $\zeta_n\ \zeta_n'$ таких, что $\zeta_n' = -\zeta_n^*$.



Корни ζ_0, ζ_0' и конечное число ζ_n, ζ_n' могут находиться в области отрицательной реальной части энергии на втором римановом листе. Это, очевидно, не противоречит положительной определенности гамильтониана модели. С другой стороны, эти корни лежат в комплексной области вдали от разреза и практически не оказывают влияния на сечение $N\theta$-рассеяния, поэтому оснований для их запрещения по-видимому, нет.

Таким образом, амплитуда в первом нетривиальном секторе нерелятивистской модели Ли имеет аналитические свойства, вполне аналогичные свойствам амплитуд S- рассеяния на потенциале конечного радиуса действия/7/ (рассеяния в состояния с высшими моментами в $N\theta$-секторе нет), например на прямоугольной потенциальной яме/8/.

В связи с этим можно надеяться, что полная двухчастичная амплитуда в нелокальной квантовой теории поля/9/ имеет подобные аналитические свойства на первом и втором листах римановской поверхности энергетического переменного.

Авторы выражают глубокую благодарность В.А.Мещерякову и Д.В.Ширкову за полезные обсуждения, а также Г.В.Ефимову за многочисленные критические замечания и постоянный интерес к работе.

Литература

1. T.D.Lee. Phys. Rev., 95, 1329, 1964.
   А.Базь, Я.Б.Зельдович, В.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике "Наука", 1972.
2. L.Fonda, G.C.Ghirardi, A.Rimini. Phys. Rev., 133, B196, 1964.
3. В.С.Минеев. ЖЭТФ, 55, 506, 1968.
4. G.V.Efimov. Ann.Phys., 71, 466, 1972.
5. G.Källen, W.Pauli, Dan. Mat. Fys. Medd. 30, N 4, 1955.
6. А.И.Маркушевич. Теория аналитических функций, М. 1970.
7. а) T.Regge. Nuovo Cimento, 9, 491, 1958.
   в) Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц, М. 1969.
8. H.M.Nussenzveig. Nucl. Phys., 11, 499, 1958.
9. G.V.Efimov. Commun. Math. Phys., 5, 42, 1967, 7, 138, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 ноября 1973 года.