

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



7532

Собр. № 7532

P2 - 7532

И. В. Полубаринов

О ТРАНСФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ
4-ИМПУЛЬСА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ранг публикаций Объединенного института ядерных исследований

Препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований /ОИЯИ/ являются самостоятельными публикациями. Они издаются в соответствии со ст. 4 Устава ОИЯИ. Отличие препринтов от сообщений заключается в том, что текст препринта будет впоследствии воспроизведен в каком-либо научном журнале или авернодическом сборнике.

Индексация

Препринты, сообщения и депонированные публикации ОИЯИ имеют единую нарастающую порядковую нумерацию, составляющую последние 4 цифры индекса.

Первый знак индекса - буквенный - может быть представлен в 3 вариантах:

"Р" - издание на русском языке;

"Е" - издание на английском языке;

"Д" - работа публикуется на русском и английском языках.

Препринты и сообщения, которые рассылаются только в страны-участницы ОИЯИ, буквенных индексов не имеют.

Цифра, следующая за буквенным обозначением, определяет тематическую категорию данной публикации. Перечень тематических категорий изданий ОИЯИ периодически рассылается их получателям.

Индексы, описанные выше, проставляются в правом верхнем углу на обложке и титульном листе каждого издания.

Ссылки

В библиографических ссылках на препринты и сообщения ОИЯИ мы рекомендуем указывать: инициалы и фамилию автора, далее - сокращенное наименование института-издателя, индекс, место и год издания.

Пример библиографической ссылки:

И.И. Иванов. ОИЯИ, Р2-4985, Дубна, 1971.

P2 - 7532

И.В.Полубаринов

О ТРАНСФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ
4-ИМПУЛЬСА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

I. Введение

4-импульс электромагнитного поля определяется как интеграл по той или иной пространственно-подобной поверхности σ :

$$P_\nu(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu T_{\mu\nu}(x), \quad (1)$$

где $d\sigma_\mu = (dx_2 dx_3 dt, dx_1 dx_3 dt, dx_1 dx_2 dt, -i dx_1 dx_2 dx_3)$,

$T_{\mu\nu}(x)$ - тензор 4-импульса электромагнитного поля, т.е.

$$T_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \quad (2)$$

а $F_{\mu\nu}$ - тензор напряженностей электромагнитного поля. 4-импульс P_ν озадачивает уже в простейшем случае, когда поле $F_{\mu\nu}$ принадлежит заряду, движущемуся с постоянной скоростью (см., например, /1-3/). Ниже, говоря о 4-импульсе (I), мы будем иметь в виду только этот случай.

Сразу же после появления специальной теории относительности для 4-импульса (I) были в связи с гипотезой Абрагама об электромагнитном происхождении массы электрона получены формулы /14/ (см. также /1/)

$$\vec{P} = \frac{4}{3} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = P_0 = \frac{mc^2(1 + \frac{\beta^2}{5})}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3)$$

(где $m = \frac{U}{c^2}$, а U - электростатическая энергия в системе покоя электрона), которые существенно отличались от формул Эйнштейна

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4)$$

для движущейся механической частицы.

Необычность формул (3) связана с тем, что тензор (2) не

сохраняется ($\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$) и поэтому зависит от выбора поверхности σ x_1 .

Один выход предложил Пуанкаре^{/5/} (см. также /1/): необходимо дополнить $T_{\mu\nu}(x)$ неким тензором механических напряжений $T_{\mu\nu}^{мех}$. до сохраняющегося, $\partial_\mu (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{мех}) = 0$, а это ведёт к формулам вида (4).

С другой стороны, Э. Ферми в 1922 г. сумел получить формулы вида (4) при помощи одного только тензора (2)^{xx}. Различие между случаями Абрагама и Ферми фактически состояло только в выборе поверхности интегрирования σ .

Поскольку динамические величины типа (1) с несохраняющимися плотностями сами по себе играют важную роль в теории поля^{xxx}, то, несомненно, важно понимать свойство их зависимости от поверхности σ .

x) В отличие от случая $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$, когда, как хорошо известно, вектор P_ν не зависит от поверхности.

xx) Мы отвлекаемся от того обстоятельства, что Ферми рассматривал ускоренное движение и что для неточечного заряда это может иметь решающее значение.

Отметим, что четыре статьи Ферми на эту тему^{/6/} долгое время оставались незамеченными, а результат не упоминался ни в одной из монографий до появления книг Джексона и Рорлиха^{/7/} (Рорлих был одним из тех, кто независимо пришёл к тому же результату^{/8/}).

xxx) Примеры подобных величин и уравнения движения для них см., например, в^{/9/}.

В настоящей работе для 4-импульса P_ν (и массы M) электромагнитного поля получена общая формула, из которой результаты Абрагама и Ферми следуют как частные случаи, и продемонстрировано, что зависимость P_ν и M от поверхности σ свидетельствует об их относительности, аналогичной относительности длины.

2. Длина как пример величины, зависящей от пространственно-подобной поверхности

Длина ℓ в теории относительности относительна и для данного стержня в зависимости от системы отсчёта принимает непрерывный спектр значений:

$$0 < \ell \leq \ell_{\max} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{c^2}(u_1 x_2 - x_1)^2} \quad (5)$$

(здесь (\vec{x}_1, ict_1) и (\vec{x}_2, ict_2) — события регистрации концов стержня, u_1 — его 4-скорость).

Вместо того, чтобы обращаться к разным системам отсчёта, будем работать в одной системе, но введём^{x)} наиболее общий тип измерения: измерение на произвольной пространственно-подобной поверхности σ . Это означает, что, помимо обычных одновременных измерений (т.е. измерений на поверхностях $t = \text{const}$), вводятся всевозможные допустимые по теории относительности неодновременные измерения.

Плоская поверхность $t = \text{const}$ ничем не выделена из числа прочих плоских пространственно-подобных поверхностей

x) Вместе с Блохом^{/10/} и Томонагой^{/11/}, которым это потребовалось для обоснования лоренц-инвариантности квантовой электродинамики.

$$(\vec{L}, \vec{x} - \vec{x}_0) = c(t - t_0), \text{ или } \omega_{\mu} (x - x_0)_{\mu} = 0, \quad (6)$$

где \vec{L} - параметр, определяющий положение поверхности, а "4-скорость" $\omega_{\mu} = (\frac{c\vec{L}}{\sqrt{1-L^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-L^2}})$ есть нормаль к \mathcal{B} . Мы всегда будем ограничиваться только плоскими поверхностями \mathcal{B} .

Определим длину стержня $l(\mathcal{B})$ как интервал на поверхности \mathcal{B} , т.е. интервал между событиями (\vec{x}_1, ict_1) и (\vec{x}_2, ict_2) пересечения поверхности \mathcal{B} мировыми линиями концов стержня (например, как на рис. 1):

$$l(\mathcal{B}) = \sqrt{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} = \sqrt{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - (L, \vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2}. \quad (7)$$

Когда параметр \vec{L} пробегает все пространственно-подобные плоскости \mathcal{B} , интервал l пробегает весь спектр значений (5). Таким образом, относительность длины проявляется уже в одной системе отсчёта. (См. также Приложение).

То, что интервал от поверхности к поверхности меняется, означает, что переход с поверхности на поверхность не есть просто преобразование Лоренца. С другой стороны, если, оставаясь на той же поверхности, мы перейдем в новую систему отсчёта, длина не изменится (в соответствии с её определением как интервала).

Нельзя выделить какую-либо поверхность \mathcal{B} и признать длину на ней за "истинную", например, объявить "истинной" длину l_{max} , которая получается при измерении на поверхностях, ортогональных мировой полосе стержня. Во-первых, потому, что сокращенные длины имеют реальные проявления ¹²/см., а также мыслен-

¹² Это напоминание было бы излишним, если бы не дезориентирующее название интересной и правильной работы ¹³/ и не ряд спорных утверждений в работе ¹⁴/.



Рис. 1

Рис. 2. По всем мишеням (видимым и невидимым) одновременно делается выстрел. Движущийся экран закрывает меньше мишеней (экраны отличаются только скоростью).

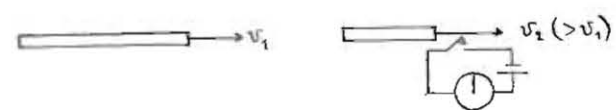


Рис. 3. Измерение длины стержней по времени пролета

$$l = v(t_2 - t_1) = (\sqrt{1-\beta^2} l_{max})$$

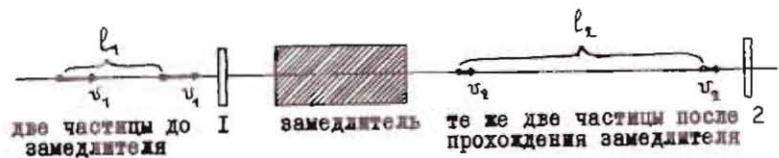


Рис. 4. Измерение расстояния между частицами до и после замедлителя

$$l_1 = v_1(t_2 - t_1) = (\sqrt{1-\beta_1^2} l_{max}) < l_2 = v_2(t'_2 - t'_1) = (\sqrt{1-\beta_2^2} l_{max})$$

Моменты прохождения регистрируются счетчиками I и 2.

ные опыты на рис. 2-3 и почти реалистический на рис. 4). А, во-вторых, если мы имеем несколько одинаковых стержней, движущихся с различными скоростями, то имеет смысл операция сложения их различных относительно данной системы отсчёта длин (как на рис. 2 и 3), или, точнее, проекций на пространственные оси.

3. Относительность 4-импульса и массы электромагнитного поля

Вернёмся к 4-импульсу электромагнитного поля (I). С математической точки зрения этот объект при любой фиксированной поверхности σ преобразуется из одной системы отсчёта в другую как 4-вектор.

Поэтому вся специфика проистекает только от перехода с поверхности на поверхность (как и у длины), а это снова можно сперва рассмотреть в одной системе отсчёта. Пусть система отсчёта выбрана так, что относительно неё заряд покоится, т.е. мировые линии его точек параллельны оси времени (как на рис. I). В этой системе

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -iE_x \\ 0 & 0 & 0 & -iE_y \\ 0 & 0 & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}, T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -E_x^2 + \frac{1}{2}E^2 & -E_x E_y & -E_x E_z & 0 \\ -E_x E_y & -E_y^2 + \frac{1}{2}E^2 & -E_y E_z & 0 \\ -E_x E_z & -E_y E_z & -E_z^2 + \frac{1}{2}E^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для простоты проинтегрируем (I) на произвольной поверхности

σ , ортогональной плоскости xt ,

$$d(x-x_0) = c(t-t_0). \quad (9)$$

Принимая, как обычно, что

$$\int d^3x E_i E_j = \frac{1}{3} mc^2 \delta_{ij}, \quad (10)$$

легко выполняем интегрирование

$$P_1(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_1 T_{11} + \int_{\sigma} d\sigma_4 T_{41} = \int_{\sigma} d\sigma_1 T_{11} = \frac{d}{c} \int d^3x T_{11} = \frac{1}{3} m dc,$$

$$P_2(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_1 T_{12} + \int_{\sigma} d\sigma_4 T_{42} = \int_{\sigma} d\sigma_1 T_{12} = \frac{d}{c} \int d^3x T_{12} = 0,$$

$$P_3(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_1 T_{13} + \int_{\sigma} d\sigma_4 T_{43} = \int_{\sigma} d\sigma_1 T_{13} = \frac{d}{c} \int d^3x T_{13} = 0,$$

$$P_4(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_1 T_{14} + \int_{\sigma} d\sigma_4 T_{44} = \int_{\sigma} d\sigma_4 T_{44} = -i \int d^3x T_{44} = -mc^2.$$

Полученный вектор

$$P_i = \frac{1}{3} m dc, \quad P_2 = P_3 = 0, \quad P_4 = mc^2 \quad (11)$$

обладает массой

$$M^2 = c^{-4} (P_0^2 - \vec{P}^2 c^2) = m^2 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] \quad (12)$$

и, таким образом, при всех d времени-подобен. Если угодно, его с помощью преобразования Лоренца можно преобразовать в любую другую систему отсчёта. Выполнив преобразование Лоренца в плоскости xt с произвольным параметром β , получим:

$$P_1' = \frac{mc(\beta + \frac{1}{3})}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad P_2' = P_3' = 0, \quad P_4' = \frac{mc^2(1 + \frac{d\beta}{3})}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (13)$$

В зависимости от выбора α и β имеем частные случаи:

- 1) $\alpha = 0$ - случай Ферми, интегрирование по поверхностям, ортогональным мировым линиям;
 - 2) $\alpha = \beta$ - случай Абрагама, интегрирование по поверхностям $t' = \text{const}$ в штрихованной системе;
 - 3) $\beta = -\frac{\alpha}{3}$ - переход в систему, где $\vec{P}' = 0$; любопытно, что эта система не совпадает с системой покоя заряда ($\beta = 0$), кроме случая $\alpha = 0$, и для каждого α своя.
- Формулы (13) можно переписать в виде

$$P'_1 = \frac{Mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad P'_2 = P'_3 = 0, \quad P'_0 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (14)$$

где скорость β есть результат сложения скоростей β и $\frac{\alpha}{3}$ ($\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-(\frac{\alpha}{3})^2} \sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\alpha\beta}{3}}$). Такую же конструкцию имеют формулы для общего случая произвольных $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$.

Из полученных формул видно, что 4-импульс электромагнитного поля и электромагнитная масса M оказываются зависящими от поверхности интегрирования \mathcal{S} (через параметр $\vec{\alpha}$). Как и в случае длины, в этом проявляется относительность величин P_ν и M . Естественно, что электромагнитная масса, будучи инвариантом, не зависит от системы отсчёта (от $\vec{\beta}$).

Наиболее простым является результат Ферми. Однако его нельзя предпочесть точно так же, как и длину l_{max} (в обоих случаях интегрирование проводится ортогонально мировым линиям). Так, трудно говорить о какой-либо предпочтительной поверхности, если мы имеем несколько зарядов и единое их поле $F_{\mu\nu}$. То, по какой поверхности нужно интегрировать, зависит от постановки задачи, от того, какие в данной системе отсчёта подразумеваются из-

мерения, одновременные или те или иные неодновременные.

В заключение автор искренне благодарит М.А.Маркова и В.И.Огиевского за обсуждения.

Приложение

Если стержень движется в данной системе отсчёта со скоростью \vec{v} (мировая полоса его в отличие от полосы на рис. I наклонена) и известны два события, x_1 и x_2 , регистрации концов стержня (моменты t_1 и t_2 - любые), то его длина на произвольной плоскости (6) равна

$$l(6) = \sqrt{l_{\text{max}}^2 - \frac{1}{c^2} \left(u + \frac{c^2}{(\omega, u)} \omega, x_2 - x_1 \right)^2}.$$

Можно убедиться, что конструкция этого выражения, как и выражения (7), отражает тот факт, что сокращение на множитель $\sqrt{1-\beta^2}$ претерпевает только одна из трех пространственных компонент, а именно, направленная по \vec{B} , где \vec{B} получена сложением скоростей.

Отметим также, что время между двумя произвольными событиями x_1 и x_2 , измеренное вдоль произвольной времени-подобной прямой $\vec{x} = \vec{\alpha} c t$, равно

$$s = \sqrt{(t'' - t')^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{x}'' - \vec{x}')^2} = -\frac{1}{c^2} \omega_\mu (x_2 - x_1)_\mu,$$

а расстояние между теми же событиями, измеренное на произвольной пространственно-подобной плоскости (6), есть

$$\gamma(6) = \sqrt{(\vec{x}'' - \vec{x}')^2 - c^2 (t'' - t')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{c^2} (\omega, x_2 - x_1)^2}.$$

В этих выражениях точки x' и x'' суть пересечения двух пространственно-подобных плоскостей (6), проведенных через точки

x_1 и x_2 , с указанной прямой, а точки x'' и x''' суть проекции x_1 и x_2 на плоскость (6). Если x_1 и x_2 положения одной точки, движущейся со скоростью \vec{v} , то s изменяется в области $s_{\min} < s < \infty$, $s_{\min} = -u_p(x_2 - x_1)/v$.

Литература

1. Р.Беккер. Теория электричества, том II, ГИТТЛ, Ленинград-Москва, 1941.
2. В.Паули. Теория относительности, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1947.
3. Э.Ферми. Научные труды, том I, "Наука", Москва, 1971, стр. 73.
4. М.Abraham. Phys. Zeits., 5, 576 (1904).
5. H.Poincaré. Comptes Rend., 140, 1504 (1905); Rend. Circ. Mat. Palermo, 24, 129 (1906).
6. E.Fermi. Physik. Zeitschrift, 23, 340 (1922); Atti Accad. Natl. Lincei, 21, 184, 306 (1922); Nuovo Cim., 22, 159 (1923)(переведена в ^{1/3}, стр. 73).
7. J.D.Jackson. Classical Electrodynamics, New York - London, Wiley, 1962 (имеется перевод: Дж.Джексона, Классическая электродинамика, "Мир", Москва, 1965); F.Röhrlich. Classical Charged Particles, Reading Massachusetts, Addison-Wesley, 1965.

8. W.Wilson. Proc. Phys. Soc. (London), 48, 736 (1936); B.Kwal. J.Phys. Radium, 10, 103 (1949); F.Röhrlich. Amer. Journ. of Phys., 28, 639 (1960).
9. И.В.Полубаринов. ТМФ, 1, 34 (1969).
10. P.Bloch. Phys. Zs. d. Sowjetunion, 2, 301 (1934) (см. также: Г.Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1947, стр. 175-176).
11. S.Томонага. Progr. Theor. Phys., 1, п.2, 27 (1946) (см. перевод в сборнике "Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, Москва, 1954).
12. V.P.Weisskopf. Phys. Today, 13, No. 9, 24 (1960); Э.Тейлор, Дж.Уилер. Физика пространства-времени, Мир, Москва, 1971.
13. J.Terrel. Invisibility of the Lorentz Contraction, Phys. Rev., 116, 1041 (1959).
14. A.Gamba. Amer. Journ. of Phys., 35, 83 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1973 года.