СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7531

Х.Д.Попов

ОПЕРАТОРЫ ЗЕРКАЛЬНОГО ОТРАЖЕНИЯ И ПЕРЕКРУЧИВАНИЯ В МОДЕЛИ С КОНЕЧНЫМ НАБОРОМ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 7531

Х.Д.Попов

ОПЕРАТОРЫ ЗЕРКАЛЬНОГО ОТРАЖЕНИЯ И ПЕРЕКРУЧИВАНИЯ В МОДЕЛИ С КОНЕЧНЫМ НАБОРОМ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В работах [1-3] был предложен метод факторизации дуальной N - точечной амплитуды B_N с помощью конечного набора пятимерных осцилляторов. В работе [4] найдено представление группы $SL(2,R)$ в пространстве когерентных состояний этих осцилляторов. Действие операторов построенного представления сводится к дробно-линейному преобразованию переменных когерентного состояния, позволяя тем самым осуществлять переходы между разными дуальными диаграммами. На этой основе были получены выражения для диаграммы полумультипериферического типа [4], для диаграммы с собственно энергетической поправкой в одной из внутренних линий [3] и для диаграммы с симметрической трехреджионной вершиной [6].

Цель настоящей работы - дальнейшее развитие диаграммной техники, а точнее - построение выражений для операторов зеркального отражения и оператора перекручивания (твист- оператора).

Как было показано в работе [5], линейной цепочке рис.I

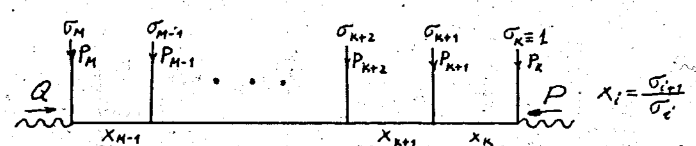

Рис.I

соответствует операторное выражение

$$\overleftarrow{R}_{KM} = \int d\varphi_{M-K+3}(\sigma_i;\rho_i)\, e^{\sum_{i=K}^{M}(P_i a_i^+)\frac{\sigma_M}{\sigma_i}}\, |0\rangle\langle 0|\, e^{\sum_{i=K}^{M}(P_i a_i)\sigma_i}\, \sigma_M^{H-H_{KM}} \;. \qquad (I)$$

(Стрелка указывает на направление, в котором на данной диаграмме нарастают номера внешних частиц). В этой формуле $d\varphi_{M-K+3}(\sigma_i,\rho_i)$ обозначает подинтегральное выражение $(M-K+3)$-точечной функции, записанной в переменных Коба-Нильсена [5,7]; P_i - пятимерные векторы с компонентами $(-i\sqrt{\alpha'}p_{i\mu},\ 1\ )$, $\mu = 0,1,2,3$; a_i^+ и a_i — пятимерные операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[a_{i\alpha}, a_{j\beta}^+] = \delta_{ij} G_{\alpha\beta}\ , \quad [a_{i\alpha}, a_{j\beta}] = [a_{i\alpha}^+, a_{j\beta}^+] = 0$$
$$-G_{00} = G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{44} = 1, \qquad G_{\alpha\beta} = 0 \ \text{для} \ \alpha \neq \beta \tag{2}$$
$$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4\ , \qquad i, j \leq M,$$

и через $(P_i a_i)$ обозначено скалярное произведение

$$(P_i a_i) \equiv \sum_{\alpha=0}^{4} G^{\alpha\alpha} P_{i\alpha} a_{i\alpha}\ .$$

Гамильтониан i - го осциллятора задается следующим образом:

$$H_i = (a_i^+ a_i) \equiv \sum_{\alpha=0}^{4} G^{\alpha\alpha} a_{i\alpha}^+ a_{i\alpha}\ , \tag{3}$$

а H и H_{KM} имеют вид

$$H \equiv \sum_{i \leq M} H_i \qquad H_{KM} \equiv \sum_{i=K}^{M} H_i\ . \tag{4}$$

Рассмотрим еще линейную цепочку $\vec{R}_{KM}$ (рис.2)

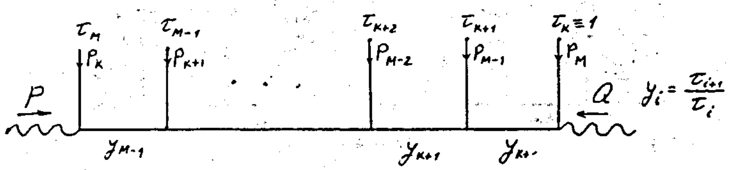

Рис.2

Очевидно, ей соответсвует выражение

$$\vec{R}_{KM} = \int d\varphi_{M-K+3}(\tau_i, P_{M+K-i})\, e^{\sum_{i=K}^{M}(P_{M+K-i}\, a_i^+)\frac{\tau_M}{\tau_i}} |0\rangle\langle 0| e^{\sum_{i=K}^{M}(P_{M+K-i}\, a_i)\tau_i}\, \tau_M^{H-H_{KM}}\ . \tag{5}$$

Покажем, что оба выражения (I) и (5) связаны равенством

$$\mathcal{J} \overleftarrow{R}_{KM}^{+} \mathcal{J}^+ = \vec{R}_{KM}\ , \tag{6}$$

где оператор $\mathcal{J}$ задается формулой

$$\mathcal{J} = :\, e^{\sum_{i=K}^{M}[(a_{M+K-i}^+ a_i) - (a_i^+ a_i)]} : \ . \tag{7}$$

Поскольку линейная цепочка $\vec{R}_{KM}$ является как бы зеркальным отражением цепочки $\overleftarrow{R}_{KM}$, то оператор $\mathcal{J}$ можно назвать оператором зеркального отражения.

Для доказательства формулы (6) воспользуемся тем, что когерентные состояния являются собственными состояниями операторов уничтожения /2/. Так как в выражении (7) операторы рождения и уничтожения находятся под знаком нормального произведения, то легко можно показать, что

$$\mathcal{J} \overleftarrow{R}_{KM}^{+} \mathcal{J}^+ = \int d\varphi_{M-K+3}(\sigma_i, p_i)\, e^{\sum_{i=K}^{M}(P_{M+K-i}\, a_i^+)\sigma_{M+K-i}} |0\rangle\langle 0| e^{\sum_{i=K}^{M}(P_{M+K-i}\, a_i)\frac{\sigma_M}{\sigma_{M+K-i}}}\, \sigma_M^{H-H_{KM}}\ . \tag{8}$$

Чтобы доказать эквивалентность выражений (5) и (8), сделаем замену переменных

$$\sigma_i = \frac{\tau_M}{\tau_{M+K-i}} \qquad i = K+1, K+2, \ldots M\ , \quad \tau_K \equiv 1. \tag{9}$$

Так как подинтегральная функция $(M-K+3)$ – точечной амплитуды имеет вид /4/

$$d\varphi_{M-K+3}(\sigma_i, p_i) = \prod_{i=K+1}^{M} d\sigma_i \prod_{K \leq i < n \leq M+1} (\sigma_i - \sigma_n)^{-2\alpha' p_i \cdot p_n - g_{in}}$$
$$\sigma_{M+1} \equiv 0, \quad p_{M+1} \equiv Q\ , \quad g_{in} = (1 + \alpha(0) + \alpha' p_i^2 + \alpha' p_n^2)\,\delta_{i+1,n}\ , \tag{I0}$$

то можно проверить, что в результате замены она переходит в

$$d\varphi_{M-K+3}(\sigma_i(\tau_j),\rho_i)=\prod_{i=K+1}^{M}d\tau_i\prod_{K\le i<n\le M+1}(\tau_i-\tau_n)^{-2\alpha' p_{M+K-i}\cdot p_{M+K-n}-\rho_{in}}\equiv d\varphi_{M-K+3}(\tau_i,p_{M+K-i})$$

$$\tau_{M+1}\equiv 0,\quad p_{K-1}\equiv P. \tag{II}$$

Это выражение и является подинтегральной функцией $\vec{R}_{KM}$. Следовательно, после замены формула (8) принимает вид:

$$J\overleftarrow{R}^{+}_{KM}J^{+}=\int d\varphi_{M-K+3}(\tau_i,p_{M+K-i})\,e^{\sum_{i=K}^{M}(P_{M+K-i}a_i^{+})\frac{\tau_M}{\tau_i}}|0\rangle. \tag{I2}$$

$$\langle 0|\,e^{\sum_{i=K}^{M}(P_{M+K-i}a_i)\tau_i}\;\tau_M^{H-H_{KM}}.$$

Сравнение формул (5) и (I2) сразу показывает справедливость формулы (6).

Рассмотрим далее состояния, изображенные на рис.3 а,б :

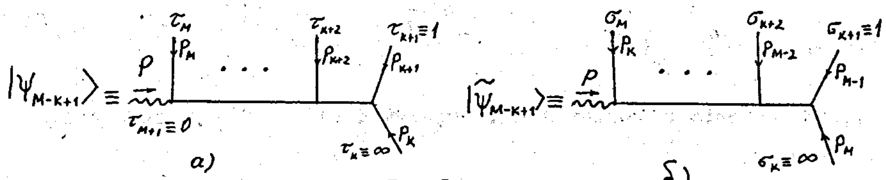

Рис.3

которые задаются следующими выражениями:/4/

$$|\psi_{M-K+1}\rangle=\int d\varphi_{M-K+2}(\tau_i,p_i)\,e^{\sum_{i=K+1}^{M}(p_i a_i^{+})\frac{\tau_M}{\tau_i}}|0\rangle \tag{I3}$$

$$|\widetilde{\psi}_{M-K+1}\rangle=\int d\varphi_{M-K+2}(\sigma_i,p_{M+K-i})\,e^{\sum_{i=K+1}^{M}(p_{M+K-i}a_i^{+})\frac{\sigma_M}{\sigma_i}}|0\rangle, \tag{I4}$$

где

$$d\varphi_{M-K+2}(\tau_i,p_i)=\prod_{i=K+2}^{M}d\tau_i\prod_{K+1\le i<n\le M+1}(\tau_i-\tau_n)^{-2\alpha' p_i\cdot p_n-\rho_{in}} \tag{I5}$$

$$\infty\equiv\tau_K>1\equiv\tau_{K+1}\geqslant\tau_{K+2}\geqslant\ldots\geqslant\tau_M\geqslant\tau_{M+1}\equiv 0,\quad p_{M+1}\equiv P$$

и, аналогично,

$$d\varphi_{M-K+2}(\sigma_i,p_{M+K-i})=\prod_{i=K+2}^{M}d\sigma_i\prod_{K+1\le i<n\le M+1}(\sigma_i-\sigma_n)^{-2\alpha' p_{M+K-i}\cdot p_{M+K-n}-\rho_{in}} \tag{I6}$$

$$\infty\equiv\sigma_K>1\equiv\sigma_{K+1}\geqslant\sigma_{K+2}\geqslant\ldots\geqslant\sigma_M\geqslant\sigma_{M+1}\equiv 0.$$

Наша цель - найти оператор Ω, который, действуя на $|\psi_{M-K+1}\rangle$ переводит его в состояние $|\widetilde{\psi}_{M-K+1}\rangle$, т.е.

$$\Omega|\psi_{M-K+1}\rangle=|\widetilde{\psi}_{M-K+1}\rangle. \tag{I7}$$

В соответствии с уже установившейся терминологией/8,9/ назовем его оператором перекручивания (твист).

Для нахождения Ω заметим сначала, что если в подинтегральной функции (I6) сделать следующую замену переменных:

$$\sigma_i=\frac{1-\dfrac{\tau_M}{\tau_{M-1}}}{1-\dfrac{\tau_M}{\tau_{M+K-i}}}\qquad i=K,K+1,\ldots M,M+1, \tag{I8}$$

то $d\varphi_{M-K+2}(\sigma_i;p_{M+K-i})$ переходит в $d\varphi_{M-K+2}(\tau_i,p_i)$, т.е.

$$d\varphi_{M-K+2}(\sigma_i(\tau_j),p_{M+K-i})=d\varphi_{M-K+2}(\tau_i,p_i). \tag{I9}$$

Так как при замене (I8) отношение $\frac{\sigma_M}{\sigma_i}$ заменяется на

$$\frac{\sigma_M}{\sigma_i}=1-\frac{\tau_M}{\tau_{M+K-i}}, \tag{20}$$

то $|\widetilde{\psi}_{M-K+1}\rangle$ будет задаваться формулой

$$|\widetilde{\psi}_{M-K+1}\rangle=\int d\varphi_{M-K+2}(\tau_i,p_i)\,e^{\sum_{i=K+1}^{M}(P_{M+K-i}a_i^{+})\left(1-\frac{\tau_M}{\tau_{M+K-i}}\right)}|0\rangle. \tag{21}$$

Из сравнения формул (I3), (I7) и (2I) видно, что оператор должен быть таковым, что

$$\Omega\, e^{\sum_{i=k+1}^{M}(P_i a_i^+)\frac{\tau_M}{\tau_i}}|0\rangle = e^{\sum_{i=k}^{M}(P_i a^+_{M+k-i})(1-\frac{\tau_M}{\tau_i})}|0\rangle. \tag{22}$$

Очевидно, что первый шаг для преобразования экспоненты в правой части последнего равенства должен привести к тому, что номера импульсов P_i и операторов a_i^+ нарастали бы одновременно с нарастанием индекса i. Этого можно достигнуть с помощью уже найденного оператора зеркального отражения. Действительно, легко проверить, что

$$e^{\sum_{i=k}^{M}(P_i a^+_{M+k-i})(1-\frac{\tau_M}{\tau_i})}|0\rangle = \mathcal{J}(-1)^{H_{KM}} e^{\sum_{i=k}^{M}(P_i a_i^+)(\frac{\tau_M}{\tau_i}-1)}|0\rangle. \tag{23}$$

Далее, поскольку экспонента в левой части равенства (22) не зависит от импульса K -той частицы, мы должны освободиться от присутствия p_K и в экспоненте правой части равенства (23). Для этой цели ее можно переписать следующим образом:

$$e^{\sum_{i=k}^{M}(P_i a_i^+)(\frac{\tau_M}{\tau_i}-1)}|0\rangle = e^{\sum_{i=k}^{M}(i\sqrt{\alpha'}p_i\cdot a_i^+ + a^+_{i4})(\frac{\tau_M}{\tau_i}-1)}|0\rangle =$$

$$= e^{-i\sqrt{\alpha'}p_K\cdot a_K^+ - a^+_{K4}}\,\mathcal{L}\, e^{\sum_{i=k+1}^{M}[i\sqrt{\alpha'}p_i\cdot a_i^+ + a^+_{i4}(\frac{\tau_M}{\tau_i}-1)]}|0\rangle = \tag{24}$$

$$= \mathcal{L}\, e^{i\sqrt{\alpha'}(P+\sum_{i=k+1}^{M}p_i)\cdot a_K^+ - \sum_{i=k}^{M}a^+_{i4}}\; e^{\sum_{i=k+1}^{M}(i\sqrt{\alpha'}p_i\cdot a_i^+ + a^+_{i4}\frac{\tau_M}{\tau_i})}|0\rangle,$$

где использован закон сохранения четырехимпульса $\left(p_K = -P - \sum_{i=k+1}^{M}p_i\right)$, а $\mathcal{L}$ - оператор[4], зависящий от a_i^+ и a_i $(i=k+1, k+2, \ldots M)$, действие которого на когерентные состояния задается формулой:

$$\mathcal{L}\, e^{\sum_{i=k+1}^{M}(z_i a_i^+)}|0\rangle = e^{\sum_{i=k+1}^{M}(-z_{i4}\, z_i^{\mu} a^+_{i\mu} + z_{i4} a^+_{i4})}|0\rangle \tag{25}$$

($z_i \equiv (z_{i\mu}, z_{i4})$ - пятимерные векторы).

Если теперь воспользоваться тем фактом, что $p_{i\mu}$ $(i=k+1,\ldots M)$ являются собственными значениями операторов $a_{i\mu}$, то цепочку равенств (24) можно продолжить следующим образом:

$$e^{\sum_{i=k}^{M}(P_i a_i^+)(\frac{\tau_M}{\tau_i}-1)}|0\rangle = \mathcal{L}\, e^{-\sum_{i=k+1}^{M}a_i\cdot a_K^+ + i\sqrt{\alpha'}P\cdot a_K^+ - \sum_{i=k}^{M}a^+_{i4}}\; e^{\sum_{i=k+1}^{M}(i\sqrt{\alpha'}p_i\cdot a_i^+ + a^+_{i4}\frac{\tau_M}{\tau_i})}|0\rangle =$$

$$= \mathcal{L}\, e^{-\sum_{i=k+1}^{M}a_i\cdot a_k^+ + i\sqrt{\alpha'}P\cdot a_K^+ - \sum_{i=k}^{M}a^+_{i4}}\,\mathcal{L}^{-1}\, e^{\sum_{i=k+1}^{M}(P_i a_i^+)\frac{\tau_M}{\tau_i}}|0\rangle. \tag{26}$$

Если обозначить одной буквой оператор, выделившийся в правой части этого равенства, т.е.

$$\Lambda \equiv \mathcal{L}\, e^{-\sum_{i=k+1}^{M}a_i\cdot a_K^+ + i\sqrt{\alpha'}P\cdot a_K^+ - \sum_{i=k}^{M}a^+_{i4}}\,\mathcal{L}^{-1} \tag{27}$$

и сравнить равенство (22), (23) и (26), то видно, что искомый оператор Ω имеет вид

$$\Omega = (-1)^{H_{KM}}\,\mathcal{J}\Lambda. \tag{28}$$

Легко проверить, что Ω удовлетворяет условию

$$\Omega^2 = 1. \tag{29}$$

Появление в формуле (28) оператора Λ вызвано отсутствием в состоянии $|\psi_{M-K+1}\rangle$ экспоненты, содержащей импульс p_K. Видно, что этот оператор совершенно аналогичен оператору, появляющемуся при переходе от мультипериферической к полумультипериферической диаграмме[4]. Единственное их отличие заключается в том, что в последнем случае из оператора Λ выделено в явном виде преобразование, которое смещает на (-I) аргумент экспоненты в правой части равенства (23).

Автор выражает свою глубокую благодарность Д.Ц.Стоянову и А.Н.Тавхелидзе за многочисленные и весьма полезные обсуждения этой работы.

Литература:

I. А.Н.Квинихидзе, Б.Л.Марковски, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ 6, №2 (1970).
2. А.Н.Квинихидзе, Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ 9, I90 (I97I).
3. A.N.Kvinikhidze, B.L.Markovski, C.D.Popov, D.Ts.Stoyanov, A.N.Tavkhelidze. Proc.of the Int.Sem. on Binary Reactions, Dubna, 1971, D-6004.
4. Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ I2, 370 (I972).
5. Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, Сообщение ОИЯИ, Р2-72I9, Дубна (I973).
6. Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, Препринт ОИЯИ, Р2-6740, Дубна (I972).
7. E.Donini, S.Sciuto, Ann.of Phys. 58, 388 (1970).
8. S.Fubini, D.Gordon, G.Veneziano, Phys.Lett., 28B, 679 (1969).
9. L.Caneschi, A.Schwimmer, G.Veneziano, Phys.Lett. 30B, 351 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября I973 года.