

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С 323.3
Н-972

14/Г-74

P2 - 7530

80/2-74

Н.Е.Нюнько, Ю.Н.Тюхтяев, Р.Н.Фаустов

СТРУКТУРА ПРОТОНА

И ТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В АТОМЕ ВОДОРОДА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7530

Н.Е.Нюнько*, Ю.Н.Тюхтяев*, Р.Н.Фаустов

СТРУКТУРА ПРОТОНА

И ТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В АТОМЕ ВОДОРОДА

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

* Саратовский государственный университет.

В предыдущей работе авторов^{/1/} было рассмотрено влияние движения ядра на тонкую структуру водорода в приближении двухфотонного обмена при произвольных массах частиц. Всё рассмотрение проводилось там в предположении, что ядро (протон) является точечной дираковской частицей. Влияние структуры протона (электромагнитных формфакторов) и аномального магнитного момента на тонкое расщепление до сих пор^{/2/} учитывалось лишь в приближении однофотонного обмена.

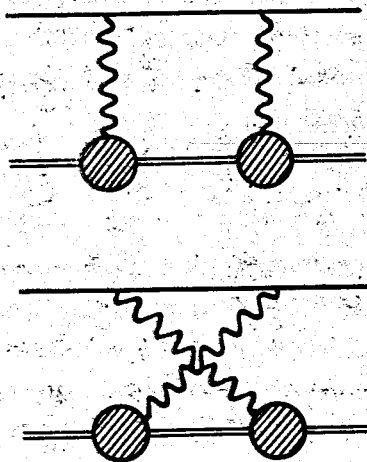
Здесь мы впервые вычислим эффект, который оказывает структура протона на тонкое расщепление в приближении двухфотонного обмена. Как и в предыдущей статье^{/1/}, мы воспользуемся наиболее удобным для этой цели квазипотенциальным методом Логгунова и Тавхелидзе^{/3/}. Общая схема этого формализма в применении к проблеме связанных состояний изложена в работах^{/4,5/}, куда мы и отсылаем читателя за подробностями и обозначениями.

Как хорошо известно, электромагнитную структуру реального протона можно описать с помощью двух формфакторов - дираковского и паулиевского:

$$\langle \vec{p} | \vec{j}_\mu(0) | \vec{q} \rangle = \bar{u}(\vec{p}) \vec{\Gamma}_\mu(k) u(\vec{q}); \quad \vec{\Gamma}_\mu(k) = \gamma_\mu \rho(k^2) + i \frac{\alpha}{2m} \epsilon_{\mu\nu} k^\nu f(k^2),$$

$$k = p - q, \quad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2, \quad \rho(0) = f(0) = 1. \quad (I)$$

В дальнейшем мы предположим, что в диаграммах двухфотонного обмена (см. рис.) электромагнитные вершины протона $\vec{\Gamma}_{2\mu}(k)$ определяются тем же выражением, что и в матричном элементе (I). Оправданием этому предположению может служить тот факт, что атом водорода является слабо связанной системой и поэтому виртуальный протон находится вблизи массовой поверхности. Ясно также, что формфакторы могут давать заметный вклад лишь при относительно больших импульсах виртуальных фотонов $\vec{k}^2 \gg (Z\alpha\mu)^2$.



где α - постоянная тонкой структуры, а μ - приведённая масса. Это значит, что достаточно вычислить лишь вклад высокочастотной области в интегралах по виртуальному импульсу, т.е. согласно работе [1] при

$$|\vec{k}| \gg \lambda, \quad (Z\alpha)\mu \ll \lambda \ll \mu, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Вклад низкочастотной области $|\vec{k}| < \lambda$ остаётся, естественно, таким же, как и в работе [1]. Нам будет интересовать поправка к тонкому расщеплению порядка $(Z\alpha)^5$. С этой точностью внешние импульсы в квазипотенциале двухфотонного обмена можно положить равными нулю, а полную энергию в системе центра масс - равной сумме масс частиц. В указанном приближении интересующая нас поправка будет иметь вид [1,4,5]

$$\Delta E_\Lambda^> = |\Psi_c(r=0)|^2 \left[T_{2\gamma} - V_c G_f V_c - V_c G_f \Delta V_{1\gamma} - \Delta V_{1\gamma} G_f V_c \right]_{\vec{p}=\vec{q}=0}, \quad E \cong m_1 + m_2, \quad (3)$$

где $\Psi_c(\vec{r})$ - кулоновская волновая функция. Кулоновский потенциал

$$V_c(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{4\pi Z\alpha}{(\vec{p} - \vec{q})^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad (4)$$

функция Грина свободных частиц

$$G_f(\vec{p}, \vec{q}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) F(p), \quad F^{-1}(p) = E - \sqrt{p^2 + m_1^2} - \sqrt{p^2 + m_2^2}. \quad (5)$$

Нужная нам часть квазипотенциала однофотонного обмена

$$\Delta V_{1\gamma}(\vec{p}, \vec{q}) = V_{1\gamma} - V_c \cong -\frac{4\pi Z\alpha}{k^2} \left\{ \frac{\vec{p}^2 + \vec{q}^2}{2m_1 m_2} - \frac{(\vec{p}^2 - \vec{q}^2)^2}{4m_1 m_2 k^2} - \frac{k^2}{8\mu^2} + \frac{d\rho_2(0)}{dk^2} k^2 - \alpha \frac{k^2}{4m_2^2} \right\}, \quad \vec{k} = \vec{p} - \vec{q} \quad (6)$$

Амплитуда двухфотонного обмена представляет собой сумму диаграмм с двумя параллельными и перекрестными фотонными линиями и при нулевых внешних импульсах с учётом обрезания снизу по виртуальному трехимпульсу имеет вид:

$$T_{2\gamma}^{\rightarrow}(0,0) = \bar{u}_1(0) \bar{u}_2(0) M^{\rightarrow}(0,0) u_1(0) u_2(0)$$

$$M^{\rightarrow}(0,0) = i \frac{(Z\alpha)^2}{\pi^2} \int \frac{d^4 k}{k^4} \gamma_1^\mu S_1(m_1+k) \gamma_1^\nu \left[\Gamma_{2\mu}(k) S_2(m_2-k) \Gamma_{2\nu}(-k) + \Gamma_{2\nu}(-k) S_2(m_2+k) \Gamma_{2\mu}(k) \right]$$

где $S_{1,2}^{(\pm)}(p) = \gamma \cdot p - m_{1,2}$, $m_{1,2} \pm k \cong (m_{1,2} \pm k_0, \pm \vec{k})$, $u_{1,2}(\vec{p})$ - положительно-частотные дираковские спиноры, нормированные условием $\bar{u}u=1$, а вершинная функция $\Gamma_{2\mu}$ определена равенством (I). В отличие от работы [1] мы использовали здесь фотонный пропагатор в диагональной калибровке.

Для проведения дальнейших вычислений необходимо фиксировать явный вид формфакторов протона. Поскольку степень убывания формфакторов при больших передачах импульса не влияет существенно на результат из-за хорошей сходимости интегралов, мы сделаем простейшее модельное предположение:

$$\rho_2(k^2) = f_2(k^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - k^2} = f(k^2), \quad (8)$$

и будем считать

$$2m_1 < \Lambda < 2m_2 \quad (9)$$

Подставляя формфакторы (8) в выражение (7) для амплитуды $T_{2\gamma}^{\rightarrow}$, мы после некоторых преобразований найдём:

$$T_{2\gamma}^{\rightarrow}(0,0) = (Z\alpha)^2 \left[I_{DD} + \frac{\alpha}{2m_2} I_{DP} + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} I_{PP} \right],$$

где

$$I_{DD} = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 k}{k^4} f^2(k^2) \left[\frac{(2m_1+k_0)(2m_2-k_0) - 3k_0^2 + 2k^2}{(m_2+k_0)^2 - k^2 - m_2^2} - (m_2 \rightarrow -m_2) \right], \quad (10)$$

$$I_{DP} = \frac{4}{i\pi^2} \int \frac{d^4 k}{k^4} f^2(k^2) \frac{[2m_1 k^2 + 3k_0 k^2]}{k^2 [(m_1+k_0)^2 - k^2 - m_1^2] (k^4 - 4m_2^2 k_0^2)}$$

$$I_{PP} = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4 k}{k^4} f^2(k^2) \frac{[2(m_1-2m_2)k_0 k^2 + 3k_0^2 k^2]}{k^2 [(m_1+k_0)^2 - k^2 - m_1^2] [(m_2-k_0)^2 - k^2 - m_2^2] - (m_2 \rightarrow -m_2)}, \quad k^2 = k_0^2 - k^2$$

Интегралы в равенствах (9) вычисляются стандартными методами [1, 4, 6], и в результате мы получим:

$$I_{DD} = -\frac{16\mu}{3\lambda^3} + \frac{4\mu}{\lambda m_1 m_2} + \frac{32\mu}{\lambda \Lambda^2} - \frac{4}{3m_1 m_2} +$$

$$+ \frac{2}{m_1 m_2} \left[\ln \frac{2\lambda}{\Lambda} + \frac{\Lambda^2 - 6m_1^2}{\Lambda \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}}{2m_1} \right] +$$

$$+ \frac{2\mu}{(m_1 - m_2)m_2^2 \Lambda^3} \left[\frac{\Lambda^4 - 2\Lambda^2(m_2^2 + 3m_1^2) + 40m_1^2 m_2^2}{\sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} \ln \frac{2m_1}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Lambda^4 - 8\Lambda^2 m_2^2 + 40m_1^4}{\sqrt{4m_2^2 - \Lambda^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4m_2^2}{\Lambda^2} - 1} \right],$$

$$I_{DF} = \frac{16\mu}{\lambda m_2} + \frac{48\mu}{(m_1 - m_2)m_2 \Lambda} \left[\frac{m_1^2}{\sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} \ln \frac{2m_1}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_2^2}{\sqrt{4m_2^2 - \Lambda^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4m_2^2}{\Lambda^2} - 1} \right], \quad (II)$$

$$I_{FP} = \frac{12\mu \Lambda}{(m_1 - m_2)} \left[\frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} \ln \frac{2m_1}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4m_2^2 - \Lambda^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4m_2^2}{\Lambda^2} - 1} \right].$$

Соответствующая часть вычитаемой итерации в соотношении (3) с учётом равенств (4), (5) и (6) имеет вид:

$$\left[V_c G_f V_c + V_c G_f \Delta V_{1f} + \Delta V_{1f} G_f V_c \right] \approx$$

$$\approx (Z\alpha)^2 \frac{2}{\pi} \int_{k>\lambda} \frac{d^3k}{k^2} F(k) \left[\frac{1}{2m_1 m_2} - \frac{1}{4\mu^2} + \frac{1}{k^2} - \frac{2}{\Lambda^2} - \frac{\alpha}{2m_2^2} \right] \approx$$

$$\approx (Z\alpha)^2 \left[-\frac{16\mu}{3\lambda^3} + \frac{4\mu}{\lambda m_1 m_2} + \frac{32\mu}{\lambda \Lambda^2} + \alpha \frac{8\mu}{\lambda m_2^2} \right]. \quad (I2)$$

Подставляя выражения (II) и (I2) в равенство (3), мы найдём интересующую нас поправку к уровням энергии:

$$\Delta E_{\Lambda}^{>} = \delta \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{\ell_0 n^3 \pi m_1 m_2} \left\{ 2 \ln \frac{2\lambda}{\Lambda} - \frac{4}{3} + \frac{2(\Lambda^2 - 6m_1^2)}{\Lambda \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}}{2m_1} + \right.$$

$$+ \frac{\mu m_1}{(m_1 - m_2)m_2 \Lambda^3} \left[\frac{\Lambda^4(2+3\alpha^2) - 8\Lambda^2 m_2^2(2-3\alpha) + 80m_1^4}{\sqrt{4m_2^2 - \Lambda^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4m_2^2}{\Lambda^2} - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Lambda^4(2+3\alpha^2) - 4\Lambda^2(m_2^2 + 3m_1^2 - 6\alpha m_1^2) + 80m_1^2 m_2^2}{\sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} \ln \frac{2m_1}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - 4m_1^2}} \right\}, \quad (I3)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1.$$

Видно, что поправка (I3) приводит к сдвигу лишь S-уровней энергии (ℓ - орбитальное квантовое число). Зависимость от параметра низкочастотного обрезания λ осталась только в логарифмическом члене и исчезает после прибавления соответствующей низкочастотной части поправки $\Delta E^{<}$, подробно рассмотренной в работе авторов [1].

До сих пор единственным ограничением на массы частиц

и параметр Λ было условие (9). Теперь мы рассмотрим некоторые предельные случаи. Сначала найдём выражение для сдвига уровней энергии реального атома водорода, когда $m_1 \ll \Lambda$, $\Lambda \sim m_2$, $\Lambda < 2m_2$.

В этом случае соотношение (13) принимает простой вид:

$$\Delta E_{\Lambda}^{\infty} = \delta_0 \frac{(Z\alpha)^5 m_1^2}{n^3 \pi m_2} \left[2 \ln \frac{2\lambda}{m_1} - \frac{4}{3} \right]. \quad (14)$$

Отсюда следует, что электромагнитные формфакторы и аномальный магнитный момент протона не даёт вклада в поправку порядка $(Z\alpha)^5 (m_1/m_2)$ к тонкому расщеплению в атоме водорода.

Теперь обратимся к случаю точечной частицы 2 с аномальным магнитным моментом. "Точечность" означает обращение формфакторов в единицу, что может быть достигнуто переходом к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$. При этом необходимо произвести замену:

$$\frac{1}{\sqrt{4m_2^2 - \Lambda^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4m_2^2}{\Lambda^2} - 1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 - 4m_2^2}} \ln \frac{\sqrt{\Lambda^2 - 4m_2^2} + \Lambda}{2m_2},$$

после чего мы получим следующее выражение для поправки (13):

$$\Delta E_{\infty}^{\infty} = \delta_0 \frac{2(Z\alpha)^5 \mu^3}{n^3 \pi m_1 m_2} \left\{ \ln \frac{2\lambda}{\mu} - \frac{2}{3} + \frac{1}{m_1^2 - m_2^2} \left[m_1^2 \ln \frac{\mu}{m_2} - m_2^2 \ln \frac{\mu}{m_1} + \frac{3}{2} \mu^2 m_1^2 \ln \frac{m_1}{m_2} \right] \right\}. \quad (15)$$

Этот результат согласуется с соотношениями (14) и (15), полученными в работе авторов /1/. Новым здесь является последний

член, пропорциональный квадрату аномального магнитного момента. Для реальных водородоподобных систем, таких как позитроний и мюоний, вклад этого члена лежит пока за пределами достигнутой экспериментальной точности /5,7/.

В заключение авторы выражают благодарность профессорам Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, Л.Д. Соловьёву, А.Н. Тавкхелидзе, И.Т. Тодорову, О.А. Хрусталёву за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература.

1. Н.Е. Нилько, Д.Н. Тихтяев, Р.Н. Фаустов. Сообщение ОИЯИ Р2-7493, Дубна (1973).
2. G.W. Ericson, D.R. Yennie. Ann. Phys., (N.Y.), 35, 271 (1966).
3. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1966).
4. R.N. Faustov. Nucl. Phys., 75, 669 (1966);
Г.М. Зиновьев, Б.В. Струминский, Р.Н. Фаустов, В.Л. Черняк, II, 1284 (1970).
5. Р.Н. Фаустов. ЭЧАЯ, 3, 238 (1972).
6. Н.Е. Нилько, Д.Н. Тихтяев, Р.Н. Фаустов. Сообщение ОИЯИ Р2-6996, Дубна (1973).
7. B.E. Lautrup, A. Peterman and E. de Rafael. Phys. Reports, 193 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1973 года.