ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



P2 - 7518

В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов

# СИНГУЛЯРНОЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7518

В.Ш.Гогохия,* А.Т.Филиппов

# СИНГУЛЯРНОЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

*Направлено в ТМФ*

* Математический институт АН Грузинской ССР.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения теории возмущений в неренормируемых теориях поля / N - теории/ интенсивно обсуждалась на протяжении последних десяти лет. Т.Д.Ли /1/ на примерах вычисления радиационных поправок в неренормируемых теориях взаимодействий массивных векторных частиц с фотонами показал, что радиационные поправки к квадрупольному моменту неаналитически зависят от заряда $e$, а именно, содержат члены $\approx e^2 \log e^2$. Таким образом стала понятной несостоятельность обычной теории возмущений в неренормируемых теориях поля: в N-теориях невозможно разложение S -матрицы даже в асимптотический ряд. Выводы /1/ были подтверждены анализом точно решаемых моделей квантовой теории с неренормируемым взаимодействием /2-5/. Проще всего понять природу отличия N -теории от ренормируемых теорий / R-теории/ на примере модели нерелятивистского рассеяния на сингулярном потенциале /4-6/. Аналогию между N -теорией и рассеянием на сингулярном потенциале можно обосновать, пользуясь квазипотенциальным уравнением А.А.Логунова и А.Н.Тавхелидзе /7/. Уравнение для амплитуды упругого рассеяния сводится к уравнению типа Шредингера с сингулярным потенциалом, причем в R -теориях потенциал ренормируем, а в N-теориях - неренормируем. Таким образом, возникает возможность перенесения в теорию поля идей и методов, разработанных в потенциалльной теории. В работах /8/ был предложен и сформулирован метод вычисления поправок от высших приближений, позволяющий находить волновую функцию и амплитуду рассеяния в виде рядов по степеням

$g^{\nu}(\ln g)^{n_{\nu}}$ /модифицированный ряд теории возмущений/. В данной работе исследуется квазипотенциальное уравнение для парциальной амплитуды с сингулярным потенциалом отталкивания вида $V(r)=gr^{-2n+1}$. Анализ зависимости квазипотенциальной парциальной амплитуды от константы связи указывает на наличие особенностей по $g$ при малых значениях константы связи $g$, что связано с наличием степенных расходимостей в итерационном решении уравнения для парциальной амплитуды рассеяния. С целью упрощения изложения мы подробно рассматриваем точные уравнения для потенциала $V(r)=gr^{-3}$ и предлагаем приближенный метод исследования степенных потенциалов общего вида.

## §2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Квазипотенциальное уравнение для полной амплитуды рассеяния двух скалярных частиц одинаковой массы $m$ имеет вид

$$T(\vec{p},\vec{p}') = V[(\vec{p}-\vec{p}')^2] + \int \frac{d^3q}{\sqrt{q^2+m^2}} \frac{V[(\vec{p}-\vec{q})^2]\,T(\vec{q},\vec{p}')}{k^2-q^2}, \qquad /2.1/$$

$$V[(\vec{p}-\vec{p}')^2] = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \frac{V(r)}{r} e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{r}}, \qquad /2.2/$$

где $\vec{p},\vec{p}'$ - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс, причем энергетическая поверхность определяется условием $p^2=p'^2=k^2$. Для сингулярных потенциалов потенциал $V$ определен лишь с точностью до вычитательного полинома /7/, и поэтому удобнее изучать уравнение для парциальных волн. Положим

$$T(\vec{p},\vec{p}') = \frac{1}{4\pi pp'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, f_{\ell}(p,p')\, P_{\ell}(\hat{p}\hat{p}'), \qquad /2.3/$$

$$V(\vec{p},\vec{p}\,') = \frac{1}{4\pi \vec{p}\,\vec{p}\,'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+2)\, V_\ell(p,p')\, P_\ell(\hat{p}\,\hat{p}') .$$

/2.4/

Тогда уравнения для $f_\ell$ имеют вид

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') + \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2+m^2}} \frac{V_\ell(p,q)\, F_\ell(q,p')}{k^2-q^2},$$

/2.5/

где

$$V_\ell(p,p') = \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr\, V(r)\, J_{\ell+1/2}(pr)\, J_{\ell+1/2}(p'r) .$$

/2.6/

Если $V_\ell(p,p')$ удается представить в виде

$$V_\ell(p,p') = \theta(p-p') \sum_{i=1}^{M} f_1^{(i)}(p)\, f_2^{(i)}(p') + \theta(p'-p) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N} f_3^{(i)}(p)\, f_4^{(i)}(p'), \qquad /2.7/$$

то уравнение /2.5/ соответствующим числом дифференцирований можно свести к дифференциальному уравнению для $f_\ell(p,p')$ порядка $\leq M+N$. Для потенциалов $V(r) = gr^{-2n+1}$, воспользовавшись формулой $(n>0, \mathrm{Re}\,\ell > n-3/2)$,

$$\sqrt{pp'} \int_0^\infty dr\, r^{-2n+1} J_{\ell+1/2}(pr)\, J_{\ell+1/2}(p'r) = \frac{\Gamma(\ell+3/2-n)}{2^{2n-1}\,\Gamma(n)\,\Gamma(\ell+3/2)} \times$$

$$\times \Big\{ \theta(p-p') \frac{p'^{\,\ell+1}}{p^{\,\ell+2-2n}} F\Big(\ell+3/2-n, -n+1, \ell+3/2 \Big| \frac{p'^{\,2}}{p^2}\Big) +$$

$$+\ \theta(p'-p)\ \frac{p^{\ell+1}}{p'^{\,\ell+2-2n}}\ F(\ell+3/2-n,-n+1,\ell+\frac{3}{2}|\frac{p^2}{p'^2})\ \},$$

/2.8/

получим в случае целого $n$ представление /2.7/, так как гипергеометрическая функция $F(\alpha,\beta,\gamma/z)$ при $\beta=-n+1$ сводится к полиному $(n-1)$ порядка по $z$, причем $M=N=n$. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет порядок $\leq 2n$, а коэффициенты его - рациональные функции $p,p'$. Например, для $n=2$ получим

$$V_\ell(p,p') = \frac{g}{2(4\ell^2-1)}\{\theta(p-p')\ \frac{p'^{\,\ell+1}}{p^{\ell-2}}[\,1-\frac{2\ell-1}{2\ell+3}\ \frac{p'^2}{p^2}\,]+$$

$$+\ \theta(p'-p)\ \frac{p^{\ell+1}}{p'^{\,\ell-2}}[\,1-\frac{2\ell-1}{2\ell+3}\ \frac{p^2}{p'^2}]\},\quad \mathrm{Re}\,\ell>1/2,$$

/2.9/

так что $f_\ell(p,p')$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') + \frac{g}{2(4\ell^2-1)}\{\int_0^p \frac{dq}{\sqrt{q^2+m^2}}\ \frac{f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}\ \times$$

$$\times[\frac{q^{\ell+1}}{p^{\ell-2}}(1-\frac{2\ell-1}{2\ell+3}\ \frac{q^2}{p^2})\,]+\int_p^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2+m^2}}\ \frac{f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}\ \times$$

$$\times\,[\,\frac{p^{\ell+1}}{p^{\ell-2}}(1-\frac{2\ell-1}{2\ell+3}\ \frac{p^2}{q^2})]\}\,.\qquad /2.10/$$

Итерационное решение данного уравнения невозможно, так как при итерациях возникают степенные расходимости, поэтому для исследования этого уравнения, как уже отмечалось выше, сведем его к дифференциальному уравнению четвертого порядка. Последовательно дифференцируя уравнение /2.10/, получим, что $f_\ell(p,p')\equiv f(p)$

удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$f^{(4)}(p) - 2\ell(\ell+1)\, p^{-2} f^{(2)}(p) + 4\ell(\ell+1)\, p^{-3} f^{(1)}(p) +$$

$$+ \ell(\ell+1)(\ell-2)(\ell+3)\, p \quad f(p) = g\,\delta(p-p') + \frac{g}{\sqrt{p^2+m^2}}\,\frac{f(p)}{k^2-p^2}. \qquad /2.11/$$

Хорошо известно, что решение неоднородного уравнения /2.11/ можно строить из линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения, причем эти линейно независимые решения нужно скомбинировать таким образом, чтобы решение /2.11/ удовлетворяло бы соответствующим граничным условиям в нуле и на бесконечности, которые следуют из исходного интегрального уравнения /2.10/ и имеют вид

$$p^{\ell+1} f^{(3)}(p) - (\ell+1)\, p^{\ell} f^{(2)}(p) - \ell(\ell+1)\, p^{\ell-1} f^{(1)}(p) +$$

$$+ \ell(\ell+1)(\ell+3)\, p^{\ell-2} f(p) \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$p^{\ell+3} f^{(3)}(p) - (\ell+3)\, p^{\ell+2} f^{(2)}(p) - (\ell^2 - 3\ell - 6)\, p^{\ell+1} f^{(1)}(p) +$$

$$+ (\ell+1)(\ell^2+\ell-\alpha)\, p^{\ell} f(p) \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$p^{-\ell+2} f^{(3)}(p) + (\ell-2)\, p^{-\ell+1} f^{(2)}(p) - (\ell^2 + 5\ell - 2)\, p^{-\ell} f^{(1)}(p) -$$

$$-\ell(\ell^2+\ell-6)\, p^{-\ell-1} f(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad /2.11a/$$

$$p^{-\ell} f^{(3)}(p) + \ell\, p^{-\ell-1} f^{(2)}(p) - \ell(\ell+1)\, p^{-\ell-2} f^{(1)}(p) -$$

$$-\ell(\ell+1)(\ell+2)\, p^{-\ell-3} f(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, интегральное уравнение /2.10/, ядро которого было определено только в случае $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$, эквивалентно граничной задаче /2.11/-/2.11a/, которую в принципе можно решить и при $\mathrm{Re}\,\ell < 1/2$, используя аналитическое продолжение по $\ell$. Нетрудно показать, что линейно независимые решения /2.11/ имеют экспоненциальную асимптотику на бесконечности, причем два из них убывают, а два - возрастают.

$$f_{1,2}(p)_{p\to\infty} \approx \exp\{-4e^{\pm\frac{\pi i}{4}}(gp)^{1/4}\},$$

$$f_{3,4}(p)_{p\to\infty} \approx \exp\{4e^{\pm\frac{i\pi}{4}}(gp)^{1/4}\}. \qquad /2.12/$$

Очевидно, что двум последним граничным условиям /2.11a/ удовлетворяют $f_1(p)$ и $f_2(p)$. Найдем теперь поведение решений /2.11/ в нуле. Характеристическое уравнение

$$s(s-1)(s-2)(s-3) - 2\ell(\ell+1)s(s-1) + 4\ell(\ell+1)s +$$
$$+ \ell(\ell+1)(\ell-2)(\ell+3) = 0$$

имеет следующие корни:

$s_1 = \ell+3$, $s_2 = \ell+1$, $s_3 = 2-\ell$, $s_4 = -\ell$.

Таким образом, разложение решений $f_i(p)$ в уравнении /2.11/ в окрестности нуля может начинаться с $p^{\ell+3}$, $p^{\ell+1}$, $p^{2-\ell}$, $p^{-\ell}$. Легко проверить, что только решения, соответствующие $s_1$, $s_2$, удовлетворяют граничным условиям /2.11a/ в нуле. Выберем решения $f_3(p)$ и $f_4(p)$ таким образом, чтобы они были регулярными в нуле. Это всегда можно сделать ввиду наличия двух характеристических корней $s_1$ и $s_2$, регулярных в нуле. Тогда решения неоднородного уравнения имеют вид

$$f(p) = f_0(p) + \sum_{\nu=1}^{4} f_\nu(p) \int^{p} \frac{\tilde{\tilde{W}}_\nu(p'')}{W[f_1, f_2, f_3, f_4]}\, dp'', \qquad /2.13/$$

где $W[f_1,f_2,f_3,f_4]$ - детерминант Вронского, $W_\nu(p'')$ - детерминант, получающийся из соответствующего детерминанта Вронского заменой элементов $\nu$-го столбца на $[0,0,0,g\delta(p-p')]$, а $f_0(p)$ - решение однородного уравнения, которое нужно добавить для выполнения граничных условий. Так как возмущающая функция для уравнения /2.11/ есть $g\delta(p-p')$, то $\tilde{W}_\nu(p'')=g\delta(p-p')\,W_\nu(p'')$, где $W_\nu(p'')$ являются алгебраическими дополнениями, соответствующими $f_\nu^{(3)}(p'')$. В силу этого обстоятельства интеграл в /2.13/ пропорционален $\theta(p-p')$. Поэтому /2.13/ можно записать в виде

$$f(p) = f_0(p) + \frac{g\theta(p-p')}{W[f_1 f_2 f_3 f_4]} \sum_{\nu=1}^{4} f_\nu(p)\, W_\nu(p') . \qquad /2.14/$$

Так как коэффициент при третьей производной в уравнении /2.11/ равен нулю, то определитель Вронского не зависит от $p$ и равен постоянной, которую в дальнейшем обозначим через $\omega \equiv W[f_1 f_2 f_3 f_4]$. Для того, чтобы исключить возрастающие на бесконечности члены в /2.14/ $f_3(p)$ и $f_4(p)$, выберем решение однородного уравнения $f_0(p)$ следующим образом:

$$f_0(p) = -\frac{g}{\omega}[\, f_3(p)\, W_3(p') + f_4(p)\, W_4(p')\,] . \qquad /2.15/$$

Тогда окончательно получим:

$$f(p) = \frac{g}{\omega}\{\theta(p-p') \sum_{\nu=1,2} f_\nu(p)\, W_\nu(p') - \theta(p'-p) \times$$

$$\times \sum_{\nu=3,4} f_\nu(p)\, W_\nu(p') . \qquad /2.16/$$

Легко видеть, что это решение удовлетворяет граничным условиям в нуле и на бесконечности и, следовательно, удовлетворяет интегральному уравнению /2.10/. Действительно, при $p\to\infty$ в /2.16/ остаются первые два члена, которые имеют убывающую на бесконечности асимптотику /2.12/, а при $p \to 0$ в /2.16/ остаются два последних члена, которые регулярны в нуле. Наконец, заметим, что решение граничной задачи в виде /2.16/ вполне однозначно и не зависит от конкретного выбора линейно независимых решений однородного уравнения. Доказательство этого факта элементарно, и мы его опускаем. Таким образом, в этом параграфе доказано существование и единственность решения квазипотенциального уравнения для парциальной амплитуды рассеяния на потенциале отталкивания вида $gr^{-3}$ при $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$. Аналогичным методом можно установить существование решения для квазипотенциалов отталкивания вида $gr^{-2n+1}$. Действительно, в этом случае уравнение /2.4/ сводится к уравнению порядка $2n$, причем $n$ линейно независимых решений имеют убывающую асимптотику

$$f(p) \underset{p\to\infty}{\approx} \exp\left\{-\frac{2n}{2n-3}\, s g^{\frac{1}{2n}} p^{\frac{2n-3}{2n}}\right\}, \qquad /2.17/$$

где $|s|=1$, $\mathrm{Re}\, s > 0$. Кроме того, существует $n$ линейно независимых решений, регулярных в нуле. Решение и в этом случае строится аналогично предыдущему.

## §3. РАЗЛОЖЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ $g$ И $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$

Разложение амплитуды рассеяния при малых значениях константы связи $g$ проще всего получать в том случае, когда решение выражается через хорошо изученные специальные функции. Положим поэтому в уравнении /2.11/ $k = m = 0$ * и построим решения при $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$. Однородное уравнение, соответствующее /2.11/, сводится к уравнению $\left(\delta = x\frac{d}{dx},\ x = gp\right)$

* Поправки при $k \neq 0$, $m \neq 0$ можно вычислять методом возмущений.

$$[\delta-(\ell+3)][\delta-(\ell+1)][\delta-(2-\ell)][(\delta+\ell)f(x)+xf(x)=0 .$$

/3.1 /

Линейно независимые решения уравнения /3.1/ выражаются через функции Мейера /9/ и имеют вид

$$G^{20}_{04}(xe^{\pm i5}|\ell+3,\ell+1,2-\ell,-\ell),\ G^{40}_{04}(xe^{\pm i\pi}|\ell+3,\ell+1,2-\ell,-\ell),$$

/3.2/

причем асимптотика решений /3.2/ при $x\to\infty$ определяется следующими выражениями:

$$G^{40}_{04}(xe^{\pm in})_{x\to\infty}\approx\frac{(2\pi)^{3/2}}{2}(xe^{\pm in})^{9/8}\exp\{-4e^{\pm\frac{i\pi}{4}}x^{1/4}\},$$

$$G^{20}_{04}(xe^{\pm i\pi})_{x\to\infty}\approx\frac{(xe^{\pm 3\pi i})^{9/8}}{2(2\pi)^{1/2}}\times$$

$$\times\exp\{-4e^{\pm\frac{3}{4}\pi i}x^{\frac{1}{4}}\}e^{\pm 2\pi i(1-\ell)}.$$

/3.3/

Поэтому в качестве решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$, убывающих на бесконечности, следует выбрать

$$f_1(x)=G^{40}_{04}(xe^{i\pi}),\quad f_2(x)=G^{40}_{04}(xe^{-i\pi}).$$ /3.4/

Другие два решения, возрастающие на бесконечности и равные

$$f_3(x)=G^{20}_{04}(xe^{i\pi}),\quad f_4(x)=G^{20}_{04}(xe^{-i\pi}),$$ /3.5/

в нуле регулярны, т.е. в окрестности нуля удовлетворяют граничным условиям /2.11а/. Так как все параметры $a_i$ отличаются друг от друга на целое число, в разложении $G^{20}_{04}(xe^{\pm i\pi})$ в нуле появятся члены $x^{\ell+1}$, $x^{\ell+2}$, $x^{\ell+3}$, $x^{\ell+3}\ln x$, но при $\mathrm{Re}\,\ell>0$ все они удовлетворяют граничным условиям /2.11а/ *. Точное поведение

---

* Член $\approx x^{\ell+1}$ удовлетворяет первому граничному условию /2.11а/ тождественно.

$G^{20}_{04}(xe^{\pm i\pi})$ в нуле определяется следующими формулами:

$$G^{20}_{04}(xe^{\pm i\pi}\,|\,\ell+3,\ell+1,2-\ell,-\ell)=[\Gamma(2\ell)\,\Gamma(2+2\ell)]^{-1}\times$$

$$\times(xe^{\pm i\pi})^{\ell+1}-\frac{(xe^{\pm i\pi})^{\ell+2}}{\Gamma(1+2\ell)\,\Gamma(3+2\ell)}+(xe^{\pm i\pi})^{\ell+3}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xe^{\pm i\pi})^n}{n!}\,\frac{\Psi(n,\ell)}{\Gamma(n+3)\,\Gamma(n+2+2\ell)\,\Gamma(n+4+2\ell)}\times$$

$$-(xe^{\pm i\pi})^{\ell+3}\,\ell n\,xe^{\pm i\pi}\,\sum\frac{(xe^{\pm i\pi})^n}{n!}\times$$

$$\times\frac{1}{\Gamma(n+3)\,\Gamma(n+2+2\ell)\,\Gamma(n+4+2\ell)},\qquad /3.6/$$

где $\Psi(n,\ell)=\Psi(n+1)+\Psi(n+3)+\Psi(n+2+2\ell)+\Psi(n+4+2\ell)$.

Поведение $G^{40}_{04}(xe^{\pm i\pi})$ в нуле описывается аналогичными, но более сложными формулами, которые мы опускаем. Отметим только, что в разложении $G^{40}_{04}(xe^{\pm i\pi})$ вблизи нуля содержатся члены вида $\approx g^{\alpha}(\ell n\,g)^{\beta}$, зависящие от значения $\ell$. Таким образом, мы показали, что решения уравнения /3.1/ образуют линейно независимую систему, удовлетворяющую всем граничным условиям в нуле и на бесконечности /2.11а/. Поэтому решение неоднородной задачи /2.11/ при $k=m=0$ дается формулой /2.16/, которая приобретает следующий вид:

$$f_\ell(p,p')=\frac{g}{\omega}\{\theta(p-p')\,[\,W_1(p')\,G^{40}_{04}(ge^{+i\pi})+$$

$$+W_2(p')\,G^{40}_{04}(gpe^{-i\pi})\,]-\theta(p'-p)\times\qquad /3.7/$$

$$\times [\, W_3(p')\, G^{20}_{04}(gpe^{i\pi}) + W_4(p')\, G^{20}_{04}(gpe^{-i\pi}) \,]\}\,,$$

где $\omega$ - детерминант Вронского решений $G^{40}_{04}(xe^{\pm i\pi})$ и $G^{20}_{04}(xe^{\pm i\pi})$, равный постоянной, а $W_\nu(p')^4$, $\nu=1,2,3,4$ - алгебраические дополнения, соответствующие третьей производной каждого решения, получаемые из детерминанта Вронского.

Используя разложение решений вблизи нуля и вычисляя алгебраические дополнения $W_\nu(p')$, получим, что амплитуда $f_\ell(p,p')$ может быть представлена в виде ряда по степеням $g$ и $\ln g$ :

$$f_\ell(p,p') = \sum_{\alpha,\beta}^{\infty} g^{\alpha(\ell)} (\ln g)^{\beta(\ell)} f_\ell^{\alpha(\ell)\beta(\ell)}_{\alpha(\ell)\beta(\ell)}(p,p')\,, \qquad /3.8/$$

где $\max \beta(\ell) < \max \alpha(\ell)$, а $f_\ell^{\alpha(\ell)\beta(\ell)}_{\alpha(\ell)\beta(\ell)}(p,p')$- функции от $p$, $p'$, конкретный вид которых зависит от значения $\ell$. Отсюда можно сделать вывод, что в случае высших угловых моментов решение для парциальной амплитуды рассеяния существует и однозначно и может быть представлено в виде ряда модифицированной теории возмущений, содержащего точки ветвления по константе связи $g$. В этом параграфе мы ставили цель найти решения при $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$, однако убедились, что и дифференциальная краевая задача, и интегральное уравнение имеют единственное решение при $\mathrm{Re}\,\ell > 0$, которое является аналитическим продолжением решения, полученного при $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$. В следующем параграфе мы рассмотрим аналитическое продолжение к $\ell = 0$.

## §4. S - ВОЛНА

Как уже отмечалось выше, ядро интегрального уравнения /2.4/ определено в случае, когда $\mathrm{Re}\,\ell > n - 3/2$ /см. /2.8//. С другой стороны, уравнение /2.11/ для потенциала $V(r) = gr^{-3}$ и граничные условия /2.11а/, полученные при условии $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$, не теряют смысла и для -волны. В работе /4/ исследовалось уравнение Липмана-

Швингера для парциальной амплитуды $f_\ell(p,p')$ вне энергетической поверхности в случае рассеяния на сингулярном неренормируемом потенциале $V(r)=g^2 r^{-4}$. Были доказаны существование и единственность решения и в случае $S$-волны, хотя ядро интегрального уравнения было определено только при $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$. Однако в случае квазипотенциального уравнения, рассматриваемого в данной работе, можно показать, что граничная задача /2.11/-/2.11а/ не имеет решения, хотя и уравнение /2.11/, и граничные условия /2.11а/ имеют смысл и для $S$-волны. Действительно, когда $m=k=0$, однородное уравнение, соответствующее /2.11/, сведется к уравнению

$$(\delta-3)(\delta-1)(\delta-2)\,\delta f(x) + x f(x) = 0 . \qquad /4.1/$$

Линейно независимые решения уравнения /4.1/ выражаются через функции Мейера /9/ и имеют вид

$$G^{10}_{04}(x\,|\,3,1,2,0)\,,\quad G^{20}_{04}(x e^{\pm i\pi}\,|\,3,1,2,0)\,,$$

$$G^{30}_{04}(x\,|\,3,1,2,0)\,,\quad G^{40}_{04}(x e^{\pm i\pi}\,|\,3,1,2,0)\,. \qquad /4.2/$$

В качестве решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$, удовлетворяющих граничным условиям /2.11а/ на бесконечности, выберем $G^{30}_{04}(x)$ и $G^{40}_{04}(x)$, так как асимптотика этих функций определяется следующими выражениями:

$$f_1(x) \equiv G^{30}_{04}(x) \underset{x\to\infty}{\approx} (2\pi)^{1/2} x^{9/8} \exp(-2\sqrt{2}\,x^{1/4}) \times$$

$$\times \sin\left[\,2\sqrt{2}\,x^{1/4} - \frac{9}{8}\pi\right],$$

$$f_2(x) \equiv G^{40}_{04}(x) \underset{x\to\infty}{\approx} (2\pi)^{3/2} x^{9/8} \exp(-2\sqrt{2}\,x^{1/4}) \times$$

$$\times \cos\left[\,2\sqrt{2}\,x^{1/4} - \frac{9}{8}\pi\right], \qquad /4.3/$$

где $G_{04}^{m0}(x) \equiv \frac{1}{2}\left[ G_{04}^{m0}(x e^{+i\pi}) + G_{04}^{m0}(x e^{-i\pi}) \right].$

Поведение двух решений в нуле, $f_3(x)$ и $f_4(x)$, возрастающих на бесконечности, определяется следующими формулами:

$$f_3(x) \equiv G_{04}^{10}(x) - x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!} \frac{1}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(n+3)\,\Gamma(n+4)},$$

$$f_4(x) \equiv G_{04}^{20}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!} \times$$

$$\times \frac{\Psi(n+1) + \Psi(n+2) + \Psi(n+3) + \Psi(n+4)}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(n+3)\,\Gamma(n+4)} -$$

$$- x^3 \ell n\, x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(n+3)\,\Gamma(n+4)}. \qquad /4.4/$$

Таким образом, $f_3(x)$ в нуле удовлетворяет граничным условиям /2.11а/, а $f_4(x)$ не удовлетворяет первому из граничных условий /2.11а/. Нетрудно убедиться, что любое решение, линейно независимое от $f_3(x)$, не удовлетворяет граничным условиям в нуле. Отсюда следует, что краевая задача /2.11/-/2.11а/ для $S$ -волны не имеет решения. Этот результат получен нами при $k = m = 0$. Однако при $m \neq 0$ и $k \neq 0$ члены, нарушающие граничные условия, не изменяются, и поэтому результат сохраняется и в этом случае. Необходимо найти, таким образом, метод построения $f_\ell(p,p')$ и для $S$ -волны. Рассмотрим для этого решение /3.6/, найденное при $\mathrm{Re}\,\ell > 0$, и продолжим его аналитически по $\ell$ до $\ell = 0$. Но аналитически продолженное решение, как это уже отмечалось, не удовлетворяет граничным условиям в нуле, и поэтому их необходимо изменить. Это легко сделать, добавив к первоначальному квазипотенциалу контрчлен. В связи с этим необходимо заметить, что в квазипотенциальной теории /4,7/ квазипотенциал для S-волны определяется с точностью до вычитательного полинома. Предлагаемый метод аналитического продолжения как раз и дает возможность определить явное выражение этого полинома. Соответствующие вычисления удобно выполнить на примере простой модели, правильно передающей поведение точных решений, рассмотренных выше.

## §5. УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ $V(r) = gr^{-2\nu+1}$

Рассмотрим квазипотенциалы несколько более общего вида, а именно, $V(r) = gr^{-2\nu+1}$, где $\nu$ - любое положительное число, удовлетворяющее условию $\nu \geq 1$. Тогда при $\ell + 3/2 - \nu \equiv \epsilon_\ell > 0$ имеет место формула /2.8/, которую мы перепишем в несколько иных обозначениях:

$$V_\ell(p,p') = \frac{g\Gamma(\epsilon_\ell)}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\epsilon_\ell)} \{\theta(p-p') p^{\nu-\frac{1}{2}-\epsilon_\ell} p'^{\nu-\frac{1}{2}+\epsilon_\ell} \times$$

$$\times F(\epsilon_\ell, 1-\nu, \nu+\epsilon_\ell \mid \frac{p'^2}{p^2}) + \theta(p'-p) \times$$

$$\times p^{\nu-\frac{1}{2}+\epsilon_\ell} p'^{\nu-\frac{1}{2}-\epsilon_\ell} F(\epsilon_\ell, 1-\nu, \nu+\epsilon_\ell \mid \frac{p^2}{p'^2})\}. \qquad /5.1/$$

Упрощение достигается тем, что обе гипергеометрические функции в /5.1/ заменяются на единицы. Тогда, вводя обозначение $\mu = \nu - 1/2$, т.е. $V(r) = gr^{-2\mu}$, а также обозначая $g\Gamma(\epsilon_\ell)/2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+\epsilon_\ell) = G^2/2\epsilon_\ell$, получим для квазипотенциала следующее выражение:

$$V_\ell(p,p') = \frac{G^2}{2\epsilon_\ell}\{\theta(p-p')\, p^{\mu-\epsilon_\ell} p'^{\,\mu+\epsilon_\ell} + \theta(p'-p) p^{\mu+\epsilon_\ell} p^{\mu+\epsilon_\ell}\}. \qquad /5.2/$$

**Необходимо отметить, что данное приближение становится точным при $\nu = 1$, т.е. когда рассматривается задача рассеяния на кулоновском потенциале, которая сама по себе представляет значительный интерес и поэтому будет исследована в другой работе, это приближение становится точным также при $\epsilon_\ell = 0$. Интегральное уравнение, соответствующее /2.10/, в этом случае имеет вид**

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') - \frac{G}{2\epsilon}\{\int^{p} p^{\mu-\epsilon_\ell} q^{\mu+\epsilon_\ell} V_q f_\ell(q)\, dq +$$

$$+ \int_{p} p^{\mu+\epsilon_\ell} p^{\mu-\epsilon_\ell} V_q f_\ell(q)\, dq\},$$

**где**

$$V = \frac{-1}{\sqrt{q^2+m^2(k^2-q^2)}}. \qquad /5.3/$$

**Вводя обозначение $\phi = p^{-\mu-\epsilon_\ell} f_{p'}{}^{-\mu-\epsilon_\ell}$ и последовательно дифференцируя уравнение /5.3/, получим дифференциальное уравнение 2-го порядка**

$$\phi''(p) + \frac{1+2\epsilon_\ell}{p}\phi'(p) + \frac{G^2 p^{2\mu-1}\phi(p)}{\sqrt{p^2+m^2(k^2-p^2)}} = -G^2 p^{-1-2\epsilon_\ell}\delta(p-p'). \qquad /5.4/$$

**Подставляя затем уравнение /5.4/ в /5.3/ и проведя интегрирование по частям, получим следующие граничные условия:**

$$p\phi'(p) - 2\epsilon_\ell\, \phi(p) \underset{p\to\infty}{\to} 0, \quad p^{1+2\epsilon_\ell}\phi'(p) \underset{p\to 0}{\to} 0. \qquad /5.4a/$$

Таким образом, для любого потенциала $V(r) = gr^{-2\nu+1}$ получена приближенная граничная задача 2-го порядка, т.е. порядок дифференциального уравнения /5.4/ не зависит от $\nu$. Решения однородного уравнения, соответствующего /5.4/, при $k = m = 0$ имеют вид $(\epsilon_\ell > 0)$

$$\phi_1(p) = p^{-\epsilon_\ell} I_{\frac{\epsilon_\ell}{s}}\left(\frac{G}{s}p^s\right), \quad \phi_2(p) = p^{-\epsilon_\ell} K_{\frac{\epsilon_\ell}{s}}\left(\frac{G}{s}p^s\right),$$

где $s = \mu - 1, \quad \epsilon_\ell = \ell - s, \quad s = \nu - 3/2.$ /5.5/

Легко видеть, что при $\epsilon_\ell \geq 0$ первое из граничных условий /5.4а/ выполняется для $\phi_2(p)$, а второму граничному условию удовлетворяет решение $\phi_1(p)$. При $\epsilon_\ell < 0$ из уравнения /5.4/ следует, что поведение решений в нуле определяется характеристическими корнями $s_1 = 0$, $s_2 = -2\epsilon_\ell > 0$. Поэтому в качестве линейно независимых решений можно взять

$$\phi_1(p) = p^{|\epsilon_\ell|} I_{\left|\frac{\epsilon_\ell}{s}\right|}\left(\frac{G}{s}p^s\right), \quad \phi_2(p) = p^{|\epsilon_\ell|} I_{-\left|\frac{\epsilon_\ell}{s}\right|}\left(\frac{G}{s}p^s\right)$$

/5.6/

/если $\left|\frac{\epsilon_\ell}{s}\right|$ - не целое число/. Решение $p^{|\epsilon_\ell|} I_{-\left|\frac{\epsilon_\ell}{s}\right|}\left(\frac{G}{s}p^s\right)$ является аналитическим продолжением по $\epsilon_\ell$ /т.е. по $\ell$/ решения $p^{-\epsilon_\ell} I_{\frac{\epsilon_\ell}{s}}\left(\frac{G}{s}p\right)$ в область $\epsilon < 0$. Пользуясь принципом аналитического продолжения, получаем в точке $\ell = 0 \left(\frac{\epsilon_\ell}{s} = \frac{\ell}{s} - 1 = -1\right)$ решения

$$\phi_1(p) = p^s I_{-1}\left(\frac{G}{s}p^s\right) \equiv p^s I_1\left(\frac{G}{s}p^s\right), \quad \phi_2(p) = p^s K_1\left(\frac{G}{s}p^s\right),$$

/5.7/

которые тем не менее не удовлетворяют граничному условию /5.4а/ в нуле при $\ell = 0$. Таким образом, решение полученное аналитическим продолжением к точке $\rho = 0$, не удовлетворяет исходному интегральному уравнению, т.е. интегральное уравнение для $S$-волны необходимо видоизменить, введя контрчлен в квазипотенциал $V_0(p,p')$, не изменяющий вида дифференциального уравнения. Тогда контрчлен $V_0^{(c)}(p,p')$ должен удовлетворять следующему уравнению $(\epsilon = -s)$ :

$$V_0^{(c)''}(p) + \frac{1-2s}{p} V_0^{(c)'}(p) = 0 . \qquad /5.8/$$

Учитывая условие симметрии квазипотенциала $V(p,p') = V(p',p)$ и используя /5.8/, получим наиболее общее выражение контрчлена для $S$-волны:

$$V_0^{(c)}(p,p') = c_0 + c_1 (p^{2s} + p'^{2s}) + c\, p^{2s} p'^{2s} . \qquad /5.9/$$

Для того, чтобы получить новые граничные условия, необходимо в исходное интегральное уравнение /5.3/ подставить вместо $V_0(p,p') \to V_0(p,p') + V_0^{(c)}(p,p')$. Эти граничные условия в нуле имеют вид

$$\frac{c_2}{G^2}[p\phi' - 2s\phi] + \left(\frac{c_1}{G^2} - \frac{1}{2s}\right)[p^{1-2s}\phi']_{p\to 0} \longrightarrow 0 ,$$

$$\frac{c_1}{G^2}[p\phi' - 2s\phi] + \frac{c_0}{G^2}[p^{1-2s}\phi']_{p\to 0} \longrightarrow 0 . \qquad /5.10/$$

Подставляя теперь в /5.10/ разложения решений /5.7/, находим значения $c_0$, $c_1$, $c_2$; $c_0 = 0$, $c_1 = G^2/2s$, $c_2$ - произвольно. Этот конечный произвол в амплитуде можно устранить дополнительным требованием, чтобы степень контрчленов не превышала степени исходного взаимодействия. Таким образом, для $V_0^{(c)}(p,p')$ получаем

$$V_0^{(c)}(p,p') = \frac{G^2}{2s}(p^{2s} + p'^{2s}) = -\frac{G}{2\epsilon_0}(p^{-2\epsilon_0} + p'^{-2\epsilon_0}) . \qquad /5.11/$$

Учитывая, что $f_\ell(p,p') = p^{\mu+\epsilon_\ell} \phi_\ell(p,p') p'^{\mu+\epsilon_\ell}$, окончательно получим:

$$V_0^{(c)}(p,p') = -\frac{G^2}{2\epsilon_0}\{p^{\mu-\epsilon_0} p'^{\mu+\epsilon_0} + p^{\mu+\epsilon_0} p'^{\mu-\epsilon_0}\}. \qquad /5.12/$$

Для квазипотенциала $V(r) = gr^{-3}$, т.е. при $\mu = 3/2$, $\epsilon_0 = -\frac{1}{2}$ /5.12/ имеет вид

$$V_0^{(c)}(p,p') = G^2\{p^2 p' + p p'^2\}. \qquad /5.13/$$

Подставляя /5.13/ в точное уравнение /2.10/, можно убедиться, что граничные условия /2.11а/ при $\ell = 0$ приобретают вид

$$p^2 f^{(3)}(p) + 2p f^{(2)}(p) - 2f^{(1)}(p) \xrightarrow[p\to 0]{} 0,$$

$$/5.14/$$

$$p\ f\quad (p) - 3p\ \ f\quad (p) + 6p\,f\quad (p) - 6f(p) \xrightarrow[p\to 0]{} 0.$$

Аналитически продолженное решение /3.6/ до $\ell = 0$ удовлетворяет граничным условиям /5.14/, т.е. /5.13/ является искомым контрчленом для точного квазипотенциального уравнения с потенциалом $V(r) = gr^{-3}$. На примере квазипотенциала $V(r) = gr^{-3}$, рассмотренного в предыдущих параграфах, легко показать, что приближение, описанное в этом пункте, правильно передает поведение точных решений и вполне оправданно, если нас не интересуют большие значения $p, p'$. Простой анализ, аналогичный вышеописанному, показывает, что в случае обычного потенциала добавлять контрчлен не надо. Можно аналитически продолжить само интегральное уравнение до точки $\ell = 0$, при этом интегральное уравнение остается эквивалентным дифференциальной краевой задаче. Необходимость вводить контрчлены в $S$-волну, связана, по-видимому, с релятивистским характером квазипотенциального уравнения. В заключение заметим, что, пользуясь данным приближением для обычного потенциала

$V(r) = g^2 r^{-4}$; можно получить для длины рассеяния значение, совпадающее с результатом работы /6/.

## §6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем в заключение полученные выше основные результаты. Мы показали, что интегральное квазипотенциальное уравнение для парциальных амплитуд рассеяния в случае потенциалов ввда $V(r) = g r^{-2n+1}$ $(n=1,2...)$ можно свести к достаточно простому дифференциальному уравнению порядка $2n$ с определенными граничными условиями в нуле и на бесконечности, и провели подробное исследование для простейшего неренормируемого потенциала $V(r) = g r^{-3}$. В последнем случае доказаны существование и единственность решения при $\mathrm{Re}\,\ell > 0$, а решение при $\ell = 0$ получено аналитвческим продолжением по $\ell$. При этом оказалось, что найденная таким способом $S$-волна удовлетворяет интегральному уравнению, в котором к потенциалу $V_0(p,p')$, полученному аналитическим продолжением из области $\mathrm{Re}\,\ell > 1/2$ к точке $\ell = 0$, добавляется определенный полином по $p$ и $p'$. Этот рецепт имеет ту же природу, что и добавление контрчленов в лагранжианы взаимодействия в квантовых теориях поля. Преобразование Фурье потенциала $V(r) = g r^{-3}$ определяется логарифмически расходящимся при $r \to 0$ интегралом /2.2/, и регуляризация этого интеграла сводится к вычитанию бесконечной $S$-волны. Мы показали, что, наложив на амплитуду рассеяния условие аналитичности по $\ell$, можно зафиксировать вид потенциала при $\ell = 0$, $r = 0$ и тем самым определить $g r^{-3}$ как обобщенную функцию $r$ и в точке $r = 0$. Остающийся при этом конечный произвол фиксируется, как и в квантовой теории поля /10/, условием минимальности степени полинома по $p$ и $p'$.

Исследование квазипотенциалов с $n > 2$ и с нецелыми $n$ значительно сложнее, и мы ограничились в этом случае изучением приближенной /или модельной/ задачи, сводящейся к дифференциальному уравнению второго порядка /см §5/. Напомним, что при $n=1$ к уравнению второго порядка сводится точное квазипотенциальное уравнение, которое мы намерены детально рассмотреть в другой работе. Такое уравнение представляет интерес с точки зрения исследования амплитуды рассеяния в конформно-инвариантных теориях поля с аномальными размерностями /нормальной размерности в теории с безразмерной константой связи соответствует потенциал $V(r) = gr^{-2}$ /.

В этой работе достаточно подробно обсуждалось лишь уравнение при $k = m = 0$. При $k \neq 0$, $m \neq 0$ можно использовать теорию возмущений, основанную на известных при $k = 0$, $m = 0$ точных решениях, или же непосредственно решать дифференциальное уравнение методом ВКБ. Достаточно простые аналитические результаты можно надеяться получить в этом случае лишь при $n = 1$.

Рассмотренный в данной работе метод исследования амплитуды рассеяния допускает различные обобщения. Его, например, можно применять для построения решений уравнений Бете-Солпитера, Эдвардса, линеаризованных уравнений для одночастичных функций Грина и т.п. Все, что необходимо, - это возможность представить ядро в виде /2.7/, где $f_i$ - достаточно простые функции. Эти функции не обязательно должны быть полиномами. Например, если в /2.7/ $M = N = 1$ и $f_i$ / $i = 1,2,3,4$/ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка $f''(p) = R(p)\, f(p)$, где $R(p)$ - рациональная функция $p$, то для $f_\ell(p,p')$ можно получить дифференциальное уравнение второго порядка с рациональными /если забыть о $\sqrt{p^2+m^2}$/ коэффициентами /см., например, /11/.

В заключение авторам приятно выразить свою благодарность Б.А.Арбузову, В.Г.Кадышевскому, В.А.Матвееву, Р.М.Мурадяну, А.Н.Тавхелидзе. Один из нас /В.Ш.Г./благодарит В.Р.Гарсеванишвили, А.Н.Квинихидзе, А.А.Хелашвили за обсуждение свойств квазипотенциального уравнения.

*Литература*


1. T.D.Lee. Phys.Rev., 128, 899 (1962);
S.Bernstein and T.D.Lee. Phys.Rev.Lett., 11, 512 (1963).
2. S.Okubo. Progr.Theor.Phys., 11, 80 (1954);
Б.А.Арбузов, Н.М.Атакишиев, А.Т.Филиппов. ЯФ, 7, 690 /1968/; 8, 385 /1968/;
M.K.Volkov. Ann.Phys. (N.Y.), 49, 202 (1968).
3. G.Feinberg, A.Pais. Phys.Rev., 131, 2724 (1963);
133, B477 (1964).
4. B.A.Arbuzov, A.T.Filippov. Phys.Lett., 13, 95 (1964);
R.Sawyer. Phys.Rev., 134, B448 (1964);
B.A.Arbuzov, A.T.Filippov. Nuovo Cim., 38, 796 (1965);
G.Furlan, G.Mahoux. Nuovo Cim., 36, 215 (1965);
Б.С.Гетманов, А.Т.Филиппов. ТМФ, 8, 3 /1971/.
5. A.T.Filippov. Proc.Top.Conf.Weak Int., Preprint CERN, 69-7, Geneva, 1965.
6. N.N.Khuri, A.Pais. Rev.Mod.Phys., 36, 590 (1964);
A.Pais, T.T.Wu. Phys.Rev., 134, 1303 (1964);
A.Bastai et al., Nuovo Cim., 30, 1512 (1963); 30, 1532 (1963).
7. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29, 380 (1963).
8. А.Т.Филиппов. Сб. "Нелокальные и нелинейные неренормируемые теории поля," стр. 209-220, ОИЯИ, 2-5400, Дубна, 1970;
A.T.Filippov. Phys.Lett., 8, 78 (1964);
В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов, ЯФ, 15, 1294 /1972/;
В.Ш.Гогохия. Препринт ОИЯИ, Р2-6687, Дубна, 1972;
В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов. Препринт ОИЯИ, Р2-7142, Дубна, 1973.
9. Y.L.Luke. The Special Functions and their Approximations, v. I, Academic Press, New-York, London, 1969.
10. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Москва, ГИТТЛ, 1957.
11. A.T.Filippov. Preprint JINR, E2-6937, Dubna (1973).
А.Т.Филиппов. Сб. "Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля," стр. 133-153, ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973.



*Рукопись поступила в издательский отдел 24 октября 1973 года.*