

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С 32У.15  
А-646

ЛЯП

P2 - 7502

92/4-74

Н.Ангелов, А.Атанасов, В.Гарсеванишвили,  
А.Матвеевко

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ  $\rho$ -РЕЗОНАНСА  
В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ  $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

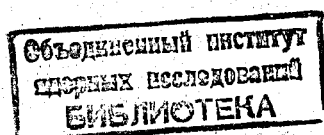
**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7502

Н.Ангелов, А.Атанасов, В.Гарсеванишвили,  
А.Матвеевко

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ  $\rho$ -РЕЗОНАНСА  
В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ  $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



Существующие методы описания связанных и резонансных состояний в квантовой теории поля всегда включают частичное суммирование ряда теории возмущений. Поскольку суммирование является приближенным, то результат может оказаться сильно зависящим от выбранного метода суммирования. В последнее время интенсивно обсуждался метод паде-аппроксимаций в связи с описанием резонансных состояний в различных теоретико-полевых моделях /см., например, обзор<sup>1</sup> и цитированную в нем литературу/. Из других методов описания связанных состояний в квантовой теории поля наиболее привлекателен метод динамических уравнений /уравнение Бете-Солпитера<sup>2</sup>, квазипотенциальные уравнения<sup>3-5</sup>/. Не останавливаясь на трудностях, связанных с уравнением Бете-Солпитера, напомним, что квазипотенциальный подход, предложенный Логуновым и Тавхелидзе<sup>3</sup>, с успехом был применен для описания энергетических уровней позитрония и водородоподобных атомов<sup>6</sup>. Здесь мы будем пользоваться вариантом локального квазипотенциального подхода, предложенного Годоровым<sup>5</sup>/см. также<sup>7</sup>, где локальное квазипотенциальное уравнение применяется к описанию связанных состояний в скалярной электродинамике/.

В настоящей заметке делается попытка описания  $\rho$ -резонанса в рамках теоретико-полевой модели с простейшим лагранжианом взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = \left(-\frac{g}{4}\right) :(\phi\phi)^2: \quad /1/$$

Мы увидим, что лагранжиан /1/ не приводит к удовлетворительным результатам при описании  $\rho$ -резонанса в  $\pi\pi$ -системе. Отметим, что такая же ситуация имеет

место при использовании метода Паде, где лишь привлечение более сложных моделей позволяет получить разумное согласие с опытом.

Первая трудность, возникающая при применении квазипотенциального метода к  $\pi\pi$ -рассеянию с лагранжианом /1/, состоит в том, что непосредственный расчет по теории возмущений приводит к сильно сингулярному потенциалу притяжения. Чтобы регуляризовать квазипотенциал, применяется метод паде-аппроксимаций к разложению квазипотенциала в ряд по передаче импульса. /Такой прием был предложен Кратером/. В итоге возникает  $\rho$ -мезонный резонанс, однако его ширина сильно отличается от наблюдаемого значения, а положение очень чувствительно к значению константы связи.

Перейдем к последовательному изложению этих результатов. Выпишем уравнение для волновой функции связанного состояния двух скалярных частиц равных масс в этом подходе:

$$(\nabla^2 + \vec{p}^2)\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}). \quad /2/$$

Здесь  $\vec{p}$  - относительный импульс двух частиц в с.ц.м.,  $m$  - масса \*,  $V(\vec{r})$  - квазипотенциал.  $V(\vec{r})$  строится по известным правилам /3,5/, если известен ряд теорий возмущений для амплитуды рассеяния.

Следуя этим правилам, построим квазипотенциал, описывающий  $\rho$ -волновое взаимодействие, из диаграмм теории возмущений, приведенных на рис. 1.

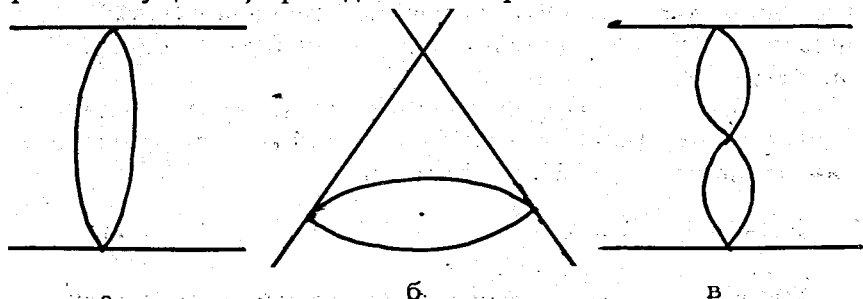


Рис. 1

\* В дальнейшем мы будем работать в системе единиц, где  $\hbar=c=m=1$ .

Можно показать, что вклады в квазипотенциал от всех трех приведенных диаграмм представимы в виде

$$\int_4^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda} r}}{r} \sigma(\lambda) d\lambda, \quad /3/$$

где спектральные плоскости  $\sigma(\lambda)$  различны для различных диаграмм.

Конкретный анализ выражений для  $\sigma(\lambda)$  в рассматриваемом случае показывает, что в области малых  $r$  мы имеем дело с сильно сингулярным взаимодействием притяжения \*. В частности, вклад от диаграммы рис. 1а ведет себя при  $r \rightarrow 0$ , как  $(-r^{-3})$ , а вклады от диаграмм рис. 1б и 1в - как  $\ln r/r^3$ .

Поскольку последовательные методы работы с такого рода потенциалами неизвестны, мы, следуя Кратеру, будем строить паде-аппроксимации по константе связи для амплитуды рассеяния, а затем при переходе к координатному представлению будем пользоваться паде-аппроксимацией по переданному импульсу.

Обозначим вклады в амплитуду рассеяния от диаграмм рис. 1а, 1б, 1в через  $T^{(2)}(\vec{\Delta})$ ,  $T^{(3)}(\vec{\Delta})$  и  $T^{(3)}(\vec{\Delta})$  соответственно /  $\vec{\Delta}$  - переданный импульс / и выпишем их в явном виде:

$$T^{(2)}(\vec{\Delta}) = \left(-\frac{g}{4}\right)^2 \vec{\Delta}^2 f^{(2)}(\vec{\Delta}), \quad /4а/$$

$$T_1^{(3)}(\vec{\Delta}) = \left(-\frac{g}{4}\right)^3 \vec{\Delta}^2 f_1^{(3)}(\vec{\Delta}), \quad /4б/$$

$$T_2^{(3)}(\vec{\Delta}) = \left(-\frac{g}{4}\right)^3 (\vec{\Delta}^2)^2 f_2^{(3)}(\vec{\Delta}), \quad /4в/$$

где

$$f^{(2)}(\vec{\Delta}) = -144\pi \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda+\vec{\Delta}^2)}, \quad /5а/$$

\* См., также работы /8,9/.

$$f_1^{(3)}(\vec{\Delta}) = \frac{216}{\pi} \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda+\vec{\Delta}^2)} \int_4^\infty \ln \left[ e^{-\frac{\sqrt{\lambda'-4}}{\lambda'^3}} \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{\lambda'}{\lambda'+\lambda-4} \right| \sqrt{\frac{\lambda'-4}{\lambda'(\lambda-4)^2}} \right] d\lambda', \quad /56/$$

$$f_2^{(3)}(\vec{\Delta}) = \frac{108}{\pi} \left[ \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda+\vec{\Delta}^2)} \right]^2. \quad /5в/$$

Отметим, что вычитания, введенные для устранения расходимостей, возникающих от диаграмм рис. 1, проведены в точках  $t_0 = s_0 = 0$ .

$\rightarrow [1,1]$  - паде-аппроксимация по константе связи для  $T(\vec{\Delta})$  выглядит следующим образом:

$$T_{g, \vec{\Delta}^2}^{[1,1]}(\vec{\Delta}) = \left(-\frac{g}{4}\right)^2 \vec{\Delta}^2 \frac{f^{(2)}(\vec{\Delta})}{1 - \left(-\frac{g}{4}\right) \frac{f_1^{(3)}(\vec{\Delta}) + \vec{\Delta}^2 f_2^{(3)}(\vec{\Delta})}{f^{(2)}(\vec{\Delta})}}. \quad /6/$$

Определим квазипотенциал  $V(\vec{r})$ , необходимый для дальнейших расчетов:

$$V(\vec{r}) = \int d\vec{\Delta} e^{i\vec{r}\vec{\Delta}} V(\vec{\Delta}) = - \int d\vec{\Delta} e^{i\vec{r}\vec{\Delta}} T(\vec{\Delta}). \quad /7/$$

Для взятия интеграла в формуле /7/ с  $T(\vec{\Delta})$  в виде /6/ будем пользоваться  $[1,1]$  - паде-аппроксимацией для  $T(\vec{\Delta})$  по  $\vec{\Delta}^2$ . Она имеет вид

$$T_{g, \vec{\Delta}^2}^{[1,1]}(\vec{\Delta}) = - \left(-\frac{g}{4}\right)^2 \frac{a_0^2 \vec{\Delta}^2}{a_1 \vec{\Delta}^2 - \frac{a_0}{a_1}}. \quad /8/$$

Здесь  $a_0 = \frac{f^{(2)}}{f^{(2)} - \left(-\frac{g}{4}\right) f_1^{(3)}}, \quad /9а/$

$$a_1 = \frac{2f^{(2)} f_1^{(2)} [f^{(2)} - \left(-\frac{g}{4}\right) f_1^{(3)}] - [f^{(2)}]^2 \{f_1^{(2)} - \left(-\frac{g}{4}\right) [f_1^{(3)} + f_2^{(3)}]\}}{[f^{(2)} - \left(-\frac{g}{4}\right) f_1^{(3)}]^2}, \quad /9б/$$

$$f^{(2)} = -144\pi \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \quad /10а/$$

$$f_1^{(2)} = 144\pi \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda^3}, \quad /10б/$$

$$f_1^{(3)} = \frac{216}{\pi} \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_4^\infty \ln \left[ e^{-\frac{\sqrt{\lambda'-4}}{\lambda'^3}} \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{\lambda'}{\lambda'+\lambda-4} \right| \sqrt{\frac{\lambda'-4}{\lambda'(\lambda-4)^2}} \right] d\lambda', \quad /10в/$$

$$f_1^{(3)} = -\frac{216}{\pi} \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \int_4^\infty \ln \left[ e^{-\frac{\sqrt{\lambda'-4}}{\lambda'^3}} \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{\lambda'}{\lambda'+\lambda-4} \right| \sqrt{\frac{\lambda'-4}{\lambda'(\lambda-4)^2}} \right] d\lambda', \quad /10г/$$

$$f_2^{(3)} = \frac{108}{\pi} \left[ \int_4^\infty \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right]^2. \quad /10д/$$

Приведем численные значения величин, входящих в выражение для  $T_{[1,1]}^{fg, \Delta^2}$ :

$$f^{(2)} = -75,5; \quad f_1^{(2)} = 7,55; \quad /11/$$

$$f_1^{(3)} = 7,36; \quad f_1^{(3)} = -0,332; \quad f_2^{(3)} = 0,960.$$

В результате взятия интеграла в формуле /11/ для  $V(\vec{r})$  получим следующее выражение:

$$V(\vec{r}) = 2\pi^2 a_0 \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2 \left(-\frac{g}{4}\right)^2 \frac{e^{-\sqrt{-\frac{a_0}{a_1}} r}}{r}. \quad /12/$$

Будем решать уравнение /2/ с квазипотенциалом /12/ методом фазовых функций /10,11/. \* Уравнение для фазовой функции  $\delta_\ell(r, p)$ , соответствующее уравнению /2/, имеет вид:

$$\frac{d}{dr} \delta_\ell(r, p) = - \frac{1}{4p \sqrt{p^2 + 1}} V(r) [\cos \delta_\ell(r, p) j_\ell(pr) - \sin \delta_\ell(r, p) n_\ell(pr)]^2, \quad /13/$$

где

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\ell+1/2}(x) \quad \text{и} \quad n_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_{\ell+1/2}(x) -$$

сферические функции Бесселя и Неймана соответственно. Фазы рассеяния  $\delta_\ell(p)$  определяется следующим образом:

$$\delta_\ell(p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \delta_\ell(r, p). \quad /14/$$

\* В последнее время метод фазовых функций интенсивно разрабатывался в работах /12-14/.

Анализ решения уравнения /13/ для  $\ell=1$  показывает, что наблюдаемое на эксперименте значение массы  $\rho$ -мезона /  $m_\rho = 765 \text{ Мэв}$  / получается при  $g=0,1159$  и результат чувствителен к малым изменениям  $g$ . Изменение  $g$  в третьем знаке после запятой приводит в области резонанса к изменению фазы во втором знаке после запятой. При данном значении  $g$  ширина резонанса получается в 5-6 раз больше экспериментального значения.

Приведенное рассмотрение еще раз свидетельствует о нереалистичности модели с четырехпионным взаимодействием /см. в этой связи, например, /1,15,16/ /.

Авторы искренне признательны **В.В.Бабикову**, **А.В.Ефремову**, **А.Н.Квинихидзе**, **В.А.Матвееву**, **Р.М.Мир-Касимову**, **В.Н.Первушину**, **В.А.Ризову**, **А.Н.Тавхелидзе**, **А.Т.Филиппову**, **Д.В.Ширкову** за обсуждение затронутых здесь вопросов. Особую благодарность выражают авторы **И.Т.Тодорову** за интерес к работе, многочисленные обсуждения и советы.

#### Литература

1. J.L.Basdevant. CERN-preprint TH. 1441 (1971).
2. H.Bethe, E.Salpeter. Phys.Rev., 84, 1232 (1951).
3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
4. V.G.Kadushevsky. Nucl.Phys., B6, 125 (1968).
5. I.T.Todorov. Phys.Rev., D3, 2351 (1971).
6. Р.Н.Фаустов. Лекции в Международной зимней школе по теоретической физике. Дубна, 1964.  
Р.Н.Фаустов. ЭЧАЯ, т. 3, стр. 238, Атомиздат, М., 1972.
7. В.Б.Крапчев, В.А.Ризов, И.Т.Тодоров. Сообщение ОИЯИ, P2-7311, Дубна, 1973.
8. Б.А.Арбузов, А.Т.Филиппов, О.А.Хрусталева. Доклад на XII Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964. Атомиздат, М., 1966.
9. А.Т.Филиппов. Лекции в Международной зимней школе по теоретической физике, Дубна, 1964.
10. F.Calogero. Variable Phase Approach to Potential Scattering. Acad. Press, New York, 1967.
11. В.В.Бабиков. Метод фазовых функций в квантовой механике. Наука, Москва, 1968.
12. V.V.Babikov, R.M.Mir-Kasimov. Phys.Lett., 31B, 415 (1970).

13. В.В.Бабилов, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Шульгина. Сообщение ОИЯИ, P2-6828, P2-6829, Дубна, 1972.
14. И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев. Сообщение ОИЯИ, P4-7105, Дубна, 1973.
15. Д.В.Ширков, В.В.Серебряков, В.А.Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. Наука, М., 1967.
16. В.Р.Гарсеванишвили, Д.В.Ширков. Лекции в Школе по физике высоких энергий, Сухуми, 1972. Дубна, P2-6867.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 октября 1973 года.