СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7484

В.Гарчински

ПРОСТЕЙШИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7484

В.Гарчински*

ПРОСТЕЙШИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

* Постоянный адрес: Институт теоретической физики Вроцлавского университета, Вроцлав, Польша.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей, второй, части работы мы рассматриваем простейшие точно решаемые смешанные задачи для уравнений Шредингера. При этом граничные условия выбираются согласно предписаниям, установленным в первой части работы, см. [1]. Естественно, обозначения, применяемые нами, такие же, как и в первой части работы, к которой отсылаем читателя за всякими справками и разъяснениями относительно встречающихся терминов и символов.

В конце работы, в Приложении, дается краткое описание одномерных псевдопроцессов в терминах интегральных стохастических уравнений.

2. СВОБОДНАЯ ЧАСТИЦА НА ПОЛУПРЯМОЙ

В качестве простейшего примера квантовомеханической задачи с границей рассмотрим свободное движение частицы с массой m на положительной полупрямой. В этом случае имеем

$$X = [0, \infty), \quad a = c = 0, \quad b = \frac{i\hbar}{m}. \qquad /2.1/$$

Допустим, что в единственной граничной точке выполняется условие a/ - условие поглощения. Тогда амплитуда $(t;y,x)$ определяется из решения задачи

$$[\partial_t - \frac{i\hbar}{2m}\partial_y^2](t;y,x) = 0,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}(t;y,x) = \delta(y-x),$$

$$\lim_{y\downarrow 0}\partial_y^2(t;y,x) = 0. \qquad /2.2/$$

Нетрудно убедиться, что решение имеет вид[2,3]

$$(t;y,x)_{-} = (t;y,x)_0 - (t;-y,x)_0 \quad , \qquad /2.3/$$

где

$$(t;y,x)_0 = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t} \right)^{1/2} \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar t} (y-x)^2 \right\} \qquad /2.4/$$

является амплитудой свободного движения на всей прямой. Непосредственно видно, что выполняется также условие исчезновения в граничной точке

$$\lim_{y \downarrow 0} (t;y,x)=0. \qquad /2.5/$$

Более того, вследствие соблюдения условий /3.23.1/* обратимости псевдопроцесса выполняются одновременно условия десорбции:

$$\lim_{x \downarrow 0} \partial_x^2 (t;y,x) =0, \qquad /2.6/$$

и условие порождения в граничной точке:

$$\lim_{x \downarrow 0}(t;y,x) = 0 . \qquad /2.7/$$

Следовательно, в этом случае имеем дело со своеобразным балансом. Вероятность обнаружить частицу на полупрямой остается неизменной, несмотря на возможные процессы, происходящие в граничной точке.

Другого рода решение, описывающее свободную частицу на полупрямой, получается, если потребовать исчезновения производной амплитуды, что соответствует условию мгновенного отражения от границы. В этом случае решение имеет вид[3]

$$(t;y,x)_{+} = (t;y,x)_0 + (t;-y,x)_0 \quad . \qquad /2.8/$$

---

* Здесь и в дальнейшем так обозначаются формулы работы /1/.

3. СВОБОДНАЯ ЧАСТИЦА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Пусть $X = [r, r']$ - конечный интервал на прямой. В этом случае граница состоит из двух точек, в которых могут выполняться различные условия. Рассмотрим два случая, когда обе точки r, r' являются поглощающими, а затем - когда они являются отражающими. Амплитуду перехода, отвечающую поглощению на концах, находим из условий

$$\partial_t (t;y,x)_- = \frac{i\hbar}{2m} \partial_y^2 (t;y,x)_- \ ,$$

$$\lim_{y\downarrow r} \partial_y^2 (t;y,x)_- = \lim_{y\downarrow r'} \partial_y^2 (t;y,x)_- = 0 ,$$

$$\lim_{t\downarrow 0} (t;y,x)_- = \delta(y-x) \ . \qquad /3.1/$$

Решение ищем методом Фурье, полагая, что оно имеет вид

$$(t;y,x)_- = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(y)\psi_n(x)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t\right], \qquad /3.2/$$

где соответственно функции $\psi_n(y)$ удовлетворяют условиям

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_y^2\psi_n(y) = \epsilon_n\psi_n(y),$$

$$\lim_{y\to r}\psi_n(y) = \lim_{y\to r'}\psi_n(y) = 0, \quad n = 1,2,\dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(y)\psi_n(x) = \delta(y-x), \quad y, x \in [r, r']. \qquad /3.3/$$

Отсюда получаем окончательно следующее выражение для амплитуды и энергетического спектра:

$$(t;y,x)_- = \frac{2}{r'-r}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi\frac{y-r}{r'-r}\right)\sin\left(n\pi\frac{x-r}{r'-r}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t\right), \qquad /3.4/$$

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{r'-r}\right)^2, \quad n = 1,2,\ldots \qquad /3.5/$$

Если же в граничных точках выполняются условия мгновенного отражения

$$\lim_{y\to r}\partial_y(t;y,x)_+ = \lim_{y\to r'}\partial_y(t;y,x)_+ = 0, \qquad /3.6/$$

то решение соответствующей задачи для свободного уравнения Шредингера следующее:

$$(t;y,x)_+ = \frac{1}{r'-r} + \frac{2}{r'-r}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\pi\frac{y-r}{r'-r}\right)\times$$
$$\times\cos\left(n\pi\frac{x-r}{r'-r}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t\right), \qquad /3.7/$$

где ϵ_n дано формулой /3.5/. Видно, что в этом случае появляется дополнительно состояние с нулевой энергией, отвечающее первому постоянному члену разложения амплитуды. Можно получить другие выражения для амплитуд $(t;y,x)_\pm$, пользуясь методом отражений, как в предыдущей задаче с одной граничной точкой. Именно, предполагая, что движение происходит в интервале $[0, a]$, что не ограничивает общности рассмотрения, можем написать:

$$(t;y,x)_\mp = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(t,y+2na,x)_0 \mp (t;-y-2na,x)_0 , \qquad /3.8/$$

где ноликом, как и раньше, обозначены амплитуды свободного движения на всей прямой. С помощью формулы суммирования Пуассона [4]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi(\zeta+2n\lambda) = \frac{\pi}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)e^{in\zeta\frac{\pi}{\lambda}},$$
$$\phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\zeta x}dx, \qquad /3.9/$$

амплитуды эти сводятся к прежнему виду /смотри формулы /3.4/ и /3.15/, в которых положено $r=0$, $r'=a$ /. Отметим, что амплитуды, описывающие свободную частицу в трехмерном полупространстве, $X=\{y_3>0\}$, или в плоском слое, $X=\{r\le y_3\le r'\}$, имеют вид

$$(t;\vec{y},\vec{x})_\mp = (t;y_1,x_1)_0(t;y_2,x_2)_0(t;y_3,x_3)_\mp ,$$

где в качестве последнего множителя взяты соответственно амплитуды /2.3/, /2.8/ или /3.4/, /3.7/.

4. *ЧАСТИЦА НА ПОЛУПРЯМОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ*

В этом случае $X = [0, \infty)$ и коэффициенты

$$a=0,\ b = \frac{i\hbar}{m},\ c(y) = \frac{m\omega^2 y^2}{2i\hbar} \qquad /4.1/$$

удовлетворяют условиям обратимости /3.24.1/. Решение смешанной задачи с условием поглощения или равносильным ему условием исчезновения частицы в граничной точке

$$\partial_t(t;y,x)_- = \left[\frac{i\hbar}{2m}\partial_y^2 + \frac{\hbar\omega^2 y^2}{2i\hbar}\right](t;y,x)_-,$$

$$\lim_{t\downarrow 0}(t;y,x)_- = \delta(y-x),$$

$$\lim_{y\downarrow 0}(t;y,x)_- = 0 \qquad /4.2/$$

дается формулой

$$(t;y,x)_- = (t;y,x)_\omega - (t;-y,x)_\omega,$$

где $(t;y,x)_\omega$ является амплитудой гармонического осциллятора [3,5]

$$(t;y,x)_\omega = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega t}[(x^2+y^2)\cos\omega t-2xy]\right\}. \qquad /4.3/$$

Решение это описывает движение частицы в потенциале

$$V(y) = \begin{cases} \infty, & y = 0, \\ \frac{m\omega^2 y^2}{2}, & y > 0. \end{cases} \qquad /4.4/$$

Если же наложить условие мгновенного отражения в нуле,

$$\lim_{y\downarrow 0}(t;y,x)_+ = 0, \qquad /4.5/$$

то мы получим аналогично прежнему:

$$(t;y,x)_+ = (t;y,x)_\omega + (t;-y,x)_\omega \quad . \qquad /4.6/$$

Пользуясь известным разложением амплитуды гармонического осциллятора по полиномам Эрмита, можем написать соответствующие разложения для амплитуд:

$$(t;y,x)_- = 2\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}(y)\,u_{2n+1}(x)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_{2n+1}\,t\right\} =$$

$$= -2i\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\omega xy}{\hbar\sin\omega t}\right)\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega t}(x^2+y^2)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\omega t\right\}, \qquad /4.7/$$

$$(t;y,x)_+ = 2\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(y)\,u_{2n}(x)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_{2n}\,t\right\}$$

$$= 2\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}\right)^{1/2}\cos\left(\frac{m\omega x y}{\hbar\sin\omega t}\right)\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega t}(x^2+y^2)\cos\omega t\right\},$$

$$/4.8/$$

где

$$u_n(x) = \frac{H_n(x\sqrt{a})}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\frac{\pi}{a}}}}\,e^{-\frac{ax^2}{2}}, \qquad a = \frac{m\omega}{\hbar},$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2},$$

$$\epsilon_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,\ldots \qquad /4.9/$$

Видно, что расстояние между энергетическими уровнями вдвое больше, чем для гармонического осциллятора.

5. ЧАСТИЦА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ДВИЖУЩАЯСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим трехмерное полупространство $X=\{y_3 \geq 0\}$, в котором действует постоянное магнитное поле, направленное по третьей оси. Решения смешанных задач

$$\partial_t (t;\vec{y},\vec{x})_{\mp} = \left[\frac{i\hbar}{2m}\Delta_y + \frac{\omega}{2}(y_2\partial_1 - y_1\partial_2) + \frac{m\omega^2}{8ih}(y_1^2+y_2^2)\right](t;\vec{y},\vec{x})_{\mp},$$

$$\lim_{t\downarrow 0} (t;y,x)_{\mp} = \delta(y-x),$$

$$\lim_{y\downarrow 0} (t;y,x)_{-} = 0, \quad \lim_{y\downarrow 0} \partial_3 (t;y,x)_{+} = 0 \qquad /5.1/$$

имеют вид [6,9]

$$(t;\vec{y},\vec{x})_{\mp} = (t;y_1,y_2;x_1,x_2)_{\mathcal{H}}\,(t;y_3,x_3)_{\mp}, \qquad /5.2/$$

где амплитуды $(t;y_3,x_3)_{\mp}$ описывают свободное движение по третьей полуоси и даны формулами /2.3/ и /2.8/. Амплитуда $(t;y_1,y_2;x_1,x_2)_{\mathcal{H}}$ описывает движение заряженной частицы с зарядом e и массой m в плоскости /1,2/ под действием магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}=\mathcal{H}\vec{e}_3$:

$$(t;y_1,y_2;x_1,x_2)_{\mathcal{H}} = \frac{m}{2\pi i\hbar t}\,\frac{\frac{\omega t}{2}}{\sin\frac{\omega t}{2}}\exp\frac{im}{2\hbar}\left\{\frac{\omega}{2}\operatorname{ctg}\frac{\omega t}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]+\omega(y_1x_2-y_2x_1)\right\}, \qquad /5.3/$$

где $\qquad \omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$.

6. ЧАСТИЦА В ПЛОСКОМ СЛОЕ, ДВИЖУЩАЯСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В этом случае $X=\{0\leq y_3\leq a\}$ представляет собой плоский слой, расположенный перпендикулярно к направлению магнитного поля. Решение этой задачи с дополнительными условиями в точках $y_3 = 0$, $y_3 = a$ дается формулами

$$(t;\ \vec{y},\vec{x})_{\mp} = (t; y_1, y_2; x_1, x_2) \Big\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t; y_3 + 2na, x_3)_0 \mp \qquad /5.4/$$

$$\mp (t; -y_3 - 2na, x_3)_0 \Big\},$$

где, как прежде, знак плюс относится к решению, удовлетворяющему условиям мгновенного отражения от плоскостей $y_3 = 0$, $y_3 = a$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из вышесказанного видно, что формализм случайных псевдопроцессов является удобным для описания квантовомеханических задач с границами. Возможные граничные условия для уравнений Шредингера и их толкование на языке траекторий, естественно следуют из формул вероятностного типа /2.21.1/ и /3.9.1/ для генераторов псевдопроцессов.

Практическая ценность рассмотренных простых примеров не столь ясна. Можно, однако, полагать, что решения, отвечающие условиям мгновенного отражения на границе, найдут применение в теоретическом описании движения электронов в тонких пленках и вообще везде там, где многократными отражениями от границы нельзя пренебречь /6/. Аналогичные граничные задачи возникают в теории волноводов и дифракции электромагнитных волн /7/.

Отметим, что возможен другой переход к граничным задачам для уравнений Шредингера, основанный на изучении траекторий псевдопроцессов. Он вполне аналогичен аппарату интегральных стохастических уравнений в теории марковских процессов /8,9/ и по этой причине лишь кратко намечен в приложении. Отметим также, что в монографии /10/ развивается аналитический подход к граничным задачам для уравнений типа Шредингера.

В заключение автор желает поблагодарить В.А.Мещерякова за оказанное ему гостеприимство и Л.Г.Заста-

венко за дискуссии и помощь при подготовке статьи к печати.

ПРИЛОЖЕНИЕ

По аналогии с теорией диффузионных процессов рассмотрим с помощью стохастических интегральных уравнений одномерный псевдопроцесс на интервале $[0,1]$, концы которого являются поглощающими. Отметим, что к этому случаю сводится общий случай движения в интервале с подвижными концами [9]. Основное интегральное уравнение, определяющее поведение псевдопроцесса в случае поглощающей границы имеет вид

$$x(t) = x(s) = \int_s^t \rho\,[\tau, x(\tau)]\,d\tau + \int_s^t \chi_{(0,1)}(x(\tau))\,dz(\tau), \qquad /П.1/$$

$$0 < x(\tau) < 1, \quad s_0 < s < t < t_0,$$

где $z(t)$ является псевдопроцессом Винера с амплитудой перехода, даваемой формулой /1.4.1/. Условие поглощения в граничных точках понимается, как его остановка в момент достижения одной из точек 0, 1. Это ведет к исчезновению коэффициентов уравнения в точках границы

$$\rho(\tau, 0) = \rho(\tau, 1) = 0. \qquad /П.2/$$

Решение уравнения /П.1/ с условиями поглощения можно построить из решения уравнения без этих условий; коэффициенты уравнения должны быть при этом продолжены за интервал $(0,1)$. Именно, если $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет уравнению с коэффициентом $\tilde{\rho}$, совпадающим с ρ в интервале $(0,1)$,

$$\tilde{x}(t) = x(s) + \int_s^t \tilde{\rho}\,[\tau, \tilde{x}(\tau)]\,d\tau + z(t) - z(s), \qquad /П.3/$$

и решение этого уравнения единственно, то мы можем положить

$$x(\tau) = \begin{cases} \tilde{x}(\tau), & s_0 \le \tau \le T, \\ 0 \text{ или } 1 \text{ для } & \tau \ge T, \end{cases} \qquad /П.4/$$

где T есть момент первого выхода псевдопроцесса на границу, т.е. наименьший корень уравнения

$$\tilde{x}(\tau)[\tilde{x}(\tau)-1]=0 \qquad /П.5/$$

в интервале $\tau \in [s_0, t_0]$ или $T=t_0$, если уравнение это не имеет корней в рассматриваемом интервале времени. Можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных случаю диффузионных процессов, что решение задач

$$[\partial_s + \rho(s,y)\partial_y + \frac{\lambda}{2}\partial_y^2 + c(s,y)]u(s,y)=0, \qquad /П.6/$$

$$\lim_{s\uparrow t} u(s,y) = f(y),$$

$$\lim_{y\downarrow 0} u(s,y) = \lim_{y\uparrow 1} u(s,y)=0, \quad \lambda=\frac{ih}{m}$$

выражается через псевдопроцесс $x(t)$ формулой

$$u(s,y) = Q_{s,y}\{ f\circ\tilde{x}(t)\cdot\exp\int_s^t c[\tau,x(\tau)]\,d\tau\}, \qquad /П.7/$$

где $f(0)=f(1)=0$, а $Q_{s,y}$ является операцией усреднения по псевдомере /7/. Полагая, что $f(y)=\delta(y-x)$, находим отсюда амплитуду перехода псевдопроцесса. Так же проводится исследование амплитуд поглощения в точках границы /9/

$$m_0(t;s,y) = M_{s,y}\{x(t)=0\},$$

$$m_1(t;s,y) = M_{s,y}\{x(t)=1\}. \qquad /П.8/$$

Амплитуды эти находятся из решения следующих смешанных задач: $[\partial_s + \rho(s,y)\partial_y + \frac{\lambda}{2}\partial_y^2]m_k(t;s,y) = 0,$

$$\lim_{s\uparrow t} m_k(t;s,y)=0,$$

$$\lim_{y\downarrow 0} m_k(t;s,y)=1-k,$$

$$\lim_{y\uparrow 1} m_k(t;s,y)=k, \quad k=0,1. \qquad /П.9/$$

Сумма обеих амплитуд определяет амплитуду вероятности того, что псевдопроцесс, начавшийся в точке y в момент времени s, достигнет границы раньше t:

$$q(t;s,y)=m_0(t;s,y)+m_1(t;s,y)=M_{s,y}\{T<t\}. \qquad /П.10/$$

Функция эта определяется из аналогичной задачи, в которой граничные значения в точках 0, 1 одинаковы и равны единице.

Можно, как и в случае обычных процессов, поставить вопрос о нахождении амплитуды вероятности того, что псевдопроцесс, начинающийся в начальный момент времени $s=0$ в точке $y\in[\alpha,\beta]$, достигнет точки α раньше чем β. Это так называемая вторая проблема теории диффузии /8/; решение ее находится из следующих условий:

$$\begin{gathered}[\rho(y)\partial_y+\frac{\lambda}{2}\partial_y^2]M_y(\alpha,\beta)=0,\\ M_\alpha(\alpha,\beta)=1,\quad M_\beta(\alpha,\beta)=0.\end{gathered} \qquad /П.11/$$

Из этих условий получаем для амплитуды вероятности:

$$M_y(\alpha,\beta)=\frac{\int_y^\beta \exp\{-\frac{2}{\lambda}\int_\alpha^t\rho(z)dz\}dt}{\int_\alpha^\beta \exp\{-\frac{2}{\lambda}\int_\alpha^t\rho(z)dz\}dt}. \qquad /П.12/$$

Процесс с эмиссией из граничных точек понимается как процесс с поглощением, идущий обратно во времени. В этом случае, как и предыдущем, общий случай эмиссии из подвижных граничных точек можно свести к случаю эмиссии из точек 0,1. Условие эмиссии из граничных точек понимается как обратное во времени условие поглощения, т.е. если $x(t)=0$ или 1, то $x(t')$ имеет это же значение при всех $t'\le t$. Это ведет к такому же по форме условию, как и условие поглощения /П.2/. Общее стохастическое уравнение для псевдопроцесса с эмиссией $x(s)$ по форме не отличается от уравнения /П.1/, но на этот раз заданным считается значение псевдопроцесса в момент t, а искомым является $x(s)$:

$$x(s)=x(t)-\int_s^t \rho[r,x(r)]\,dr-\int_s^t \chi_{(0,1)}\circ x(r)\,d\,z(r). \qquad /П.13/$$

Решение этого уравнения строится по решению $\tilde{x}(s)$ уравнения с коэффициентами, продолженными на всю ось

$$x(s)=\begin{cases} 0 \text{ или } 1 \text{ для } & s_0 \le s \le S, \\ \tilde{x}(s) \text{ для } & S < s < t_0, \end{cases} \qquad /П.14/$$

где S является наибольшим корнем уравнения

$$\tilde{x}(s)[\tilde{x}(s)-1]=0 \qquad /П.15/$$

в интервале $s \in [s_0, t_0]$. В случае, если это уравнение не имеет корней, положим $S=s_0$. Амплитуда перехода псевдопроцесса с эмиссией находится из решения задачи

$$[\partial_t+\rho(t,x)\partial_x-\frac{\lambda}{2}\partial_x^2-c(t,x)]v(t,x)=0,$$

$$\lim_{t\downarrow s} v(t,x)=\delta(x-y), \quad \lim_{x\downarrow 0} v(t,x)=\lim_{x\uparrow 1} v(t,x)=0. \qquad /П.16/$$

Решение этой задачи с общим начальным условием дается формулой

$$v(t,x)=Q^{t,x}\{g\circ x(s)\exp\int_s^t c[r,x(r)]\,dr\}. \qquad /П.17/$$

Амплитуда эмиссии из граничных точек

$$n_j(s;t,x)=M^{t,x}\{x(s)=j\}, \quad j=0,1 \qquad /П.18/$$

определяется в стационарном случае из решения задач

$$[\partial_t+\rho(x)\partial_x-\frac{\lambda}{2}\partial_x^2]\,n_j(s;t,x)=0,$$

$$\lim_{t\downarrow s} n_j(s;t,x)=0 \quad x\in(0,1),$$

$$\lim_{x\downarrow 0} n_j(s;t,x) = 1-j\ ,$$

$$\lim_{x\uparrow 1} n_j(s;t,x) = j\ , \quad j=0,1\ . \qquad /П.19/$$

Сумма обеих амплитуд $p(s;t,x) = \sum_{i=0}^{1} n_j(s;t,x)$ дает амплитуду вероятности $M^{t,x}\{S>s\}$ того, что эмиссия произойдет после s. Сравнивая задачи /П.9/, /П.19/, видим, что амплитуды вероятности n_j и m_j связаны простым соотношением

$$m_j^*(s;t,x) = n_j(s;t,x), \qquad /П.20/$$

если только имеет место единственность решения этих задач. Аналогичная связь существует между $N^x(\alpha,\beta)$, амплитудой вероятности того, что псевдопроцесс побывал в точке α раньше, чем в β, и амплитудой $M_x(\beta,\alpha)$:

$$N^x(\alpha,\beta) = M_x^*(\beta,\alpha). \qquad /П.21/$$

/П.21/ следует из того, что амплитуда $N^x(\alpha,\beta)$ находится из решения граничной задачи

$$[\rho(x)\,\partial_x - \frac{\lambda}{2}\,\partial_x^2]\,N^x(\alpha,\beta) = 0,$$

$$N^\alpha(\alpha,\beta) = 0,$$

$$N^\beta(\alpha,\beta) = 1. \qquad /П.22/$$

Отсюда получаем

$$N^x(\alpha,\beta) = \frac{\int_\alpha^x \exp\{\frac{2}{\lambda}\int_\alpha^t \rho(z)\,dz\}\,dt}{\int_\alpha^\beta \exp\{\frac{2}{\lambda}\int_\alpha^t \rho(z)\,dz\}\,dt}. \qquad /П.23/$$

Принимая во внимание, что λ - мнимое число, получаем формулу /21/.

Можно также построить явные выражения для псевдопроцессов, отвечающих случаям перескока изнутри области на границу, в полной аналогии с теорией диффузионных процессов.

Рассмотрим еще по аналогии с теорией марковских процессов псевдопроцесс на отрезке $[0,1]$ с условиями мгновенного отражения от его концов. Конструкцию такого псевдопроцесса можно осуществить следующим образом [9]. Пусть псевдопроцесс $\tilde{x}(t)$ задан на всей прямой и удовлетворяет уравнению

$$\tilde{x}(t) - \tilde{x}(s) = \int_s^t \tilde{\rho}[\tau, \tilde{x}(\tau)]d\tau + \int_s^t \tilde{\sigma}[\tau, \tilde{x}(\tau)]d\tilde{z}(\tau), \qquad /\text{П.24}/$$

где коэффициенты $\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}$ имеют форму

$$\begin{aligned} &\tilde{\rho}(t,x) = s(x)\rho[t, \ell(x)], \\ &\tilde{\sigma}(t,x) = \sigma[t, \ell(x)], \end{aligned} \qquad /\text{П.25}/$$

причем функция

$$s(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| \le 1, \\ s(x+2k) = s(x), & k - \text{целое} \end{cases} \qquad /\text{П.26}/$$

является периодически продолженной знаковой функцией, а функция $\ell(x)$ связана с $s(x)$ формулой

$$\ell(x) = \int_0^x s(z)dz, \qquad /\text{П.27}/$$

так что

$$\ell(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le 1, \\ \ell(x+2k) = \ell(x), & k - \text{целое}. \end{cases} \qquad /\text{П.28}/$$

Искомый псевдопроцесс с отражением в точках 0, 1 выражается через $\tilde{x}(t)$ следующим образом:

$$x(t) = \ell \circ \tilde{x}(t). \qquad /\text{П.29}/$$

С помощью формулы Ито для псевдопроцессов мы находим уравнение

$$x(t)=x(s)+\int_s^t \rho[\tau,x(\tau)]d\tau+\int_s^t \sigma[\tau,x(\tau)]d z(\tau)+$$
$$+y_0(t)-y_0(s)+y_1(t)-y_1(s), \qquad /П.30/$$

где псевдопроцесс $y_0(t)$ имеет точки роста лишь в те моменты времени, когда $x(\tau)$ достигает точки O, а $y_1(t)$ имеет точки убывания там, где $x(\tau)$ достигает точки 1,

$$y_0(t)=\lambda\int_0^t \sigma^2[\tau,x(\tau)]\delta[x(\tau)]d\tau, \qquad /П.31/$$

$$y_1(t)=-\lambda\int_0^t \sigma^2[\tau,x(\tau)]\delta[1-x(\tau)]d\tau. \qquad /П.32/$$

Новый винеровский псевдопроцесс $z(t)$ выражается через $\tilde{z}(t)$ следующим левым стохастическим интегралом:

$$z(t)=\int_0^t \operatorname{sign}\tilde{x}(\tau)\,d_\ell z(\tau). \qquad /П.33/$$

В силу конструкции $x(t)$ функция

$$u(s,y)=Q_{s,y}\{f\circ x(t)\exp\int_s^t c[\tau,x(\tau)]d\tau\} \qquad /П.34/$$

удовлетворяет уравнению и условиям

$$[\partial_s+\rho(y)\partial_y+\frac{\lambda}{2}\sigma(y)\partial_y\sigma(y)\partial_y+c(y)]\,u(s,y)=0,$$

$$\lim_{s\uparrow t} u(s,y)=f(y),$$

$$\lim_{y\uparrow 0}\partial_y u(s,y)=\lim_{y\downarrow 1}\partial_y u(s,y)=0. \qquad /П.35/$$

Аналогичным образом можно провести рассуждения для псевдопроцесса, заканчивающегося в заданном состоянии в конечный момент времени. Граничные условия при этом имеют тот же вид, а соответствующая волновая функция

$$v(t,x)=Q^{t,x}\{g\circ x(s)\exp\int_s^t c[\tau,x(\tau)]d\tau\} \qquad /П.36/$$

удовлетворяет сопряженному уравнению в случае, когда выполняются условия обратимости псевдопроцесса.

Можно также построить явные выражения для псевдопроцессов, отвечающих случаям его перескока изнутри области на границу, и обратному во времени процессу, в полной аналогии с теорией диффузионных процессов.

Литература

1. *В.Гарчински. О граничных задачах для уравнений Шредингера, I, Препринт ОИЯИ, Р2-7471, Дубна, 1973.*
2. *W.Garczynski. Acta Phys. Polon., A42, 609 (1972).*
3. *W.Garczynski and J.Peisert. Acta Phys. Polon., B3, 455 (1972).*
4. *В.С.Владимиров. Уравнения математической физики, стр. 144, изд. "Наука", Москва, 1967.*
5. *R.P.Feynmann, A.R.Hibbs. Quantum Mechanics and Path Integrals, New York, 1965, Chapter 4.*
6. *V.M.Kenkre and Y.H.Kao. Phys.Rev., B5, 4194 (1972).*
7. *В.С.Буслаев. Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, т. 73, 14-17 /1964/.*
8. *И.И.Гихман, А.В.Скороход. Введение в теорию случайных процессов. Физматгиз, 1965.*
9. *И.И.Гихман, А.В.Скороход. Стохастические дифференциальные уравнения. Изд. "Наукова Думка", Киев, 1968.*
10. *J.L.Lions, E.Magenes. Problems aux limites non homogenes et applications, V. 3, Paris, 1968.*

Рукопись поступила в издательский отдел
8 октября 1973 года.