

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



C323.3

M-758

4/II-74

P2 - 7483

В.В. Молотков

403/2-74

ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ
НА ЧЕТНОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЕ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7483

В.В. Молотков

**ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ
НА ЧЕТНОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЕ**

§ I. Выведение

Как известно, при описании упругого рассеяния частиц высокой энергии очень полезными оказались асимптотические методы нерелятивистской квантовой механики, такие как эйкональное приближение^{/1/} и метод ВКБ^{/2/}.

Эйкональное приближение применимо при высоких энергиях в области малых углов рассеяния. Метод ВКБ является более общим. Он позволяет находить высокоэнергетическую асимптотику амплитуды рассеяния при произвольных углах (см., например, работы^{/3-4/}, а также обзорную статью^{/5/}, в которой, в частности, исследуется взаимосвязь между эйкональным, ВКБ и борновским приближениями).

В последнее время для модельного описания упругого рассеяния используется квазипотенциальный подход, предложенный Логуновым и Тавкелидзе^{/6/}. Сейчас существует несколько вариантов квазипотенциальных уравнений^{/6-8/}.

Оказывается, что при соответствующем видоизменении методов, развитых для уравнения Шредингера, их можно использовать и для нахождения асимптотических решений квазипотенциальных уравнений.

Совсем недавно в рамках квантовой теории поля с импульсным пространством постоянной кривизны^{/9/} было получено еще одно квазипотенциальное уравнение^{/11/} (оно будет упоминаться далее как ДКММ-уравнение). Это уравнение в пределе $\ell \rightarrow 0$ переходит в уравнение Годорова^{/8/}. (Здесь ℓ - фундаментальная длина, $\frac{\hbar}{\ell}$ - радиус кривизны импульсного пространства). ДКММ - уравнение в релятивистском конфигурационном представлении^{/12/} совпадает по форме с разностным уравнением, полученным ранее в работе^{/13/}, отличаясь от последнего лишь интерпретацией некоторых параметров. Для квазипотенциального уравнения такого типа был развит метод

ВКБ^{10,11/}. В настоящей работе исследована ВКБ-асимптотика амплитуды рассеяния $f(\theta)$ для целых четных квазипотенциалов при больших углах θ . Подробно проведены вычисления для гауссовского потенциала

$$V(r, E) = V_0(E) \exp\left(-\frac{r^2}{R^2 E}\right). \quad (I.1)$$

При вычислениях использовались методы, развитые в работах^{3,4/} для уравнения Шредингера.

Асимптотика амплитуды $f(\theta)$ получена при следующих условиях:

а)
$$\frac{V_0 E_2}{c^2 q^2} \ll 1. \quad (I.2)$$

Здесь V_0 - порядок величины квазипотенциала в окрестности $r=0$, E_2 - энергия рассеиваемой частицы в с.ц.м., q - импульс частицы в с.ц.м. Есть основания предполагать, что условие (I.2) достаточно для справедливости ВКБ-приближения.

б) Более ограничительное условие:

$$g(\tau_0) = \max_{n=0,1,\dots} \frac{1}{n+1} \left| \tau_0^{n+1} \frac{d^n}{d\tau_0^n} \frac{V(\tau_0, \theta)}{V'(\tau_0, \theta)} \right|^{1/2} \ll 1, \quad (I.3)$$

целиком обязанное специфике применяемых методов. В условии (I.3) $\tau_0(\theta)$ - точка поворота, соответствующая перевальному значению λ в интеграле Ватсона (см. § 4).

Найдено, что для малых энергий амплитуда будет экспоненциально убывать при больших углах рассеяния. При этом для гауссовского потенциала (I.1) амплитуда, вычисленная в первом порядке по g ($g \sim (V_0 \frac{E_2}{c^2})^{1/2}$), совпадает с ВКБ-амплитудой для уравнения Шредингера^{13/} и имеет орировский вид.

Для больших энергий амплитуда $f(\theta)$ становится степенной функцией от переданного импульса K (при больших углах рассеяния), и данный результат не зависит от конкретного вида квазипотенциала.

В § 2 настоящей работы обсуждается выражение для фазового сдвига $\delta^{RKB}(\lambda)$, полученное в работах^{/10,11/}.

§ 3 посвящен нахождению асимптотического вида $\delta^{RKB}(\lambda)$ в различных областях комплексной плоскости λ .

В § 4 найдена асимптотика РКС-амплитуды рассеяния $f(\theta)$ для области классически запрещенных углов при условиях (I.2) и (I.3). Полученные в этом параграфе результаты совпадают с результатами^{/11/} в нулевом порядке по $g/|\theta|$. Вычислены также поправки первого порядка.

§ 2. Матрица рассеяния

Будем для определенности работать с уравнением, полученным в работе^{/13/}. (Все результаты тривиально переносятся на случай ДКММ - уравнения). Радиальная часть этого уравнения в релятивистском конфигурационном представлении для локального квазипотенциала имеет вид:

$$\left[\frac{2E_2}{mc^2} - 2U(r) - \left(1 + \frac{\ell_0^2(\lambda^2 - \frac{1}{4})}{r(r+i\epsilon)} \right) \right] e^{i\ell_0 \frac{r}{\lambda}} - e^{-i\ell_0 \frac{r}{\lambda}} \psi_\lambda(r) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $U(r) \equiv \frac{V(r)}{2mc^2}$;

$\ell_0 = \frac{\hbar}{mc}$ - "фундаментальная длина", т.е. комптоновская длина волны рассеивающейся частицы;

$$\lambda = \ell + \frac{1}{2};$$

$E_2 \equiv mc^2 \cosh \chi$ - энергия рассеивающейся частицы в с.ц.м.

Массы частиц для простоты считаем равными. В случае $m_1 \neq m_2$ в уравнении (2.1) нужно сделать замену^{/14/}:

$$m \rightarrow m' = \sqrt{m_1 m_2}; \quad E_2 \rightarrow E_2 = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} (E_1 + E_2).$$

Полученное в^{/10,11/} выражение для РКС-фазового сдвига имеет вид:

$$\delta^{BKS}(\lambda) = \frac{1}{\tau_0} \left\{ \int_{\tau_0}^{+\infty} q(\tau, \lambda, u(\tau)) d\tau - \int_{\epsilon, \lambda/\epsilon h \chi}^{+\infty} q(\tau, \lambda, 0) d\tau \right\}, \quad (2.2)$$

где

$$q(\tau, \lambda, u(\tau)) = A \tau h \frac{\sqrt{(c h \lambda - u(\tau))^2 - \frac{1}{5 h^2 \chi} \left(1 + \frac{\epsilon^2 \lambda^2}{2^2} \right)}}{c h \chi - u(\tau)}. \quad (2.3)$$

При этом в новых обозначениях условие (I.2) записывается так:

$$U_0 c h \chi \ll 1. \quad (I.2')$$

В уравнении (2.3) τ_0 - "точка поворота", т.е. корень уравнения

$$1 - 2 c h \chi U(\tau_0) + U^2(\tau_0) - \frac{\epsilon^2 \lambda^2}{h^2 \chi \tau_0^2} = 0 \quad (2.4)$$

или, что то же самое, корень уравнения:

$$q(\tau_0, \lambda, u(\tau_0)) = 0. \quad (2.4')$$

Функция $q(\tau, \lambda, u(\tau))$ имеет ветвление корневого типа в точках поворота, а также логарифмические точки ветвления:

$$\tau = \pm \frac{\epsilon_0 \lambda}{5 h \chi}.$$

Проведем через все точки ветвления разрез, параллельные мнимой оси и не пересекающие вещественную ось, а также разрез, выходящий из точки $\tau=0$ и идущий вдоль отрицательной части вещественной оси.

Выберем ту ветвь $q(\tau, \lambda, u(\tau))$, на которой:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} q(\tau, \lambda, u(\tau)) = +\chi. \quad (2.5)$$

Если $U(\tau)$ - целая функция, то функция $\tau_0(\lambda)$, задаваемая неявно уравнением (2.4), будет, вообще говоря, бесконечнозначной. Поэтому, даже после проведения разрезов в \mathcal{Z} -плоскости, фаза $\delta^{BKS}(\lambda)$ будет многозначной из-за неоднозначности выбора начала пути интегрирования в формуле (2.2).

Предположим, что потенциал $U(\tau)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^2 U(\tau e^{i\alpha}) = 0 \quad \text{при} \quad -\alpha_- < \alpha < \alpha_+ \quad (\alpha_{\pm} > 0).$$

Тогда при достаточно больших $|\lambda|$ в секторе $-\alpha_- < \arg \lambda < \alpha_+$ существует точка поворота

$$\bar{\tau}(\lambda) \approx \frac{\rho_0 \lambda}{5h\chi}.$$

Следуя терминологии работы^{/3/}, назовем эту точку поворота кинематической. Соответствующий лист функции $\zeta_0(\lambda)$ назовем кинематическим листом. Его границы определяются разрезами, проведенными из точек λ , в которых кинематический корень сливается с одним или несколькими "динамическими" корнями. (Подробнее см. об этом в Приложении, где для потенциала (2.9) находятся асимптотики функции $\zeta_0(\lambda)$ и ее точек ветвления).

Лист $\delta^{BKE}(\lambda)$, соответствующий кинематическому корню, обладает тем свойством, что на этом листе^{/3/}

$$\delta^{BKE}(\infty e^{i\alpha}) = 0 \quad (-\alpha_- < \alpha < \alpha_+). \quad (2.6)$$

Поэтому кинематический лист является также и физическим*.

Для дальнейшего удобно сделать замену^{/3/}:

$$\frac{\rho_0 \lambda}{5h\chi \zeta_0} = \cos w, \quad (2.7)$$

в результате которой уравнение (2.4), определяющее функцию $\zeta_0(\lambda)$, приобретает следующий вид:

$$U(\tau_0) = \chi h \chi (1 - \sqrt{1 - \sin^2 w \operatorname{th}^2 \chi}) \equiv Y(w). \quad (2.8)$$

* Заметим, что на самом деле $\delta^{BKE}(\lambda)$ имеет две ветви, на которых выполняется условие (2.6). Мы выделяем одну из них, проводя в ζ -плоскости разрез через точки поворота и через точку $\tau=0$ и требуя выполнения условия (2.5).

Это замечание нам потребуется в дальнейшем.

(Знак перед радикалом выбран из соображений удобства).

уравнения (2.8) и (2.7) определяют неявно зависимость функций γ_0 и, соответственно, λ от w .

Для гауссовского потенциала

$$U(\gamma) = U_0 \exp\left(-\frac{\gamma^2}{R^2}\right), \quad (2.9)$$

где

$$U_0 = |u_0| e^{-2i\Delta}, \quad 0 \leq 2\Delta \leq \pi, \quad (2.10)$$

из уравнений (2.7) и (2.8) можно найти явную зависимость $\lambda(w)$ и $\gamma_0(w)$, а именно:

$$\lambda(w) = \frac{sh \chi R}{\epsilon_0} \cos w \sqrt{\ln \frac{U_0}{Y(w)}} \quad (2.11)$$

$$\gamma_0(w) = R \sqrt{\ln \frac{U_0}{Y(w)}} \quad (2.12)$$

где функция $Y(w) \equiv U(\gamma_0(w))$ определяется выражением (2.8). В этом случае, как видно из формул (2.8) и (2.11), риманова поверхность функции $\lambda(w)$ (или $\gamma_0(w)$) обладает сравнительно простой структурой, а именно: имеется серия точек ветвления корневого типа

$$w_{n\pm} = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \pm i \ln \operatorname{th} \chi. \quad (2.13)$$

В этих точках функция $Y(w)$ имеет ветвление. Далее, на одном из листов "внутреннего" корня (главная ветвь) находится серия корневых точек ветвления

$$w'_{n\pm} = \pm \sqrt{2 \operatorname{th} \chi |u_0|} e^{-i\Delta} + \left(2n + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right)\pi \quad (2.14)$$

Эти точки являются точками ветвления "внешнего" корня в выражении (2.11). На каждом из двух листов главной ветви расположены логарифмические точки ветвления:

$$w = 0, \pm \pi, \pm 2\pi. \quad (2.15)$$

Все это схематически изображено на рис.1.

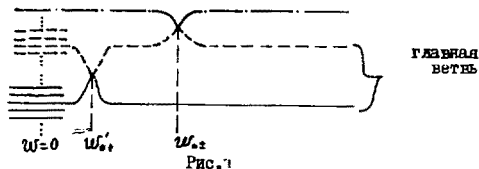
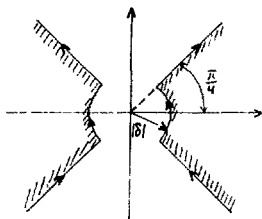


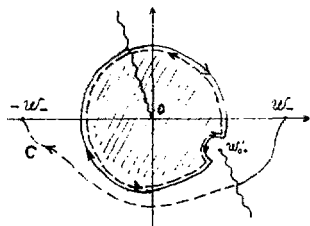
Рис.1
Схема ветвления римановой поверхности функции $\lambda(w)$ в окрестности точки $w=0$.

На рис.2 нарисована геометрическая картина отображения (2.II) в окрестности точки $w=0$. Легко видеть, что в этой окрестности отображение (2.II) и обратное ему устанавливает взаимодвухзначное соответствие между областью λ -плоскости, заштрихованной на рис.2а и областью "главного листа" римановой поверхности (состоящего на самом деле из $2 \times \infty$ листов) с проекцией, изображенной на рис.2б.



$$\frac{\rho_0 |\beta|}{\text{sh} \chi} = 7.0 |\beta| \ll R$$

Рис. 2а λ - плоскость



$$w_0' = \sqrt{2 \text{cth} \chi U_0}$$

$$\frac{\pi}{2} > w_- \gg w_0'$$

Рис.2б w - плоскость

В области же с проекцией, например, $|\omega| < \frac{\pi}{2}$, отображение уже не будет однолиственным, в чем можно убедиться, переходя по контуру C , изображенному на рис.2б от действительной точки 2ω до точки $-k\omega$ ($|\omega| \gg |\omega'|$).

При таком обходе мы найдем, что $\lambda(\omega) \approx \lambda(-\omega)$, но эти две "совпадающие" точки, как мы увидим далее, дадут для $\delta^{BKE}(\lambda)$ выражения, отличающиеся знаком: $\delta^{BKE}(\lambda|\omega) \approx -\delta^{BKE}(\lambda|-\omega)$. Таким образом, они лежат на самом деле на разных кинематических листах функции $\delta^{BKE}(\lambda)$ (см. примечание на стр. 7).

§ 3. Асимптотика $\delta^{BKE}(\lambda)$.

Пусть квазипотенциал $U(\tau)$ - четная целая функция, такая, что

$$\tau^2 U(\pm \infty e^{i\alpha}) = 0 \quad (3.1)$$

при $|\alpha| < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$.

Представим его в виде

$$U(\tau) = U_0 h(\tau), \quad h(0) = 1. \quad (3.2)$$

Например, гауссовский потенциал (2.9) удовлетворяет требованию (3.1) для $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

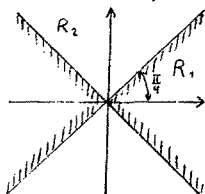


рис.3.

Проведем в τ -плоскости линии $|U(\tau)| = |U_0|$ (на рис.3 изображена картина линий уровня для гауссовского потенциала). Эти линии разбивают τ -плоскость на две области. В одной из них $|U(\tau)| < |U_0|$ (область R_1 на рис.3), в другой $|U(\tau)| > |U_0|$ (область R_2 на рис.3). Для $\delta^{BKE}(\lambda)$ получаются разные асимптотические разложения

в зависимости от того, где расположена кинематическая точка поворота $\gamma_+(\lambda)$ - в области R_1 , или же в области R_2 .

При выполнении условия (1.2'), всюду в области R , имеем:

$$\frac{\epsilon_0 \lambda}{sh \lambda} = \cos \omega = 1, \quad (3.3)$$

$$\text{т.е. } |\omega - 2n\pi| \ll 1 \quad (n=0, \pm 1) \quad (3.4)$$

(см. рис. 2а, б). Контур интегрирования в выражении (2.2), определяющем $\delta^{BK6}(\lambda)$, можно в этом случае деформировать так, чтобы для всех точек этого контура выполнялось неравенство $|u| < 1, |v| < 1$. Тогда подынтегральное выражение можно разложить в ряд по степеням потенциала и для $\delta^{BK6}(\lambda)$ получим:

$$\delta^{BK6}(\lambda) = \delta_0(\lambda) + \delta_1(\lambda) + \dots,$$

где

$$\delta_0(\lambda) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\sigma_0}^{\epsilon, \lambda, \mu, \nu} q(\gamma, \lambda, 0) d\sigma \sim \frac{\lambda \omega^2}{ch \lambda} \sim \frac{\sqrt{\epsilon_0} \omega^2}{ch \lambda} \quad (|\omega| \ll 1). \quad (3.5)$$

Так как $|\omega| \ll 1$, то

$$\begin{aligned} \delta_0(\lambda) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{U(\gamma, \lambda, 0)}{\sqrt{1 - \epsilon_0^2 \lambda^2 / sh^2 \lambda^2}} dz \approx -\frac{1}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{z^2 - \frac{\epsilon_0^2 \lambda^2}{sh^2 \lambda^2}}) dz \sim \\ &\sim \frac{R}{\epsilon_0} U(\gamma, 0) \sim \frac{R}{\epsilon_0} \omega^2 \gg \delta_0(\lambda). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, вводя прицельный параметр

$$\rho = \frac{\epsilon_0 \lambda}{sh \lambda}, \quad (3.7)$$

получаем следующее выражение для $\delta(\rho)$ в области R_1 :

$$\delta(\rho) \approx -\frac{1}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{z^2 + \rho^2}) dz. \quad (3.8)$$

Это есть не что иное, как эйкональная фаза. Как известно, при рассеянии на малые углы основной вклад в амплитуду дает область больших вещественных ρ (малые ω), и поэтому для фазы рассеяния можно применять приближение (3.8).

Для гауссовского потенциала получаем из выражения (3.8):

$$\delta(\rho) = -\frac{R\sqrt{\pi}}{2\epsilon_0} U_0 e^{-\rho^2/k^2} = -\frac{R\sqrt{\pi}}{2\epsilon_0} U(\rho) \quad (3.9)$$

в области ρ - плоскости, соответствующей области R_1 (см.(3.7)). При рассеянии в область классически запрещенных углов основной вклад в амплитуду дает область R_2 в том смысле, что именно в этой области находятся точки перевала подынтегральной функции интеграла Зоммерфельда-Ватсона. Поэтому необходимо оценить $\delta^{8K6}(\lambda)$ в окрестности точек перевала.

Оказывается, что в этой окрестности величина $|U(\gamma)|$ будет порядка единицы, и поэтому разложение в ряд по степеням $U(\gamma)$ под знаком интеграла в выражении (2.2) уже неприменимо. Перепишем выражение (2.2), определяющее фазовый сдвиг $\delta^{8K6}(\lambda)$, следующим образом:

$$\delta^{8K6}(\lambda) = \frac{i}{\epsilon_0} \int_{\tau_0}^{\epsilon_0 \lambda / h \gamma} q(\gamma, \lambda, 0) d\gamma + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau_0}^{\infty} [q(\gamma, \lambda, U(\gamma)) - q(\gamma, \lambda, 0)] d\gamma$$

$$\equiv \delta_0(\lambda) + R(\lambda), \quad (3.10)$$

где

$$R(\lambda) \equiv \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau_0}^{\infty} [q(\gamma, \lambda, U(\gamma)) - q(\gamma, \lambda, 0)] d\gamma. \quad (3.11)$$

Дифференцируя интеграл в правой части формулы (3.11) по параметру λ и используя равенства

$$\left. \begin{aligned} q\left(\frac{\epsilon_0 \lambda}{h \gamma}, \lambda, 0\right) &= 0 \\ q(\gamma_0, \lambda, U(\gamma_0)) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.12)$$

вытекающие из определения $q(\gamma, \lambda, U)$ (формула (2.3)), находим аналогичное выражение для производной $\delta^{8K6'}(\lambda)$:

$$\delta^{8K6'}(\lambda) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau_0}^{\epsilon_0 \lambda / h \gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} q(\gamma, \lambda, 0) d\gamma + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} [q(\gamma, \lambda, U(\gamma)) - q(\gamma, \lambda, 0)] d\gamma$$

$$\equiv (\delta')_0(\lambda) + S'(\lambda). \quad (3.13)$$

Здесь

$$(\delta')_0(\lambda) \equiv \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau_0}^{\epsilon_0 \lambda / h \gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} q(\gamma, \lambda, 0) d\gamma \neq \delta_0'(\lambda). \quad (3.14)$$

Заметим, что если потенциал $U(\tau)$ вещественен, т.е. удовлетворяет условию:

$$U^*(\tau) = U(\tau^*), \quad (3.15)$$

то $\delta^{VKC}(\lambda)$, а также $\delta_0(\lambda)$ будут удовлетворять условию вещественности (на кинематическом листе):

$$\delta^{VKC*}(\lambda) = \delta^{VKC}(\lambda^*) \quad (3.16a)$$

$$\delta_0^*(\lambda) = \delta_0(\lambda^*). \quad (3.16b)$$

Это следует из формул (3.10), (3.11) и (2.3). Отсюда видно, что приближение ВКБ не нарушает обобщенного условия унитарности^{15/}

$$S'(\lambda)S'^*(\lambda^*) = 1, \quad (3.17)$$

которое имеет место для точной матрицы рассеяния в случае вещественного потенциала. (Здесь $S'(\lambda) = e^{2i\delta'(\lambda)}$). Поэтому в случае четных потенциалов $\delta_0(\lambda)$ должна быть нечетной функцией λ , а $\delta_0^*(\lambda)$ — четной (на выбранном нами кинематическом листе). Если бы было наоборот, то условие вещественности (3.16b) нарушалось бы, например, для чисто мнимых λ .

Для асимптотического разложения интегралов типа:

$$I = \int_{\tau_0}^{\infty} f(\tau, u(\tau)) d\tau \quad (3.18)$$

используем метод, который был в неявном виде применен в работе^{13/}. В основе его лежит равенство:

$$\varphi(\tau, u(\tau)) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u(\tau)}{u'(\tau)} \int_{x=u(\tau)}^{u(\tau)} \frac{\varphi(\tau, x)}{x} \right) \Big|_{x=u(\tau)}, \quad (u(\tau) \neq \text{const}) \quad (3.19)$$

Полагая

$$\varphi_0(\tau, x) = f(\tau, x) - f(\tau, u)$$

$$\varphi_k(\tau, x) = \int_0^x \frac{dx'}{x'} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u(\tau)}{u'(\tau)} \frac{\varphi_{k-1}(\tau, x')}{x'} \right) dx', \quad k \geq 1, \quad (3.20)$$

находим для интеграла (3.18) следующее разложение:

$$I = \int_{\tau_0}^{\infty} f(\tau, 0) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\nu(\tau_0)} \varphi_{n-1}(\tau, x) \frac{dx}{x} + (-1)^n \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \varphi_n(\tau, \nu(\tau)). \quad (3.21)$$

Применив разложение (3.21) к $R(\lambda)$, получим после некоторых вычислений:

$$\delta^{BK\epsilon}(\lambda) = \lambda \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\nu w}{\operatorname{ch} \chi} \right) - \frac{\varphi(\chi, w)}{\operatorname{sh} \chi \operatorname{cos} w} + \frac{\nu(\tau_0)}{\tau_0 \nu'(\tau_0)} \frac{I(\varphi)}{\operatorname{sh} \chi \operatorname{cos} w} \right] \times \{ 1 + O(g^2(\tau_0)) \}. \quad (3.22)$$

Здесь

$$\varphi(\chi, w) \equiv \operatorname{Arth}(\operatorname{sh} w \operatorname{th} \chi), \quad (3.23)$$

а

$$I(\varphi) = \int_{e^{-2\varphi}}^1 \frac{\ln t dt}{t-1} - 2\varphi \ln(1+e^{-\varphi}). \quad (3.24)$$

Порядок величины остаточного члена

$$g(\tau_0) = \max_{n=0,1,\dots} \frac{1}{n+1} \left[\tau_0^{n+1} \frac{d^n}{d\tau^n} \left(\frac{\nu(\tau_0)}{\nu'(\tau_0)} \right) \right]^{1/n}. \quad (3.25)$$

Аналогично разлагается $S(\lambda)$ и для $\delta^{BK\epsilon'}(\lambda)$ находим

$$\delta^{BK\epsilon'}(\lambda) = \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\nu w}{\operatorname{ch} \chi} \right) + \frac{\nu(\tau_0)}{\tau_0 \nu'(\tau_0)} D(\varphi) \right] (1 + O(g^2(\tau_0))), \quad (3.26)$$

где

$$D(\varphi) = \frac{2 \operatorname{sh} \chi \operatorname{cos} w}{1 + \operatorname{sh}^2 \chi \operatorname{cos}^2 w} \left[\operatorname{ctg} \varphi \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\varphi}{2} \right], \quad (3.27)$$

а φ определяется выражением (3.23). Член нулевого порядка по $g(\tau_0)$ в разложениях (3.22) и (3.26) есть $\delta_0(\lambda)$ и $(\delta'_0(\lambda))$ соответственно (см. формулы (3.10) и (3.14)). Поэтому условия применимости этих разложений совпадают в основном со следующими условиями^{4/}:

$$R(\lambda) \ll \delta_0(\lambda) \quad (3.28a)$$

$$S(\lambda) \ll (\delta'_0(\lambda)), \quad (3.28б)$$

а эти два последних условия фактически эквивалентны друг другу. Для нахождения асимптотики амплитуды $f(\theta)$ нам потребуется еще

выражение для $\delta^{ВКБ}(\lambda)$:

$$\delta^{ВКБ}(\lambda) = -\frac{ch\chi}{\lambda^2 w \sqrt{1 + s^2 \chi^2 \cos^2 \theta}} (1 + O(\eta^{1/2})) \quad (3.29)$$

§ 4. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ

Амплитуда $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{e_0}{2i s h \chi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) (e^{2i\delta_l} - 1) \stackrel{\theta \neq 0}{=} \\ &= \frac{e_0}{2s h \chi} \int_{\Gamma} \frac{e^{2i\delta(\lambda)}}{\cos \pi \lambda} P_{\lambda - \frac{1}{2}}(-\cos \theta) \lambda d\lambda \end{aligned} \quad (4.1)$$

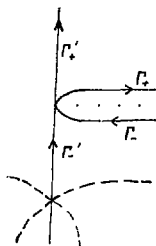


Рис.4.

Контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ указан на рис.4. Пренебрегая, как обычно, в интеграле Ватсона вкладом в окрестности нуля (для четных целых потенциалов это можно сделать /4,16/) и используя асимптотическое разложение $P_{\lambda - \frac{1}{2}}(-\cos \theta)$, для больших $|\lambda|$ получим:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{e_0}{s h \chi} \left(\frac{-i}{2\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \int_{\Gamma} \exp \left(2i \left(\delta(\lambda) - \frac{\lambda \theta}{2} \right) \right) \lambda^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) d\lambda + \\ &+ \frac{e_0}{s h \chi} \left(\frac{i}{2\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \int_{\Gamma} \exp \left(2i \left(\delta(\lambda) + \frac{\lambda \theta}{2} \right) \right) \lambda^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Вводя фазовые функции:

$$N(\mp \theta, \lambda) = 2\delta(\lambda) \mp \lambda \theta \quad (4.3)$$

и используя для $\delta(\lambda)$ приближение ВКБ, находим значения перевальных параметров w_{\mp} в приближении (3.28):

$$\text{tg } w_{\mp} \approx \pm ch\chi \text{tg } \frac{\theta}{2}. \quad (4.4)$$

Из последней формулы, имеющей смысл для произвольного потенциала, находим, с учетом уравнения (2.II), что для гауссовского потенциала:

$$\lambda_{\pm} \approx \mp i \operatorname{sh} \chi \cos \frac{\theta}{2} \frac{R}{\epsilon_0} \sqrt{\epsilon_0 \frac{\gamma(w=1)}{U_0}}. \quad (4.5)$$

Заметим, что перевальные точки λ_+ и λ_- должны находиться на разных кинематических ветвях $\delta^{KE}(\lambda)$ (см. примечание на стр.7). В противном случае фаза $\delta^0(\lambda)$ была бы четной функцией λ и в приближении (3.28) сильно нарушалось бы обобщенное условие унитарности (3.17) для точек λ , лежащих в окрестности λ_{\pm} *

Из принципа соответствия с нерелятивистской квантовой механикой можно заключить, что на выбранном нами кинематическом листе (см. условие (2.5)) перевальной точкой является $\lambda_- / 4$, хотя при другом выборе листа амплитуда не изменилась бы (при условии (3.28)).

Так как в верхней полуплоскости λ нет стационарной точки, то, пренебрегая вкладом от интеграла по Γ^+ , будем иметь для амплитуды следующее выражение:

$$f(\theta) = \frac{e_0}{i h \chi} \sqrt{\frac{\lambda - i\theta}{2 \sin \theta \delta^0(\lambda)}} e^{iN(-\theta, \lambda, i\theta)} (1 + O(\frac{1}{\lambda, i\theta})). \quad (4.6)$$

Заметим, что при выводе (4.7) предполагалось, что первоначальный контур Γ можно деформировать так, чтобы он целиком лежал в до-

* Поэтому в работе [3] имеется ошибка, связанная с тем, что отображение $\lambda(w)$ не будет однолиственным в окрестности с проекцией $|w| < \frac{\pi}{2}$. Например, вещественные w_+ и $-w_+$ (см. рис.2б) дают приблизительно одно и то же значение λ , но $\delta_0(\lambda)$ при этом отличаются знаками, т.е. лежат на разных кинематических листах (см. примечание к стр.7 конец второго параграфа).

лине. Для гауссовского потенциала путь наискорейшего спуска совпадает приблизительно с мнимой осью, но лишь одна из линий уровня: $Re iN(-\theta, \lambda) = Re iN(-\theta, \lambda)$ они обозначены пунктиром на рис.4) проходит через область R_1 , вторая же уходит в область R_2 . Это можно увидеть из разложения $\delta^{BKE}(\lambda)$ в области R_1 (формула (3.9)).

Известно, что в случае нерелятивистского потенциального рассеяния контур Γ для точной амплитуды (4.1) можно деформировать в контур Γ' , совпадающий с мнимой осью. При этом к интегралу по Γ' нужно добавить еще вклады от полюсов Редже, находящихся в правой полуплоскости λ . Известно также^[17], что для четных целых потенциалов полюса Редже при высоких энергиях могут находиться только в левой полуплоскости λ (в окрестности больших отрицательных полуцелых λ), поэтому они не будут давать вклада в амплитуду. Таким образом, деформируя сначала контур Γ в Γ' (см. рис.4) и заменяя после этого в интеграле Ватсона $\delta(\lambda)$ на $\delta^{BKE}(\lambda)$, мы получим (4.6). То, что эти же операции можно проводить и в случае разностного уравнения (2.1) принимается здесь без доказательства.

Подставляя в разложение (4.6) вместо $\delta''(\lambda, iN(-\theta, \lambda))$ их выражения через \mathcal{W}_- (формулы (3.29), (4.3), (3.22)), и учитывая также (4.4) и то, что $\lambda_{-}(\theta) = 5/4 \chi e^{-i\theta} \gamma_{-}(\theta) / \cos \chi_{-}(\theta)$, найдем окончательный вид амплитуды рассеяния:

* Асимптотическое разложение (4.7) справедливо для произвольного целого четного квазипотенциала. В общем случае может иметься более чем одна стационарная точка, тогда в (4.7) нужно взять точки поворота с максимальной мнимой частью.

$$f(\theta) = \frac{i\gamma_0(\theta)ch\chi}{2(1+sh^2\chi\sin^2\frac{\theta}{2})} \exp\left\{-\frac{2i\gamma_0(\theta)}{c_0}\left[\varphi - \frac{U(\gamma_0)}{\gamma_0 U'(\gamma_0)} I(\varphi)\right]\right\} \times (1 + O(q^2(\gamma_0))) \cdot (1 + O(\frac{1}{\lambda})). \quad (4.7)$$

В этом разложении

$$I(\varphi) = \int_{e^{-2\varphi}}^1 \frac{e^{nt} dt}{t^{-1}} - 2\varphi - \ln(1 + e^{-\varphi}), \quad (4.8)$$

а φ_- - значение $\varphi(\chi, \omega)$ (которое определяется выражением (3.23)) в точке перевала (4.4):

$$\varphi_- = \ln\left(sh\chi \sin\frac{\theta}{2} + \sqrt{1 + sh^2\chi \sin^2\frac{\theta}{2}} \right) = \varphi_-(\chi, \theta). \quad (4.9)$$

Для гауссовского потенциала перевальное значение $\gamma_0(\theta)$ легко найти приближенно:

$$\gamma_0(\theta) \approx -iR \left\{ \ln \left[\frac{ch\chi}{U_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2\chi \sin^2\frac{\theta}{2}}} \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (4.10)$$

При выводе (4.10) были использованы уравнение (2.12) и приближенное равенство (4.4). В этом же приближении

$$q(\gamma_0) \sim \frac{U(\gamma_0)}{\gamma_0(\theta) U'(\gamma_0)} = -\frac{R^2}{2\gamma_0^2} \approx \ln \left[\frac{ch\chi}{U_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2\chi \sin^2\frac{\theta}{2}}} \right) \right]. \quad (4.11)$$

Как видно из разложения (4.7), оно применимо, когда:

а) перевальное значение углового момента велико:

$$\lambda \cdot i\theta \gg 1, \quad (4.12)$$

б) для перевальных точек поворота $\gamma_0(\theta)$:

$$q(\gamma_0(\theta)) \ll 1. \quad (4.13)$$

Для гауссовского потенциала условия (4.12) и (4.13) сводятся к следующим:

$$\frac{sh\chi \cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + sh^2\chi \sin^2\frac{\theta}{2}}} \frac{R}{c_0} \sqrt{\ln \frac{U(\gamma_0)}{U_0}} \gg 1 \quad (4.12')$$

и

$$\ln \frac{U(\gamma_0)}{U_0} \gg 1. \quad (4.13')$$

Мы не исследуем здесь ограничения (снизу и сверху) на углы. Этот вопрос подробно разбирается в работе^{/4/}, для нас достаточно того,

что $\epsilon_0 \frac{\rho}{2} \sim 1$, и, с учетом этого, условие (4.12) принимает вид:

$$\hbar \chi \frac{\rho}{\epsilon_0} \sqrt{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}} \gg 1.$$

В нерелятивистском пределе ($\chi \ll 1$), когда $\varphi \approx \chi \sin \frac{\rho}{2}$; α

$U(\rho, \theta) \approx \frac{\rho}{2} \sin^2 \frac{\rho}{2} \ll 1$, получаем для амплитуды $f(\theta)$ следующую асимптотику:

$$f(\theta) = \frac{i \tau_0^{\text{нрел}}(\theta)}{2} \exp \left\{ - \frac{i \tau_0^{\text{нрел}}(\theta)}{\hbar} K \left(1 - \frac{2U(\rho)}{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}} \right) \left(1 + O(\rho^2) \right) \right\}^{(1+O(\rho^2))}. \quad (4.14)$$

Здесь $\tau_0^{\text{нрел}}(\theta)$ — переданная энергия (точка поворота для уравнения Шредингера); $K = 2g \sin \frac{\rho}{2}$ — переданный импульс в с.п.м.

В частности, для гауссовского потенциала:

$$f(\theta) = \frac{\rho}{2} \sqrt{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}} \exp \left\{ - K R \sqrt{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}} \left(1 - \frac{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}}{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}} + O(\epsilon_0^{-2} \left| \frac{K^2}{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}} \right| \right) \right\}. \quad (4.14')$$

При этом

$M = \frac{m}{2}$ — приведенная масса системы,

$V_0 = 2\rho c U_0$ — "размерная" потенциальная энергия.

Амплитуды (4.14) и (4.14') совпадают с амплитудами, полученными в работах ^{4,3/} на основе ВКБ-приближения для уравнения Шредингера.

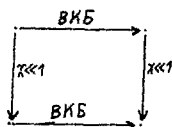


Рис.5.

Отсюда можно сделать вывод, что нерелятивистский предел для разностного уравнения (2.1) и ВКБ-приближение коммутирует друг с другом, или, иными словами, принцип соответствия справедлив не только для уравнения (2.1) и уравнения Шредингера, но и для соответствующих ВКБ-приближений (по крайней мере с точностью до $O(\rho^2)$).

В другом предельном случае: $\chi \gg 1$ — амплитуда (4.7) меняется по степенному закону. Для гауссовского потенциала:

$$f(\theta) = \frac{2REg}{mc^2} \sqrt{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}} \left(1 + \frac{RK^2}{2\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}}} \right) \left| \frac{K}{mc} \right|^{-2(1+R/\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}})} \quad (4.15)$$

Здесь $K = \sqrt{-t}$ - передача импульса в с.ц.м. Заметим, что при $\chi \gg 1$ перевальная точка поворота $\gamma_0(\theta)$ практически не зависит от θ .

Это свойство верно для произвольного гладкого потенциала, потому что при $\chi \gg 1$ из выражений (2.8) и (4.4) следует, что

$$U(\gamma_0(\theta)) \approx 1 \quad (4.16)$$

и поэтому

$$\gamma_0(\theta) = \text{const} \equiv \gamma_0. \quad (4.17)$$

Таким образом, для высокоэнергетического рассеяния на произвольных четных плавких квазипотенциалах амплитуда рассеяния на большие углы должна меняться по степенному закону как функция переданного импульса K :

$$f(s, t) \approx C(s) |t|^{-\alpha(s)}, \quad (4.18)$$

если выполняются условия (4.12) и (4.13).

При этом, в отличие от случая гауссовского потенциала, параметр $\alpha = -\frac{d \ln f}{d \ln |t|}$ может иметь мнимую часть, сравнимую по величине с действительной.

Предположение о степенном убывании амплитуды рассеяния как функции t (при $s \rightarrow \infty$, $\frac{t}{s} \sim 1$) уже делалось ранее^{/18/}.

Существующие экспериментальные данные по упругому р-р-рассеянию при высоких энергиях^{/19,20/} хорошо описываются формулой Оппенгеймера^{/19/}, с которой формула (4.18) вряд ли может конкурировать. Но следует заметить, что эти данные соответствуют малой величине параметра χ ($E_{\text{п.к.}} = 20+25$ Гэв, т.е. $\chi \leq 1,5+2$), а приближение (4.18) справедливо лишь при $\chi \gg 1$, т.е. при гораздо более высоких энергиях.

Если вместо уравнения (2.1) рассмотреть ДКММ-уравнение, то все результаты непосредственно переносятся на этот случай, поскольку сами уравнения имеют один и тот же вид. При этом пределы

$\chi \gg 1$ будут соответствовать энергиям:

$$E_q \approx \frac{\hbar c}{\ell_0} \sim 300 - 400 \text{ ГэВ} \quad (\ell_0 - \text{фундаментальная длина}).$$

В заключение автор хотел бы поблагодарить А.Д. Донкова, В.Г. Кадмиевского, М.Д. Матвеева и Р.М. Мир-Касимова за полезные советы и стимулирующую критику.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Нули функции $q(\tau, \lambda, U(\tau))$ для гауссовского потенциала.

Функция $\tau_0^2(\rho^2)$ есть функция, обратная функции:

$$\rho^2 = \tau^2 (1 - 2 \operatorname{th} \chi U_0 e^{-\tau^2 \lambda^2} + U_0^2 e^{-\tau^2 \lambda^2}). \quad (\text{I.1})$$

(Здесь $\rho = \frac{\theta, \lambda}{\hbar \chi}$ - прицельный параметр).

Будем далее считать, что $2 \operatorname{th} \chi U_0 |\lambda| \ll 1$. (Это условие при $\chi \ll 1$ эквивалентно условию: $V_0 \ll \frac{\rho^2}{2m} = E_{\text{кин}}$, а при $\chi \gg 1$ условию: $V_0 \ll E_{\text{кин}}$). Тогда асимптотическое расположение нулей $\tau^2(\rho^2)$, удовлетворяющих условиям: $|\tau^2| \gg |\rho^2|$, определяется следующей формулой:

$$\tau_n^2 \approx -R^2 \left\{ \ln \left[\frac{1}{U_0} (\operatorname{th} \chi \pm \frac{1}{\hbar \chi}) \right] + 2n\pi i \right\} \\ (R^2 [\ln |\frac{1}{U_0}| + 2n\pi] \gg |\rho^2|). \quad (\text{I.2})$$

При $|\rho^2| \ll R^2 \ln \left(\frac{\operatorname{th} \chi \pm 1}{\hbar \chi U_0} \right)$ эта формула дает асимптотические значения нулей для всех n . При этом имеется еще один корень в точке:

$$\bar{\tau}^2 \approx \rho^2 (1 + 2 \operatorname{th} \chi U_0) \quad (\text{I.3})$$

(кинематический корень).

При $\rho^2 = 0$ формулы (I.2) и (I.3) становятся точными.

Частные случаи (I.2):

а) $\chi \ll 1$

$$\gamma_{n\pm}^2 \approx -R^2 \left[\ln \frac{1}{U_0} \pm \ln \frac{2}{\chi} + 2n\pi i \right] \quad (I.2a)$$

при этом $Re \gamma_{n\pm}^2 < 0$, если $2ct\chi U_0 \approx \frac{2U_0}{\chi} \ll 1$;

б) $\chi \gg 1$

$$\gamma_{n\pm}^2 \approx \gamma_{dn}^2 \approx -R^2 \left[\ln \frac{1}{U_0} + 2\pi n i \right] \quad \text{для всех } n. \quad (I.2б)$$

Аналогичным образом можно найти асимптотическое расположение кратных корней при $|n| \gg R^2$. Кратные корни удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d\rho^2}{d\gamma^2} = 0. \quad (I.4)$$

Они определяют алгебраические точки ветвления римановой поверхности функции $\gamma_0^2(\rho^2)$.

Используя методы нахождения асимптотического расположения корней квазиполиномов (см., например [21]), находим две асимптотические серии двойных корней. Одна из этих серий есть:

$$\gamma_{dn}^2 \approx -R^2 \left(\ln \frac{ct\chi}{U_0} + 2\pi n i \right) \quad |n| \gg 1. \quad (I.5)$$

При этом:

$$\frac{\gamma_{dn}^2}{\rho_{dn}^2} = \cos^2 w \approx -sh^2 \chi, \quad \text{т.е. } \cos w \approx \pm \frac{i}{sh \chi}. \quad (I.6)$$

Так как $Re \rho_{dn}^2 > 0$, то совершенно очевидно, что эта серия корней соответствует слиянию двух динамических нулей, т.е. точки ветвления (I.6) отсутствует на кинематическом листе.

Заметим, что серия точек ветвления (I.6) не имеет наследственного аналога. Из формулы (I.2б) следует, что в случае $\chi \gg 1$ асимптотики (I.5) и (I.6) справедливы для всех n .

Имеется еще одна серия двойных нулей:

$$\bar{\gamma}_{dn}^2 \approx R^2 \left(\ln \frac{2n\pi \cdot 2ct\chi U_0}{l} + 2n\pi i \right) \quad |n| \gg 1. \quad (I.7)$$

Этим нулям соответствует

$$\bar{\rho}_{dn}^2 \approx \bar{\gamma}_{dn}^2. \quad (I.8)$$

Аналогичная серия двойных точек поворота имеется и в случае нерелятивистского рассеяния на гауссовском потенциале^{/3/}. Эти точки соответствуют слиянию кинематического нуля с одним из динамических. Заметим, что при больших N будем иметь:

$R_c \bar{\eta}_{n\pi}^2 \approx R^2 \ln 2n\pi \rightarrow \infty$. Но, тем не менее, оси $R_c \tau = \pm i m \tau$ являются асимптотами обеих серий γ_{σ} , причем серия (I.5) стремится к асимптоте сверху, а серия (I.7) - снизу.

Двойные нули с малой мнимой частью могут появиться лишь в области:

$$R_c \tau^2 \lesssim -R^2 \ln \frac{1}{2 \cos \tau U_0}.$$

Поэтому линия точек ветвления на кинематическом листе имеет примерно тот же вид, что и в случае нерелятивистского рассеяния^{/3/}.

Литература:

1. R.I.Glauber, Lectures on Theoretical Physics, vol.1, N.Y. (1959).
2. Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов. "Мир", 1965. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, "Наука", 1963 г.
3. Ю.Ф. Пирогов. ЖЭТФ, 55, 854, (1968).
4. A.Paliou (Lev), S.Rosendorf. Ann.of Phys. 66, 189-217 (1971).
5. В.Н. Первушин. Препринт P2-5990. Дубна, (1971).
6. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
7. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys. 1968, B6, 125.
Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cim. 1967, 55A, 275.

8. I.T.Todorov, Phys.Rev. D3, 2351 (1971);
I.T.Todorov, Preprint IC/71/75. Miramare-Trieste (1971).
9. В.Г. Кадышевский. Препринт P2-5717, Дубна, (1971).
A.D.Donkov, V.G.Kadyshesky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov,
JINR E2-6992, Dubna, 1973.
10. Л.А. Флишнова. Изв. АН Азерб. ССР, 30, I (1974).
11. А.Д. Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов.
Международная конференция. "Взаимодействие адронов при
высоких энергиях". Сб. аннотаций, Баку, 1971.
12. V.G.Kadyshesky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov, Nuovo
Siv. 55A, 233 (1968).
13. М.Д. Матеев, Р.М. Мир-Касимов, М. Фриман. Препринт
P2-4107, Дубна, 1968.
14. V.G.Kadyshesky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov, JINR
E2-6992, Dubna (1968).
15. А.З. Патамиский, В.Л. Покровский, И.М. Халатников.
ЖЭТФ, 44, 2062, (1963).
16. S.Rosendorf, S.Tani, Phys. Rev. 128, 457 (1962).
17. H.A. Bethe, T.Kinoshita. Phys. Rev. 128, 1418 (1962).
18. Masahiko Arai. Preprint UT-Komada 73-I, Tokyo, 1973.
19. Jay Orear. Phys. Rev. Lett. vol. 12, 14, 112 (1964).
20. Allaby et al. Phys. Lett. 28B, 67 (1968); 1bid.
34b, 431 (19719).
21. А.М. Зверкин. В сб. "Труды семинара по теории дифферен-
циальных уравнений с отклоняющимся аргументом". Вып. 3,
УДН, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1973 года.