

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С34/a1
A-84

4/II-74

P2 - 7465

440/2-74

И. Лукач, Я.А. Смородинский

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ
НЕСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА И
НЕКАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ДЛЯ ГРУППЫ ТРЕХМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ

1973

**ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

И. Лукач, Я.А.Сморodinский

**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ
НЕСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА И
НЕКАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ДЛЯ ГРУППЫ ТРЕХМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ**

Введение

Среди задач квантовой механики, которые допускают аналитическое решение, задача о движении свободного волчка занимает почетное место. В теории молекулярных спектров и теории ядра волчок служит хорошей моделью^{/1-9/}. В этих приложениях, однако, часто используется модель симметричного волчка, так как она в силу аксиальной симметрии задачи существенно проще модели несимметричного волчка.

В настоящее время можно считать, что квантовомеханическая задача о несимметричном волчке стала классической. Решение этой задачи было получено в конце двадцатых годов сразу же после создания квантовой механики в ее теперешней форме^{/10-18/}. Среди работ по квантовой теории несимметричного волчка следует отметить работы Крамерса и Итманна^{/12/}, в которых для решения этой задачи использовалась специальная криволинейная ортогональная (эллиптическая) система координат на двумерной сфере и факт пространственного вырождения собственных значений оператора вращательной энергии. Другим подходом к решению проблемы несимметричного волчка является матричный метод, который связан с разложением волновых функций несимметричного волчка по волновым функциям симметричного (шарового) волчка, которые хорошо известны^{/19-25/}. Этому методу отдается предпочтение при рассмотрении квантовомеханической проблемы несимметричного волчка в известных учебниках по квантовой механике^{/26,27/}.

Точный интеграл свободного волчка - угловой момент - порождает группу трехмерных вращений, представления которой параметризуются

тремя углами Эйлера, которые обозначим через α, β, γ . Представления группы трехмерных вращений $D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ с точностью до нормировочного множителя совпадают с волновыми функциями карового волчка [26, 28]:

$$|j, m, m'\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi^2}} D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma).$$

Свойства несимметричного волчка можно представить в очень компактной форме, используя симметрию задачи. Если зависимость представлений группы трехмерных вращений от одного из углов Эйлера исчезает, то их можно реализовать на двумерной сфере. Для того чтобы исключить зависимость от одного из углов Эйлера, достаточно повернуть неподвижную систему координат так, чтобы проекция углового момента на одну из осей обратилась в нуль. Перейдя на двумерную сферу, можно воспользоваться свойством ортогональных криволинейных систем координат на сфере, которые допускают разделение переменных в уравнении Лапласа. Диагональные операторы в эллиптической системе координат на сфере совпадают тогда с операторами углового момента и вращательной энергии. Волновые функции несимметричного волчка в этом случае совпадают с волновыми функциями эллиптической системы координат на сфере, с так называемыми сферо-коническими функциями. Сферо-конические функции представляют собой полную ортонормированную систему функций на поверхности трехмерного шара. Они являются, наряду с обычными сферическими функциями, вторым возможным базисом для группы трехмерных вращений [29, 30]. Таким образом, получаем одновременно физическую интерпретацию нетривиального разделения переменных на сфере.

Полезно обратить внимание на то, что путь решения задачи о волчке в этом смысле обратен обычному пути решения уравнения Шредингера. Мы находим сначала решение, обладающее определенной

симметрией (заданным угловым моментом с его нулевой проекцией на внешнюю ось) и потом находим общее решение. Это частное решение находим с помощью специальной криволинейной системы координат на сфере.

Отметим, что в многомерных пространствах постоянной кривизны существует конечное число систем криволинейных координат, в которых разделяются переменные в уравнении Лапласа. Каждая система координат, допускающая разделение переменных в уравнении Лапласа, характеризуется определенным набором линейно независимых диагональных операторов. В групповом отношении каждую такую систему координат можно охарактеризовать определенной цепочкой подгрупп, которая отражает трансформационные свойства волновых функций данной системы. Выбор разных цепочек подгрупп приводит к разным физическим задачам.

Подход к решению задач, аналогичный приводимому здесь для несимметричного волчка, очень мало используется, но возможно, что такой подход может привести к интересным результатам в квантово-механической задаче нескольких тел.

Квантовые числа несимметричного волчка

В классической механике твердое тело характеризуется тензором моментов инерции, который можно сделать диагональным в системе координат, жестко связанной с телом, если направить оси координат вдоль главных осей инерции. Обозначим главные моменты инерции волчка через J_1, J_2, J_3 ($J_1 \leq J_2 \leq J_3$)
 Твердое тело называется несимметричным волчком, если $J_1 \neq J_2 \neq J_3$, симметричным вытянутым (сплюснутым) волчком, если момент инерции вокруг оси симметрии меньше (больше), чем вокруг осей, перпендикулярных к оси симметрии, т.е. $J_1 \leq J_2 = J_3$ ($J_1 = J_2 \leq J_3$), и шаровым волчком, если $J_1 = J_2 = J_3/3$.

Вращение свободного твердого тела вокруг неподвижной точки в классической механике описывается уравнениями Эйлера^{/31,32/}

$$\begin{aligned} \frac{d J_1'}{d t} &= - (a_2 - a_3) J_2' J_3', \\ \frac{d J_2'}{d t} &= - (a_3 - a_1) J_3' J_1', \\ \frac{d J_3'}{d t} &= - (a_1 - a_2) J_1' J_2', \end{aligned} \quad (1)$$

где постоянные $a_i = J_i^{-1}$ ($a_1 \geq a_2 \geq a_3$) и J_i' — суть составляющие момента количества движения в системе координат, жестко связанной с телом. Из системы уравнений (1) непосредственно получаются два интеграла движения: квадрат момента количества движения J_0^2 и вращательная энергия T_0 , а именно:

$$\begin{aligned} J_1'^2 + J_2'^2 + J_3'^2 &= J_0^2, \\ a_1 J_1'^2 + a_2 J_2'^2 + a_3 J_3'^2 &= 2 T_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Третий интеграл движения представляет собой проекцию момента количества движения на одну из осей неподвижной системы координат.

Если рассматривать J_i' как операторы с перестановочными соотношениями (по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3)

$$[\hat{J}_i', \hat{J}_j'] = -i \epsilon_{ijk} \hat{J}_k', \quad (3)$$

легко убедиться, что квантовомеханические уравнения движения свободного волчка, получающиеся из коммутатора ($\hbar = 1$)

$$\frac{d \hat{J}_i'}{d t} = i [\hat{T}_0, \hat{J}_i'],$$

приводят к уравнениям движения вида (I) с симметризованным правой частью /13/.

Следовательно, система операторов квантовомеханической задачи несимметричного волчка имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{J}_1'^2 + \hat{J}_2'^2 + \hat{J}_3'^2 &= j(j+1), \\ a_1 \hat{J}_1'^2 + a_2 \hat{J}_2'^2 + a_3 \hat{J}_3'^2 &= 2 \tau_{j(\mu)}(a_1, a_2, a_3), \\ \hat{J}_3 &= g_{13} \hat{J}_1' + g_{23} \hat{J}_2' + g_{33} \hat{J}_3' = m, \end{aligned} \quad (4)$$

где \hat{J}_3 - оператор проекции момента на ось x_3 неподвижной системы координат, $g_{ik} = g_{ik}(\alpha, \beta, \gamma)$ - элементы ортогональной действительной матрицы, преобразующие вектор из неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 в подвижную систему координат x_1', x_2', x_3' ; $j(j+1)$, $\tau_{j(\mu)}(a_1, a_2, a_3)$, m - собственные значения соответствующих операторов. Эти три собственные значения и являются квантовыми числами в задаче о несимметричном волчке. Они соответствуют трем степеням свободы свободно вращающегося твердого тела вокруг неподвижной точки в пространстве. Квантовое число j , как известно, принимает целые значения и квантовое число m принимает $2j+1$ значений, равных $-j, -j+1, \dots, j$. Собственные волновые функции системы операторов (4), число которых равно $(2j+1)^2$, представляют собой волновые функции несимметричного волчка.

Квантовомеханическая задача о несимметричном волчке представляет собой задачу на собственные значения; необходимо при заданном j отыскать $2j+1$ собственных значений вращательной энергии как функций постоянных a_1, a_2, a_3 . Собственные значения оператора вращательной энергии $(2j+1)$ -раз вырождены по отношению к направлению момента относительно неподвижной системы

координат, т.е. вращательная энергия не зависит от квантового числа m . Соответственно в собственных значениях оператора вращательной энергии $\mathcal{E}_{j(\kappa)}(a_1, a_2, a_3)$ опущен индекс m и символ $(\kappa) = -j, -j+1, \dots, j$ служит для обозначения $2j+1$ разных собственных значений этого оператора таким образом, чтобы имело место

$$\mathcal{E}_{j(\kappa)}(a_1, a_2, a_3) \leq \mathcal{E}_{j(\kappa+1)}(a_1, a_2, a_3). \quad (5)$$

Отметим одно важное в практическом отношении свойство оператора вращательной энергии в (4), а также собственного значения $\mathcal{E}_{j(\kappa)}(a_1, a_2, a_3)$ по отношению к линейным преобразованиям параметров a_i [16]. С помощью преобразования типа

$$a_i = \alpha_i a_i' + \beta_i, \quad \alpha_i, \beta_i = \text{const}, \quad (6)$$

можно собственные значения оператора вращательной энергии выразить через собственное значение $\mu_{j(\kappa)}(k^2)$ оператора

$$k^2 \hat{J}_3'^2 - k^2 \hat{J}_1'^2 = \mu_{j(\kappa)}(k^2), \quad (7)$$

который зависит только от одного безразмерного параметра $0 \leq k^2 \leq 1$, так как

$$k^2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad k'^2 = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}, \quad (8)$$

и очевидно выполняется тождество $k^2 + k'^2 = 1$. С помощью преобразования (6) можно образовать другие операторы, которые эквивалентны оператору (7) и собственные значения которых зависят только от одного параметра. Так, например, полагая в преобразовании (6) $a_i' = e_i$, $\alpha_i = \frac{1}{3}(a_1 - a_3)$, $\beta_i = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$, можно образовать вместо (7) другой эквивалентный оператор

$$e_1 \hat{J}_1^{j+1} + e_2 \hat{J}_2^{j+1} + e_3 \hat{J}_3^{j+1} = \varepsilon_{j(\infty)}(e_1, e_2, e_3) \quad (9)$$

с собственным значением $\varepsilon_{j(\infty)}(e_1, e_2, e_3) \equiv \varepsilon_{j(\infty)}(k^2)$, так как

$$e_1 = 1 + k^2, \quad e_2 = 1 - 2k^2, \quad e_3 = -2 + k^2; \quad (10)$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 \geq e_2 \geq e_3.$$

Между собственными значениями $\varepsilon_{j(\infty)}(k^2)$ и $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ существует очевидная связь:

$$\varepsilon_{j(\infty)}(k^2) = (1 - 2k^2)j(j+1) - 3\mu_{j(\infty)}(k^2). \quad (11)$$

Собственные значения оператора вращательной энергии, выраженные через собственные значения операторов (7) и (9), записываются следующим образом ⁸:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3) &= \frac{1}{2} a_2 j(j+1) + \frac{1}{2} (a_3 - a_1) \mu_{j(\infty)}(k^2) = \\ &= \frac{1}{6} (a_1 + a_2 + a_3) j(j+1) + \frac{1}{6} (a_1 - a_3) \varepsilon_{j(\infty)}(k^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение собственных значений оператора вращательной энергии через собственные значения оператора (7) полезно при их вычислении и табулировании. Как будет показано в дальнейшем, параметр k^2 имеет простую интерпретацию в геометрии на сфере единичного радиуса в трехмерном евклидовом пространстве ²⁹. Параметр k^2 можно назвать параметром асимметрии, так как он характеризует откло-

⁸ В литературе часто используется вместо k^2 другой безразмерный параметр, а именно: $\eta = 1 - 2k^2 = (2a_2 - a_3 - a_1) / (a_1 - a_3)$ ¹⁷. В этом случае собственные значения оператора вращательной энергии выражаются через собственные значения оператора $(-1 \leq \eta \leq 1)$

$$\hat{J}_1^{j+1} + 2\hat{J}_2^{j+1} - \hat{J}_3^{j+1} = 2j(j+1) - 2\mu_{j(\infty)}\left(\frac{1-\eta}{2}\right).$$

нение распределения массы твердого тела от аксиально-симметричного случая распределения.

Параметризация матрицы вращения

Ортогональная трехмерная матрица g_{ik} ($g_{ij}g_{kj} = \delta_{ik}$), соответствующая преобразованию (вращению) от повернутой системы координат x_1', x_2', x_3' к неподвижной системе координат x_1, x_2, x_3 , т.е. преобразованию $x_i' = g_{ik} x_k$, может быть выражена через три параметра. Известны разные параметризации трехмерной ортогональной матрицы, в частности, ее можно параметризовать с помощью трех углов Эйлера. В зависимости от различных параметризаций матрицы g_{ik} мы получим различные выражения для операторов составляющих момента количества движения в координатном представлении. Очевидно, что разделение переменных в системе операторных уравнений (4), если такое вообще существует, возможно только при определенной параметризации матрицы g_{ik} .

Пусть параметрами, определяющими вращение, будут углы Эйлера α, β, γ , определенные таким образом, что матрица вращения $g_{ik}(\alpha, \beta, \gamma)$ имеет вид^{/24,26,33/} (см. рис. I) :

$$g_{ik}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

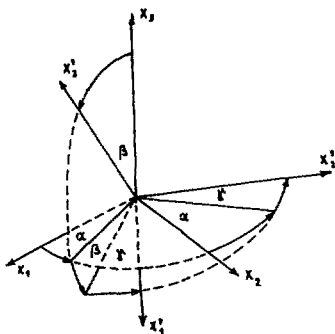


Рис. I

При таком введении углов Эйлера углы α, β представляют собой соответственно полярный угол и азимут направления оси x_3' по отношению к осям x_1, x_2, x_3 и углы $\gamma - \alpha, \beta$ являются соответственно полярным и азимутальным углами направления оси x_2' по отношению к осям x_1', x_2', x_3' . Полагая

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta - \alpha}{2}, & \chi_2 &= \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}, \\ \chi_3 &= \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\delta - \alpha}{2}, & \chi_4 &= \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}, \end{aligned}$$

можно матрицу g_{ik} выразить через координаты точки на единичной сфере в четырехмерном евклидовом пространстве

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_4^2 = 1$$

следующим образом

$$g_{ik} = (2\chi_4^2 - 1) \delta_{ik} + 2(\chi_i \chi_k + \chi_4 \epsilon_{ikj} \chi_j).$$

На сфере в четырехмерном евклидовом пространстве существует шесть криволинейных ортогональных систем координат³⁴, однако ни одна

из этих параметризаций не приводит к разделению переменных в системе уравнений (4).

Выражения для операторов проекций момента количества движения на оси подвижной системы координат как функции углов Эйлера α, β, γ имеют вид^{33/2}:

$$\begin{aligned} \hat{J}_1' &= -i \left[-\frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \\ \hat{J}_2' &= -i \left[\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \beta} - \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \\ \hat{J}_3' &= -i \frac{\partial}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для наших дальнейших целей удобно выразить операторы проекций момента количества движения на оси подвижной и неподвижной систем координат как функции параметра α и координат точки на единичной сфере в трехмерном евклидовом пространстве, полагая

$$-\sin \beta \cos \gamma = \xi_1, \quad \sin \beta \sin \gamma = \xi_2, \quad \cos \beta = \xi_3. \quad (15)$$

В этом случае для операторов проекций момента на оси подвижной системы координат получаем выражения

$$\hat{J}_1' = -\hat{L}_1 + \frac{\xi_1}{1-\xi_3^2} \hat{P}_\alpha, \quad \hat{J}_2' = -\hat{L}_2 + \frac{\xi_2}{1-\xi_3^2} \hat{P}_\alpha, \quad \hat{J}_3' = -\hat{L}_3, \quad (16)$$

где $\hat{P}_\alpha = -i \frac{\partial}{\partial \alpha}$ и операторы \hat{L}_i представляют собой операторы поворота на единичной сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$

$$\hat{L}_i = -i \epsilon_{ijk} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_k}. \quad (17)$$

Операторы \hat{L}_i удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i e_{ijk} \hat{L}_k. \quad (18)$$

Из явного вида операторов (16) нетрудно получить также операторы \hat{J}_i проекций момента на оси неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 , учитывая, что

$$\hat{J}_i = g_{ki} \hat{J}'_k. \quad (19)$$

Из (18) непосредственно следует, что $\hat{J}_3 = \hat{p}_\alpha$. Вместо операторов \hat{J}_1 и \hat{J}_2 удобно рассматривать их линейные комбинации $\hat{J}_+ = \hat{J}_1 + i\hat{J}_2$ и $\hat{J}_- = \hat{J}_1 - i\hat{J}_2$. Операторы \hat{J}_\pm , выраженные через $\alpha, \xi_i, \hat{p}_\alpha, \hat{L}_i$, имеют вид

$$\hat{J}_\pm = -\frac{e^{\pm i\alpha}}{\sqrt{1 - \xi_3^2}} \left[\xi_3 \hat{p}_\alpha + \hat{L}_3 \pm i (\xi_2 \hat{L}_1 - \xi_1 \hat{L}_2) \right]. \quad (20)$$

Отметим также, что непосредственно из явного вида операторов \hat{J}'_i (16) с учетом соотношения

$$[\hat{L}_i, \xi_j] = i e_{ijk} \xi_k \quad (21)$$

следует, что они удовлетворяют коммутационным соотношениям (3).

Операторы \hat{J}'_i удовлетворяют коммутационным соотношениям (18) и коммутируют с операторами \hat{J}'_k , т.е. $[\hat{J}'_i, \hat{J}'_k] = 0$.

Волновые функции несимметричного волчка с нулевой проекцией момента на неподвижную ось. Сферо-конические функции

Итак, нам необходимо найти собственные волновые функции системы операторов

$$\left(\hat{L}_1 - \frac{\xi_1}{1-\xi_3^2} \hat{p}_\alpha\right)^2 + \left(\hat{L}_2 - \frac{\xi_2}{1-\xi_3^2} \hat{p}_\alpha\right)^2 + \hat{L}_3^2 = j(j+1), \quad (22)$$

$$a_1 \left(\hat{L}_1 - \frac{\xi_1}{1-\xi_3^2} \hat{p}_\alpha\right)^2 + a_2 \left(\hat{L}_2 - \frac{\xi_2}{1-\xi_3^2} \hat{p}_\alpha\right)^2 + a_3 \hat{L}_3^2 = 2\mathcal{E}_{j(\alpha)}(a_1, a_2, a_3).$$

Как было показано выше, в системе операторов (22) вместо оператора вращательной энергии можно рассматривать эквивалентный ему оператор

$$k^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \left(\hat{L}_1 - \frac{\xi_1}{1-\xi_3^2} \hat{p}_\alpha\right)^2 = \mu_{j(\alpha)}(k^2). \quad (23)$$

Система операторных уравнений (22), как было отмечено еще Крамерсом и Итманном^{/12/}, не допускает в общем случае разделения переменных. Учитывая, однако, вырождение собственных значений оператора вращательной энергии по отношению к квантовому числу m , можно положить $m = 0$. В этом частном случае, когда проекция момента количества движения на ось x_3 неподвижной системы координат равна нулю, система (22) переходит в систему двух операторных уравнений

$$\hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 = j(j+1), \quad (24a)$$

$$a_1 \hat{L}_1^2 + a_2 \hat{L}_2^2 + a_3 \hat{L}_3^2 = 2\mathcal{E}_{j(\alpha)}(a_1, a_2, a_3),$$

которая допускает разделение переменных в эллиптической системе координат на сфере в трехмерном евклидовом пространстве^{/12, 29, 34-37/}. Система диагональных операторов на сфере в трехмерном евклидовом пространстве, эквивалентная системе операторов (24a), имеет вид

$$\hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 = j(j+1),$$

$$k^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \hat{L}_1^2 = \mu_{j(\alpha)}(k^2), \quad (24b)$$

причем собственное значение $\mu_{j,(\infty)}(k^2)$ связано с собственным значением $\tau_{j,(\infty)}(a_1, a_2, a_3)$ соотношением (12).

Собственные волновые функции системы операторов (24), представляющие собой наиболее общий набор диагональных операторов на сфере, называются сферо-коническими функциями. Будем их здесь обозначать через $|j, (\infty); k^2\rangle$. Эти функции и есть волновые функции несимметричного волчка с $m=0$. Построим теперь эти функции.

Эллиптическая система координат на сфере может быть задана несколькими параметризациями. Для выяснения свойств собственных значений $\tau_{j,(\infty)}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mu_{j,(\infty)}(k^2)$ и построения сферо-конических функций удобно рассмотреть параллельно алгебраическую (формулы "а") и тригонометрическую (формулы "б") формы эллиптической системы координат на сфере.

Алгебраическая форма эллиптической системы координат на сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ имеет вид

$$\xi_1^2 = \frac{(a_1 - \varphi)(a_1 - \varphi')}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad \xi_2^2 = \frac{(a_2 - \varphi)(a_2 - \varphi')}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)}, \quad \xi_3^2 = \frac{(a_3 - \varphi)(a_3 - \varphi')}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)},$$

$$d\xi_i^2 = H_\varphi^2 d\varphi^2 + H_{\varphi'}^2 d\varphi'^2 = -\frac{1}{4}(\varphi - \varphi') \left[\frac{d\varphi^2}{P(\varphi)} - \frac{d\varphi'^2}{P(\varphi')} \right],$$

$$P(\varphi) = (\varphi - a_1)(\varphi - a_2)(\varphi - a_3) = \varphi^3 - g_1\varphi^2 + g_2\varphi - g_3 \leq 0, \quad P(\varphi') \geq 0, \quad (25a)$$

$$a_1 \geq \varphi \geq a_2 \geq \varphi' \geq a_3, \quad g_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad g_2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1, \\ = \frac{1}{2}(g_1^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2), \quad g_3 = a_1 a_2 a_3 = \frac{1}{3}(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - g_1^3) + g_1 g_2.$$

Вводя вместо параметров φ, φ' , определяющих положение точки на единичной сфере, новые параметры ψ, ψ' соотношениями

$$\varphi = a_1 - (a_1 - a_2) \cos^2 \psi, \quad \varphi' = a_3 + (a_2 - a_3) \cos^2 \psi',$$

получаем эллиптическую систему координат в тригонометрической форме

$$\xi_1 = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi} \cos \varphi, \quad \xi_2 = \sin \psi \sin \varphi, \quad \xi_3 = \cos \psi \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi},$$

$$d\xi_i^2 = H_\psi^2 d\psi^2 + H_\varphi^2 d\varphi^2 = (k^2 \sin^2 \psi + k'^2 \sin^2 \varphi) \left[\frac{d\psi^2}{1 - k^2 \cos^2 \psi} - \frac{d\varphi^2}{1 - k'^2 \cos^2 \varphi} \right], \quad (25b)$$

$$0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad k^2 = \sin^2 f = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad k'^2 = \cos^2 f = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3},$$

где $2f$ - расстояние между фокусами эллиптической системы координат на сфере. Четыре фокуса эллиптической системы координат находятся в точках $(\pm k, 0, \pm k')$ /29,34/. Отметим, что эллиптическая система координат при $k^2 = 0$ и $k^2 = 1$, как это непосредственно видно из формул (25b), переходит в полярную систему координат на сфере с осью симметрии вдоль оси ξ_3 и оси ξ_1 соответственно.

Выражая операторы \hat{L}_i через дифференциальные операторы от соответствующих переменных по формуле

$$\hat{L}_i = \frac{i}{H_\varphi H_\psi} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_i}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \frac{i}{H_\varphi H_\psi} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi_i}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \right),$$

непосредственно можно убедиться в том, что в эллиптической системе координат, записанной в алгебраической форме (25a), диагональными операторами являются операторы (24a), а в эллиптической системе координат, записанной в тригонометрической форме (24b), диагональными операторами является оператор (24b).

Система диагональных операторов (24) вместе с коммутационными соотношениями (18) инвариантна по отношению к одновременному изменению знаков любых двух из операторов \hat{L}_i , что формально

совпадает с симметрией точечной группы D_2 . Группа D_2 кроме тождественного элемента, содержит три операции поворота на угол π трех декартовых осей координат^{/27/}. Неприводимые представления точечной группы D_2 приведены в таблице I. Согласно этому, сферо-конические функции должны распадаться на

Таблица I

D_2	e	$C_{\xi_1}^2$	$C_{\xi_2}^2$	$C_{\xi_3}^2$	$(C_{\xi_1}^2, C_{\xi_3}^2)$
A	I	I	I	I	(++)
B_1	I	-I	-I	I	(-+)
B_2	I	-I	I	-I	(--)
B_3	I	I	-I	-I	(+-)

четыре класса, преобразующихся по неприводимым представлениям A, B_1 , B_2 , B_3 группы D_2 . Для функций, относящихся к этим представлениям, часто используется обозначение $(C_{\xi_1}^2, C_{\xi_3}^2)$, приведенное в последнем столбце таблицы I, которое показывает их поведение при повороте на угол π вокруг осей ξ_1 и осей ξ_3 .

Отметим одно важное свойство собственных значений $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ второго оператора в (24б), связанное с преобразованием $k^2 \rightarrow k'^2$. Взаимная формальная замена k^2, ψ на k'^2, ψ' в эллиптической системе координат (25б) приводит к преобразованию

$$\begin{aligned} \xi_1 &\rightarrow \xi_3, & \xi_2 &\rightarrow \xi_2, & \xi_3 &\rightarrow \xi_1, \\ \hat{L}_1 &\rightarrow -\hat{L}_3, & \hat{L}_2 &\rightarrow -\hat{L}_2, & \hat{L}_3 &\rightarrow -\hat{L}_1, \end{aligned} \quad (26)$$

которое соответствует переходу от правой системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 к левой системе координат ξ_3, ξ_2, ξ_1 . Из преобразования второго оператора в (24б) по отношению к преобразованию (26) следует, что

$$\mu_{j(\alpha\epsilon)}(k^2) = -\mu_{j(-\alpha\epsilon)}(k^2). \quad (27)$$

Свойство (27) собственного значения $\mu_{j(\alpha\epsilon)}(k^2)$ позволяет ограничиться значениями k^2 из интервала $[0, 1/2]$. Это особенно важно при составлении таблиц собственного значения $\mu_{j(\alpha\epsilon)}(k^2)$ для разных j . Свойство собственного значения $\tau_{j(\alpha\epsilon)}(a_1, a_2, a_3)$, аналогичное свойству (27) собственного значения $\mu_{j(\alpha\epsilon)}(k^2)$, имеет вид

$$\tau_{j(\alpha\epsilon)}(a_1, a_2, a_3) = -\tau_{j(-\alpha\epsilon)}(-a_3, -a_2, -a_1). \quad (28)$$

Систему операторных уравнений (24) можно с помощью явных выражений для операторов \hat{L}_i записать в другом виде

$$\begin{aligned} -(\varphi - \varphi')^{-1} \left[\hat{D}(a_1, a_2, a_3, \varphi) + \hat{D}(-a_3, -a_2, -a_1, \varphi') \right] &= j(j+1), \\ (\varphi - \varphi')^{-1} \left[\varphi \hat{D}(a_1, a_2, a_3, \varphi) + \varphi' \hat{D}(-a_3, -a_2, -a_1, \varphi') \right] &= 2\tau_{j(\alpha\epsilon)}(a_1, a_2, a_3), \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} -(k^2 \sin^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi')^{-1} \left[\hat{D}(k^2; \psi) + \hat{D}(k'^2; \psi') \right] &= j(j+1), \\ -(k^2 \sin^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi')^{-1} \left[k'^2 \sin^2 \psi' \hat{D}(k^2; \psi) - k^2 \sin^2 \psi \hat{D}(k'^2; \psi') \right] &= \mu_{j(\alpha\epsilon)}(k^2), \end{aligned} \quad (29b)$$

где через $\hat{D}(a_1, a_2, a_3, \varphi)$ и $\hat{D}(k^2; \psi)$ обозначены дифференциальные операторы

$$\hat{D}(a_1, a_2, a_3; \varrho) = 4\sqrt{-\mathcal{P}(\varrho)} \frac{d}{d\varrho} \sqrt{-\mathcal{P}(\varrho)} \frac{d}{d\varrho},$$

$$\hat{D}(k^2; \psi) = \sqrt{1-k^2\cos^2\psi} \frac{d}{d\psi} \sqrt{1-k^2\cos^2\psi} \frac{d}{d\psi}.$$

Если волновые функции системы операторов (29) искать в виде

$$\Lambda_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3; \varrho) \Lambda'_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3; \varrho') \text{ и } \tilde{\Lambda}_{j(\infty)}(k^2; \psi) \tilde{\Lambda}'_{j(\infty)}(k^2; \psi'),$$

то в системе уравнений (29) переменные разделяются и функции

$\Lambda_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3; \varrho)$ и $\tilde{\Lambda}_{j(\infty)}(k^2; \psi)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям Ламе

$$\left[\hat{D}(a_1, a_2, a_3; \varrho) + j(j+1)\varrho + 2\tau_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3) \right] \Lambda_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3; \varrho) = 0, \quad (30a)$$

$$\left[\hat{D}(k^2; \psi) + j(j+1)k^2\sin^2\psi + \mu_{j(\infty)}(k^2) \right] \tilde{\Lambda}_{j(\infty)}(k^2; \psi) = 0, \quad (30b)$$

записанным в алгебраической и тригонометрической формах

соответственно. Таким же дифференциальным уравнениям удовлетворяют и функции $\Lambda'_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3; \varrho')$ и $\tilde{\Lambda}'_{j(\infty)}(k^2; \psi')$, если в случае последней учесть свойство (27) собственного значения $\mu_{j(\infty)}(k^2)$.

Дифференциальное уравнение Ламе относится к уравнениям класса Фукса. Оно имеет три конечных особых точки и особую регулярную точку на бесконечности. Его можно охарактеризовать

\mathcal{P} -символом Римана

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & -j/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & j/2 + 1/2 \end{matrix} \right\} = \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & k^{-2} & \infty \\ 0 & 0 & 0 & -j/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & j/2 + 1/2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= (\varrho - a_1)^{\frac{1}{2}\sigma_1} (\varrho - a_2)^{\frac{1}{2}\sigma_2} (\varrho - a_3)^{\frac{1}{2}\sigma_3} \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \infty \\ -\sigma_1/2 & -\sigma_2/2 & -\sigma_3/2 & -\frac{1}{2}(j-\sigma) \\ 1/2 & \sigma_1/2 & 1/2 - \sigma_2/2 & 1/2(j+\sigma+1) \end{matrix} \right\} =$$

$$= \cos^{\sigma_1} \psi \sin^{\sigma_2} \psi (1 - k^2 \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2} \sigma_3} P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & k^2 & \infty \\ \sigma_1/2 & -\sigma_1/2 & -\sigma_2/2 & -\frac{1}{2}(j-\sigma) \cos^2 \psi \\ \frac{1}{2} - \sigma_1/2 & \frac{1}{2} - \sigma_2/2 & \frac{1}{2} - \sigma_3/2 & \frac{1}{2}(j+\sigma+1) \end{array} \right\},$$

где $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ и показатели $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, согласно классификации сферо-конических функций, могут принимать значения, представленные в таблице 2.

Таблица 2

	j - четное					j - нечетное				
D_2	σ	σ_1	σ_2	σ_3	$\frac{1}{2}(j-\sigma+2)$	σ	σ_1	σ_2	σ_3	$\frac{1}{2}(j-\sigma+2)$
A	0	0	0	0	$\frac{1}{2}j+1$	3	I	I	I	$\frac{1}{2}(j-1)$
B_I	2	I	I	0	$\frac{1}{2}j$	I	0	0	I	$\frac{1}{2}(j+1)$
B_2	2	I	0	I	$\frac{1}{2}j$	I	0	I	0	$\frac{1}{2}(j+1)$
B_3	2	0	I	I	$\frac{1}{2}j$	I	I	0	0	$\frac{1}{2}(j+1)$

Из теории дифференциального уравнения Ламе следует, что в случае целочисленных j его решением является $2j+1$ линейно независимых функций, соответствующих $2j+1$ разным собственным значениям $\tau_{j(\sigma)}$ (a_1, a_2, a_3) или $\mu_{j(\sigma)}(k^2)$, так называемых многочленов Ламе [38-40]. Решения уравнений (30) представляются в виде степенных рядов

$$(q-a_1)^{\sigma_1/2} (q-a_2)^{\sigma_2/2} (q-a_3)^{\sigma_3/2} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(j-\sigma)} A_r(a_1, a_2, a_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) q^{(j-\sigma)-r} \quad (31a)$$

$$\cos^{\sigma_1} \psi \sin^{\sigma_2} \psi (1 - k^2 \cos^2 \psi)^{\sigma_3/2} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(j-\sigma)} B_r(k^2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) (k \sin \psi)^{j-\sigma-2r} \quad (31б)$$

Коэффициенты $A_r(a_1, a_2, a_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in A_r$ и $B_r(k^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in B_r$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям, вытекающим из дифференциальных уравнений (30):

$$\begin{aligned}
 & 2r(2r-2j-1)A_r + \\
 & + [(2j+3-4r)G_1 - (j+2-2r)^2g_1 - 2\tau(a_1, a_2, a_3)]A_{r+1} + \\
 & + (j-\sigma+4-2r)[2G_2 + (j-\sigma+3-2r)g_2]A_{r-1} - \\
 & - (j-\sigma+4-2r)(j-\sigma+6-2r)g_3A_{r-2} = 0, \quad A_r \equiv 0, \quad p < 0,
 \end{aligned} \tag{32a}$$

$$\begin{aligned}
 & 2r(2j+1-2r)B_r + \\
 & + [(j+2-\sigma_1-2r)^2k^2 - (j+2-\sigma_3-2r)^2k'^2 + \mu(k^2)]B_{r+1} + \\
 & + (j-\sigma+4-2r)(j-\sigma+3+2\sigma_2-2r)k^2k'^2B_{r-2} = 0, \quad B_r \equiv 0, \quad p < 0.
 \end{aligned} \tag{32б}$$

В формуле (32a) введены обозначения

$$G_1 = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3, \quad G_2 = a_2a_3\sigma_1 + a_3a_1\sigma_2 + a_1a_2\sigma_3, \tag{33}$$

которые инвариантны относительно преобразования циклических перестановок

$$\begin{aligned}
 a_1 & \rightarrow a_2, \quad a_2 \rightarrow a_3, \quad a_3 \rightarrow a_1, \\
 \sigma_1 & \rightarrow \sigma_2, \quad \sigma_2 \rightarrow \sigma_3, \quad \sigma_3 \rightarrow \sigma_1.
 \end{aligned}$$

Условие, определяющее собственные значения $\tau(a_1, a_2, a_3)$ к $\mu(k^2)$, имеет вид $A_{\frac{1}{2}(j-\sigma+2)} = 0$ и $B_{\frac{1}{2}(j-\sigma+2)} = 0$ соответственно, и представляет собой алгебраическое уравнение степени $n = \frac{1}{2}(j-\sigma) + 1$. В невырожденном случае $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ ($0 < k^2 < 1$) это уравнение имеет $\frac{1}{2}(j-\sigma) + 1$ различных корней. Уравнение, определяющее собственные значения $\tau(a_1, a_2, a_3)$,

записывается в виде равного нулю определителя (34), который приведен на стр. 23. Аналогичный определитель (с ненулевыми членами на диагонали, над и под диагональю) можно выписать и для собственного значения $\mu(k^2)$. Из такого определителя вычислены и составлены таблицы собственных значений $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ для $j = 2, 3, \dots, 13$, которые приведены в Приложении.

Обозначим корни алгебраического уравнения, представленного в виде (34), через $\tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3)$, $\lambda = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(j-\sigma+2)$, так чтобы выполнялось неравенство

$$\tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \leq \tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda+1)}(a_1, a_2, a_3).$$

Существует однозначная связь между корнями $\tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3)$ уравнения (34) и собственными значениями оператора вращательной энергии, обозначаемыми ранее как $\tau_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3)$

$$\tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \equiv \tau_{j(-j+2\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\lambda)}(a_1, a_2, a_3).$$

Используя теорему о собственных значениях степеней квадратной матрицы /41/, можно для собственных значений $\tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3)$ в принципе найти n правил сумм, которые в конечном итоге эквивалентны решению алгебраического уравнения степени n или табулированию его корней. Правила сумм для различных степеней $K = 1, 2, \dots, n$ собственного значения $\tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3)$, как это следует из его однородности, в общем, записываются в виде:

$$2^K \sum_{\lambda=1}^n \left[\tau_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \right]^K = \sum_{\substack{\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 \\ \beta_1+2\beta_2=K}} a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{\beta_1 \beta_2} (j, n) g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} G_1^{\beta_1} G_2^{\beta_2}$$

$(2j-1)G_1 - j^2g_1 - 2\tau$	$-2j(2j-1)$	0	0	0	0
$4(n-1)G_2 + 2(n-1)(2n-3)g_2$	$(2j-5)G_1 - (j-2)^2g_1 - 2\tau$	$-2j(2j-3)$	0	0	0
$-4(n-1)(n-2)g_3$	$4(n-2)G_1 + 2(n-2)(2n-5)g_2 - (j-4)^2g_1 - 2\tau$	$(2j-9)G_1 - (j-4)^2g_1 - 2\tau$	0	0	0
0	$-4(n-2)(n-3)g_3 + 2(n-3)(2n-7)g_2$	$4(n-3)G_1 + 2(n-3)(2n-7)g_2$	0	0	0
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
0	0	0	$-2(n-3)(2j+2n)$	0	0
0	0	0	$(2j+4n)G_1 - (j+6-2n)^2g_1 - 2\tau$	$-2(n-2)(2j+5-2n)$	0
0	0	0	$4 \cdot 2 \cdot G_2 \cdot 2 \cdot 2g_2 - (j+4-2n)^2g_1 - 2\tau$	$(2j+7-4n)G_1 - (2j+7-4n)G_1$	$-2(n-1)(2j+3-2n)$
0	0	0	$-4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot g_3$	$4 \cdot 1 \cdot G_2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot g_2 - (j+2-2n)^2g_1 - 2\tau$	$(2j+3+4n)G_1$

$= 0$

(34)

где $\alpha_{a_1, a_2, a_3}^{j, n}$ (j, n) - некоторые постоянные. Эти правила сумм для $n = 1, 2, 3$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{\lambda=1}^n \tau_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) &= \left[(j+1+n)^2 - \frac{1}{3}(n^2-1) \right] g_1 - (2j+1-2n) G_1, \\ \frac{4}{n} \sum_{\lambda=1}^n \left[\tau_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \right]^2 &= \left[\frac{2}{n} \sum_{\lambda=1}^n \tau_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \right]^2 + \\ &+ \frac{4}{3}(n^2-1) \left\{ \left[G_1 - (j+1-n)g_1 \right]^2 - (2j+1-n) \left[2G_2 + (n-1)g_2 \right] \right\} + \\ &+ \frac{4}{45}(n^2-1)(n^2-4)(g_1^2 - 3g_2), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{8}{n} \sum_{\lambda=1}^n \left[\tau_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \right]^3 &= -2 \left[\frac{2}{n} \sum_{\lambda=1}^n \tau_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \right]^3 + \\ &+ 3 \left[\frac{2}{n} \sum_{\lambda=1}^n \tau_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \right] \left[\frac{4}{n} \sum_{\lambda=1}^n \tau_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{j(\lambda)}(a_1, a_2, a_3) \right] + \\ &+ \frac{8}{15}(n^2-1)(n^2-4) \left\{ 2g_1 \left[G_1 - (j+1-n)g_1 \right]^2 + 6G_1G_2 + 6jG_1g_2 - \right. \\ &- 2(j+2-2n)g_1G_2 + 3(2j+1-n)^2g_3 - \left[6(j+1-n)^2 + 4(n-1)(j+1-n) - \right. \\ &\left. \left. - (n-1)^2 \right] g_1g_2 \right\} + \frac{8}{9+5}(n^2-1)(n^2-4)(n^2-16)(2g_1^3 - 9g_1g_2 + 27g_3). \end{aligned}$$

Ненормированные сферо-конические функции, построенные из многочленов Ламе, имеют вид

$$\xi_1^{\sigma_1} \xi_2^{\sigma_2} \xi_3^{\sigma_3} \left[\sum_{r=0}^{n-1} A_r(a_1, a_2, a_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \varrho^{n-1-r} \right] \quad (36a)$$

$$\left[\sum_{r=0}^{n-1} A_r(a_1, a_2, a_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \varrho^{n-1-r} \right],$$

$$\xi_1^{\sigma_1} \xi_2^{\sigma_2} \xi_3^{\sigma_3} \left[\sum_{r=0}^{n-1} B_r(k^2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) (k \sin \psi)^{2n-2-2r} \right] \quad (36b)$$

$$\left[\sum_{r=0}^{n-1} B_r(k^2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) (k \sin \psi)^{2n-2-2r} \right].$$

В формуле (36b) следует учесть следующее свойство коэффициентов

$B_r(k^2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ при взаимной замене k^2 на k'^2 и σ_1 на σ_3 , которое непосредственно вытекает из (32d)

$$B_r(k'^2; \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = (-1)^r B_r(k^2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Если обозначить через $\theta_i = \theta_i(a_1, a_2, a_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ корни полинома

$$\sum_{r=0}^{n-1} A_r(a_1, a_2, a_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \varrho^{n-1-r} = 0$$

и учесть, что справедливо тождество

$$\frac{\xi_1^2}{\theta_i - a_1} + \frac{\xi_2^2}{\theta_i - a_2} + \frac{\xi_3^2}{\theta_i - a_3} = \frac{(\theta_i - \varrho)(\theta_i - \varrho')}{\mathcal{P}(\theta_i)},$$

то сферо-конические функции с точностью до нормировочного множителя можно представить в компактной форме

$$\xi_1^{\sigma_1} \xi_2^{\sigma_2} \xi_3^{\sigma_3} \prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(j-\sigma)} \left(\frac{\xi_1^2}{\theta_i - a_1} + \frac{\xi_2^2}{\theta_i - a_2} + \frac{\xi_3^2}{\theta_i - a_3} \right). \quad (37)$$

Сферо-конические функции нормированы соотношением

$$\iint_{\xi_i=1} [|j, (\infty); k^2 \rangle]^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = 1.$$

Сложность вида сферо-конической функции определяется в конечном итоге степенью алгебраического уравнения, из которого находятся собственные значения $\tau_{j(\infty)}(a_1, a_2, a_3)$ или $\mu_{j(\infty)}(k^2)$. При вычислении нормировочных постоянных и также при вычислении матричных элементов от сферо-конических функций следует использовать следующее рекуррентное соотношение для встречающихся интегралов^{/42/}

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{q^r dq}{\sqrt{-P(q)}} = \frac{2(r-1)}{2r-1} g_1 \int_{a_1}^{a_2} \frac{q^{r-1} dq}{\sqrt{-P(q)}} -$$

$$- \frac{2r-3}{2r-1} g_2 \int_{a_1}^{a_2} \frac{q^{r-2} dq}{\sqrt{-P(q)}} + \frac{2(r-2)}{2r-1} g_3 \int_{a_1}^{a_2} \frac{q^{r-3} dq}{\sqrt{-P(q)}},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(k \sin \psi)^{2r} d\psi}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \psi}} = \frac{2(r-1)}{2r-1} (2k^2-1) \int_0^{\pi/2} \frac{(k \sin \psi)^{2r-2} d\psi}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \psi}} + \frac{2r-3}{2r-1} k^2 \int_0^{\pi/2} \frac{(k \sin \psi)^{2r-4} d\psi}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \psi}}.$$

С помощью этих соотношений все встречающиеся интегралы можно свести к интегралам вида

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{d\varphi}{2\sqrt{-P(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{a_1 - a_3}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} = \frac{K(k)}{\sqrt{a_1 - a_3}}, \quad \int_{a_1}^{a_2} \frac{\varphi d\varphi}{2\sqrt{-P(\varphi)}} =$$

$$= \frac{a_2 K(k)}{\sqrt{a_1 - a_3}} + \sqrt{a_1 - a_3} \int_0^{\varphi_0} \frac{(k \sin \psi)^2 d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} = \sqrt{a_1 - a_3} E(k) + \frac{a_3 K(k)}{\sqrt{a_1 - a_3}},$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, которые, как известно, удовлетворяют соотношению Лежандра

$$E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \frac{1}{2}\pi.$$

При вычислениях интегралов от сферо-конических функций, записанных в форме (37), следует пользоваться формулой^{/42/}

$$\int_{\xi_1=1}^{\xi_1=2\alpha_1} \int_{\xi_2=1}^{\xi_2=2\alpha_2} \int_{\xi_3=1}^{\xi_3=2\alpha_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = 4\pi \frac{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!(2\alpha_3)!(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 1)!}.$$

Приведем здесь нормированные сферо-конические функции для низших значений j и низших степеней уравнения, определяющего собственные значения $\tau_{j(\sigma\sigma)}(a_1, a_2, a_3)$. Для $j = \sigma$, $\sigma = \sigma_1 - \sigma_3$ (см. таблицу 2)

$$2\tau_{\sigma(\sigma_1 - \sigma_3)}(a_1, a_2, a_3) = \sigma^2 g_1 - (2\sigma - 1)G_1,$$

$$|\sigma, (\sigma_1 - \sigma_3); k^2\rangle = \sqrt{\frac{\sigma_1! \sigma_2! \sigma_3! (2\sigma + 1)!}{4\pi (2\sigma_1)!(2\sigma_2)!(2\sigma_3)! \sigma!}} \xi_1^{\sigma_1} \xi_2^{\sigma_2} \xi_3^{\sigma_3}.$$

Для $j = \sigma + 2$, $\sigma = \sigma_1 - \sigma_3 \pm 2$ имеем два собственных значения

$$2\mathcal{C}_{\sigma+2}(\sigma, \sigma_3 \pm 2)(a_1, a_2, a_3) = (\sigma^2 + 2\sigma + 2)g_1 - (2\sigma + 1)G_1 \pm 2\sqrt{D},$$

$$D = [G_1 - (\sigma + 1)g_1]^2 - (2\sigma + 3)(2G_2 + g_2)$$

с соответствующими нормированными сферо-коническими функциями

$$|\sigma+2, (\sigma, \sigma_3 \pm 2); k^2\rangle = \sqrt{\frac{\sigma_1! \sigma_2! \sigma_3! (2\sigma+5)!}{64\pi (2\sigma_1)! (2\sigma_2)! (2\sigma_3)! (\sigma+2)!}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\}^{\sigma_1} \left\{ \begin{matrix} \sigma_2 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\}^{\sigma_2} \left\{ \begin{matrix} \sigma_3 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\}^{\sigma_3}$$

$$\left[\pm \sqrt{\frac{(a_2 - \theta)(a_3 - \theta)}{\pm\sqrt{D}(a_1 - \theta)}} \xi_1^2 - \sqrt{\frac{(a_2 - \theta)(a_1 - \theta)}{\pm\sqrt{D}(a_2 - \theta)}} \xi_2^2 \mp \sqrt{\frac{(a_1 - \theta)(a_2 - \theta)}{\pm\sqrt{D}(a_3 - \theta)}} \xi_3^2 \right],$$

$$(2\sigma+3)\theta = (\sigma+1)g_1 - G_1 \mp \sqrt{D}.$$

В частности, для $j = 2$, $\sigma = 0$ имеем собственные значения

$$\mathcal{C}_{2(\pm 2)}(a_1, a_2, a_3) = g_1 \pm \sqrt{g_1^2 - 3g_2}$$

с соответствующими сферо-коническими функциями, относящимися к представлению A точечной группы D_2

$$|2, (\pm 2); k^2\rangle = \sqrt{\frac{5}{8\pi}} \left[\pm \sqrt{1 \pm \frac{1+k^2}{2\sqrt{1-k^2+k^4}}} \xi_1^2 - \sqrt{1 \mp \frac{2k^2-1}{2\sqrt{1-k^2+k^4}}} \xi_2^2 \mp \sqrt{1 \mp \frac{2-k^2}{2\sqrt{1-k^2+k^4}}} \xi_3^2 \right].$$

Вычисление матричных элементов со сферо-коническими функциями, как правило, сложно. Однако нетрудно получить правила отбора для этих матричных элементов, исходя из классификации сферо-конических функций относительно точечной группы D_2 . Вычисляя матричные элементы от составляющих ξ_i единичного вектора и от составляющих тензора $\xi_i \xi_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}$,

получаем для квантового числа j правила отбора $\Delta j = \pm 1$ и $\Delta j = 0, \pm 2$, соответственно. При этом ненулевыми являются только матричные элементы между сферо-коническими функциями, которые относятся к определенным представлениям точечной группы D_2 , как это схематически показано на рис.2.

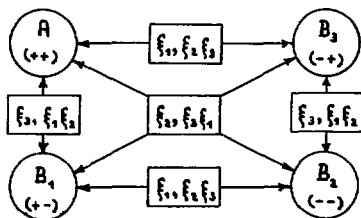


Рис.2

Матричные элементы от диагональных составляющих тензора

$\xi_i \xi_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}$ или их произвольной линейной комбинации отличны от нуля только между сферо-коническими функциями, относящимися к одному и тому же представлению точечной группы D_2 .

Волновые функции несимметричного волчка с $m \neq 0$. Разложение сферо-конических функций по сферическим функциям

Получить функции несимметричного волчка с $m \neq 0$, имея волновые функции с $m = 0$, можно двумя путями.

Во-первых, из перестановочных соотношений для операторов проекции момента на оси неподвижной системы координат

$$[\hat{J}_\pm, \hat{J}_3] = \pm \hat{J}_\pm \quad (38)$$

с учетом диагональности оператора \hat{J}_3 следует, что операторы \hat{J}_+ и \hat{J}_- действуют на волновые функции несимметричного волчка, которые будем обозначать через $|j, (\infty), m; k^2\rangle$ как операторы повышения и понижения (по отношению к квантовому числу m), т.е. имеет место

$$\hat{J}_\pm |j, (\infty), m; k^2\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, (\infty), m \pm 1; k^2\rangle. \quad (39)$$

Учитывая теперь явный вид операторов \hat{J}_\pm (20), можно непосредственно из сферо-конических функций получить остальные $2j$ функции несимметричного волчка⁴³, что формально записывается следующим образом:

$$|j, (\infty), \pm |m|; k^2\rangle = \sqrt{\frac{(j - |m|)!}{(j + |m|)!}} (\hat{J}_\pm)^{|m|} |j, (\infty); k^2\rangle. \quad (40)$$

Во-вторых, найдем волновые функции несимметричного волчка с $m \neq 0$, разложив на единичной сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ сферо-конические функции $|j, (\infty); k^2\rangle$ по хорошо известным в физике сферическим функциям $|j, m\rangle$. Положим

$$|j, (\infty); k^2\rangle = \sum_{m' = -j}^j a_{(\infty) m'}(k^2) |j, m'\rangle, \quad (41)$$

$$\sum_{m' = -j}^j |a_{(\infty) m'}(k^2)|^2 = 1, \quad \infty = -j, -j+1, \dots, j.$$

Коэффициенты $a_{(\infty)m'}(k^2)$ в (41) определяются из системы

$2j+1$ линейных уравнений, которые получаются, если на функции (41) подействовать оператором $k^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \hat{L}_4^2$.

Эта система уравнений имеет вид

$$\sum_{m''=j}^j \left[\langle j, m' | k^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \hat{L}_4^2 | j, m'' \rangle - \mu_{j(\infty)}(k^2) \delta_{m', m''} \right] a_{(\infty)m''}(k^2) = 0, \quad (42)$$

$m'' = -j, -j+1, \dots, j$

и допускает всегда решение, так как ее определитель тождественно равен нулю. Ненулевые матричные элементы от сферических функций для операторов \hat{L}_4^2 и \hat{L}_3^2 в (42), как известно, имеют вид^[26,27]

$$\langle j, m' | \hat{L}_3^2 | j, m' \rangle = m'^2, \quad \langle j, m' | \hat{L}_4^2 | j, m' \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - m'^2],$$

$$\langle j, m'+2 | \hat{L}_4^2 | j, m' \rangle = \frac{1}{4} \sqrt{(j-m')(j-m'-1)(j+m'+1)(j+m'+2)}.$$

Разложение (41) является разложением функций несимметричного волчка с нулевой проекцией момента на неподвижную ось.

Повернем теперь систему координат так, чтобы проекция момента на неподвижную ось в новой системе координат была отлична от нуля.

При этом повороте сферические функции $|j, m'\rangle$ преобразуются согласно формуле

$$|j, m'\rangle = \sum_{m=j}^j D_{m', m}^j(-\delta', -\beta', \alpha') |j, m\rangle,$$

и, следовательно,

$$|j, (\infty); k^2\rangle = \sum_{m=j}^j a_{(\infty)m'}(k^2) D_{m, m'}^j(\alpha', \beta', \delta') |j, m\rangle. \quad (43)$$

Очевидно, что коэффициенты у функций $|j, m\rangle$ в (43) с точностью до постоянной и являются функциями несимметричного волчка с $m \neq 0$, т.е.

$$|j, (a), m; k^2\rangle = a \cdot \sum_{m^2=j}^j a_{(a), m, (k^2)} D_{m m, (a, \beta, \gamma)}^j. \quad (44)$$

Этот результат, однако, является разложением функций несимметричного волчка по функциям шарового волчка, и, следовательно, постоянная a в (44) равна $\sqrt{(2j+1)/8\pi^2}$. Из формулы (43) одновременно получаем интерпретацию функций несимметричного волчка: эти функции являются с точностью до постоянной коэффициентами преобразования от сферо-конических функций, заданных в одной системе координат, к сферическим функциям, заданным в другой (повернутой относительно первой) системе координат.

Важнейшие свойства функций несимметричного волчка с $m \neq 0$ совпадают со свойствами сферо-конических функций. В частности, справедлива классификация функций несимметричного волчка с $m \neq 0$ относительно точечной группы D_2 и верны те же правила отбора для матричных элементов, что и для сферо-конических функций.

Явный вид функций несимметричного волчка с $m \neq 0$ в конечном итоге не является существенным. Собственные значения оператора вращательной энергии найдем с помощью сферо-конических функций и матричные элементы от функций несимметричного волчка с $m \neq 0$ можно свести к вычислению матричных элементов от сферо-конических функций, используя известную теорему Вигнера-Экарта^{/44-46/}.

Коммутационные соотношения составляющих момента количества движения на оси неподвижной системы координат \hat{J}_i и элементов g_{jk} матрицы вращения (13) имеет вид

$$[\hat{J}_i, g_{jk}] = i \epsilon_{ikl} g_{jl}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно, из элементов g_{ik} можно образовать неприводимые тензорные операторы $T_i^{\lambda\mu}$, $i = 1, 2, 3$ ранга λ ($\mu = -\lambda, -\lambda+1, \dots, \lambda$), которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{J}_z, T_i^{\lambda\mu}] = \sqrt{(\lambda+\mu)(\lambda-\mu+1)} T_i^{\lambda, \mu+1}, \quad [\hat{J}_z, T_i^{\lambda\mu}] = \mu T_i^{\lambda\mu}.$$

В частности, три набора неприводимых тензорных операторов ранга 1 имеет вид

$$T_k^{1\pm 1} = g_{k1} \pm i g_{k2}, \quad T_k^{10} = g_{k3} = \xi_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Произвольный тензор, составленный из элементов матрицы вращения g_{ik} , можно разложить на сумму прямых произведений (коммутирующих) неприводимых тензоров $T_i^{\lambda_1\mu_1}, T_i^{\lambda_2\mu_2}, T_i^{\lambda_3\mu_3}$, действующих в пространстве функций $|j, (m), m; k^2\rangle$. Прямое произведение двух (или нескольких) неприводимых тензоров в общем случае приводимо^[24, 47]. Из двух неприводимых тензоров $T_i^{\lambda_1\mu_1}$ и $T_i^{\lambda_2\mu_2}$ можно образовать неприводимый тензор по формуле

$$T^{\lambda\mu} = \sum_{\mu_1 \mu_2} (\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu) T_i^{\lambda_1 \mu_1} T_i^{\lambda_2 \mu_2},$$

где через $(\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu)$ обозначен коэффициент Клебша-Гордана для группы трехмерных вращений^[48, 49]. Матричный элемент

от неприводимого тензорного оператора можно по теореме Вигнера-Экарта выразить через приведенный матричный элемент, который в свою очередь можно выразить через матричный элемент от сферо-конических функций. Можем написать

$$\langle j_1, (m_1), m_1; k^2 | T^{\lambda \mu} | j_1, (m_1), m_1; k^2 \rangle = (j_1, \lambda, m_1, \mu | j_1, m_1) \langle j_1, (m_1) || T^{\lambda} || j_1, (m_1) \rangle,$$

$$\langle j_1, (m_1); k^2 | T^{\lambda 0} | j_1, (m_1); k^2 \rangle = (j_1, \lambda, 0, 0 | j_1, 0) \langle j_1, (m_1) || T^{\lambda} || j_1, (m_1) \rangle,$$

и, следовательно,

$$\langle j_1, (m_1), m_1; k^2 | T^{\lambda \mu} | j_1, (m_1), m_1; k^2 \rangle = \frac{(j_1, \lambda, m_1, \mu | j_1, m_1)}{(j_1, \lambda, 0, 0 | j_1, 0)} \langle j_1, (m_1); k^2 | T^{\lambda 0} | j_1, (m_1); k^2 \rangle. \quad (45)$$

Таким образом, все матричные элементы от функций несимметричного волчка с $m \neq 0$ сводятся с помощью формулы (45) к вычислению матричных элементов от сферо-конических функций x^j

Покажем, наконец, что имеет место следующая формула для диагонального матричного элемента от оператора $e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2$

$$\begin{aligned} \langle j, (m), m; k^2 | e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2 | j, (m), m; k^2 \rangle = \\ = \frac{2 [3 m^2 - j(j+1)]}{j(j+1)(2j-1)(2j+3)} \varepsilon_{j(m)}(e_1, e_2, e_3), \end{aligned} \quad (46)$$

где постоянные $e_i = (3a_i - g)/3(a_i - a_3)$ связаны с k^2 формулами (10) и собственное значение $\varepsilon_{j(m)}(e_1, e_2, e_3)$ связано с собственным значением $\mu_{j(m)}(k^2)$ формулой (11) и с собственным значением $\tau_{j(m)}(a_1, a_2, a_3)$ формулой (12). Для доказательства соотношения

x) формула (45) просто означает, что для вычисления матричного элемента $\langle j_1, (m_1), m_1; k^2 | T^{\lambda \mu} | j_1, (m_1), m_1; k^2 \rangle$ мы совершили поворот в систему координат, в которой $m = 0$.

(46) усредним тензор $\xi_i \xi_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}$ по состоянию с заданным $j, \epsilon_{j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$ и m . Искомое среднее есть среднее оператора, который может выражаться только через операторы \hat{J}_i^j , т.е.

$$\xi_i \xi_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} = c_0 \left[\frac{1}{2} (\hat{J}_i^j \hat{J}_k^j + \hat{J}_k^j \hat{J}_i^j) - \frac{1}{3} j(j+1) \delta_{ik} \right], \quad (47)$$

где c_0 — некоторая постоянная, подлежащая определению. Для определения c_0 помножим равенство (47) слева на \hat{J}_i^j и справа на \hat{J}_k^j (суммирование по i и k). Из явного вида операторов \hat{J}_i^j (16) следует, что $\hat{J}_i^j \xi_i = \xi_k \hat{J}_k^j = \hat{p}_k = m$, так что слева имеем $m^2 - \frac{1}{3} j(j+1)$. Произведение $\hat{J}_i^j \hat{J}_k^j$ в правой части (47) заменяем его собственным значением $j^2(j+1)^2$ и произведение $\hat{J}_i^j \hat{J}_k^j \hat{J}_i^j \hat{J}_k^j$ вычисляем с помощью коммутационных соотношений (3):

$$\begin{aligned} \hat{J}_i^j \hat{J}_k^j \hat{J}_i^j \hat{J}_k^j &= \hat{J}_i^j \hat{J}_k^j \hat{J}_i^j \hat{J}_k^j + i \epsilon_{ijk} \hat{J}_i^j \hat{J}_j^j \hat{J}_k^j = \\ &= j^2(j+1)^2 - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \hat{J}_i^j (\hat{J}_j^j \hat{J}_k^j - \hat{J}_k^j \hat{J}_j^j) = \\ &= j(j+1)^2 - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} \hat{J}_i^j \hat{J}_l^j = j(j+1)[j(j+1) - 1]. \end{aligned}$$

После простых вычислений получаем для постоянной c_0 значение

$$c_0 = \frac{2[3m^2 - j(j+1)]}{j(j+1)(2j-1)(2j+3)}. \quad (48)$$

Если помножить обе стороны равенства (47) на $\epsilon_i \delta_{ik}$ и воспользоваться тем, что оператор $\epsilon_1 \hat{J}_1^j + \epsilon_2 \hat{J}_2^j + \epsilon_3 \hat{J}_3^j$ диагонален на функциях несимметричного волчка с собственным значением $\epsilon_{j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, то немедленно получаем равенство (46). В

частном случае максимальной возможной проекции момента на неподвижную ось $m = j$ из (46) получаем

$$\langle j, (\infty), j; k^2 | e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2 | j, (\infty), j; k^2 \rangle = \frac{2 E_{j(\infty)} (e_1, e_2, e_3)}{(j+1)(2j+3)}.$$

Соотношение (46) позволяет вычислить также среднее значение операторов $T_i^{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\xi_i^2 - 1)$, $i = 1, 2, 3$. Продифференцировав равенство (46) по k^2 , находим

$$\langle j, (\infty), m; k^2 | 3\xi_1^2 - 1 | j, (\infty), m; k^2 \rangle = C_0 \left[2j(j+1) + 3 \frac{d \mu_{j(\infty)}(k^2)}{d k^2} \right],$$

где постоянная C_0 определена формулой (48). Комбинируя это среднее с соотношением (46), получаем для других средних

$$\langle j, (\infty), m; k^2 | 3\xi_1^2 - 1 | j, (\infty), m; k^2 \rangle = C_0 \left[-j(j+1) + 3 \left[\mu_{j(\infty)}(k^2) - k^2 \frac{d \mu_{j(\infty)}(k^2)}{d k^2} \right] \right],$$

$$\langle j, (\infty), m; k^2 | 3\xi_3^2 - 1 | j, (\infty), m; k^2 \rangle = C_0 \left[-j(j+1) - 3 \left[\mu_{j(\infty)}(k^2) + k^2 \frac{d \mu_{j(\infty)}(k^2)}{d k^2} \right] \right].$$

Численное значение производной собственного значения $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ по k^2 можно с достаточной степенью точности найти из таблиц этого собственного значения, приведенных в Приложении.

Заключение

Повторим кратко основные этапы решения квантовомеханической проблемы несимметричного волчка, просуммируем приведенные выше результаты и сделаем также несколько замечаний.

Исходя из факта пространственного вырождения собственных значений оператора вращательной энергии, мы нашли эти собственные значения и соответствующие им функции несимметричного волчка для частного значения проекции момента на ось неподвижной системы координат (для $m = 0$). Функции несимметричного волчка в этом случае совпадают со сферо-коническими функциями, представляющими собой полную ортогональную систему функций в эллиптической системе координат на сфере в трехмерном евклидовом пространстве. Функции несимметричного волчка, соответствующие остальным $2j$ проекциям момента на неподвижную ось, построены формально из сферо-конических функций с помощью операторов повышения и понижения \hat{J}_{\pm} . Явный вид этих $2j$ функций, однако, несущественен, так как с помощью теоремы Вигнера-Экарта все матричные элементы от функций несимметричного волчка выражаются через матричные элементы от сферо-конических функций.

Сферо-конические функции, представляющие собой произведение двух полиномов Ламе и являющиеся одним из классов специальных функций, в настоящее время недостаточно изучены. Мы не можем, например, выписать в общем виде нормировочную постоянную, хотя она существует и, по-видимому, выражается в виде некоторой функциональной зависимости от собственных значений операторов, диагональных на этих функциях ^{X)}. Мы не

^{X)} Существует таблица полиномов Ламе для $j = 1, 2, \dots, 30$ с интервалом $0,1$ для $0 < k^2 < 1$ / 50%. Таблицы этих полиномов, однако, даны в точности до произвольной постоянной. Говорить о нормировочной постоянной полинома Ламе не имеет смысла, она существует только для сферо-конических функций.

знаем также рекуррентных соотношений между сферо-коническими функциями с разными j и в связи с этим встречаются определенные трудности при вычислении матричных элементов от этих функций. Хотелось бы поэтому обратить внимание на необходимость дальнейшего изучения сферо-конических функций в целом, как ортогональной системы функций на двумерной сфере.

Собственные значения оператора вращательной энергии, являющиеся функциями трех моментов инерции $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ находятся при заданном j из четырех алгебраических уравнений, записанных в виде равно нулю определителя (34). Для практических расчетов удобно выразить собственные значения

$$\tau_{j(\infty)}(J_1, J_2, J_3) \text{ через собственные значения } \mu_{j(\infty)}(k^2)$$

$$2\tau_{j(\infty)}(J_1, J_2, J_3) = \frac{1}{J_2} \left[j(j+1) - q \mu_{j(\infty)}(k^2) \right], \quad (49)$$

где

$$0 \leq k^2 = \frac{(J_2 - J_1) J_3}{(J_3 - J_1) J_2} \leq 1, \quad 0 \leq q = \frac{(J_3 - J_1) J_2}{J_1 J_3} < \infty.$$

Формула (49) описывает одновременно уровни энергии несимметричного волчка ($0 < k^2 < 1$, $0 < q < \infty$) симметричного вытянутого ($k^2 = 1$, $1 < q < \infty$) и сплюнутого ($k^2 = 0$, $0 < q < 1$) волчков, и также шарового волчка ($q = 0$). Собственные значения $\mu_{j(\infty)}(k^2)$, зависящие только от одного параметра $0 \leq k^2 \leq 1$, можно табулировать. Ввиду свойства (27) этого собственного значения достаточно при составлении таблиц ограничиться при заданном

j значениями k^2 из интервала $[0, \sqrt{2}]$ для $\alpha = -j, -j+1, \dots, j$
или значениями k^2 из интервала $[0, 1]$ для $\alpha = -j, -j+1, \dots, 0$.

Отметим два частных случая формулы (49) для двух встречающихся в физике моделей, когда три момента инерции системы выражаются через два параметра.

Для плоской молекулы имеет место $J_3 = J_1 + J_2$
и, следовательно,

$$2\tau_{j(\infty)}(J_1, J_2, J_1 + J_2) = \frac{1}{J_2} \left[j(j+1) + \frac{\mu_{j(\infty)}(k^2)}{\sqrt{1-k^2} [1 + \sqrt{1-k^2}]} \right],$$

так как в этом случае $J_1 = k^2 J_2$, $J_3 = (1+k^2) J_2$.
Таким образом, вращательные уровни энергии плоской молекулы с учетом масштабного множителя J_2^{-1} характеризуются одним параметром $0 \leq k^2 \leq 1$. Это позволяет продемонстрировать спектр вращательных уровней такой молекулы графически, как это показано на рис.3. Случай $k^2=0$ соответствует симметричная плоская молекула и случай $k^2=1$ соответствует линейная молекула (ротатор). В принципе можно графически изобразить в зависимости от k^2 также спектры энергетических переходов такой молекулы, как это, например, приведено в работе¹⁵ для переходов под влиянием внутреннего дипольного момента молекулы. В таких спектрах переходов наблюдается ряд закономерностей при изменении k^2 от нуля до единицы.

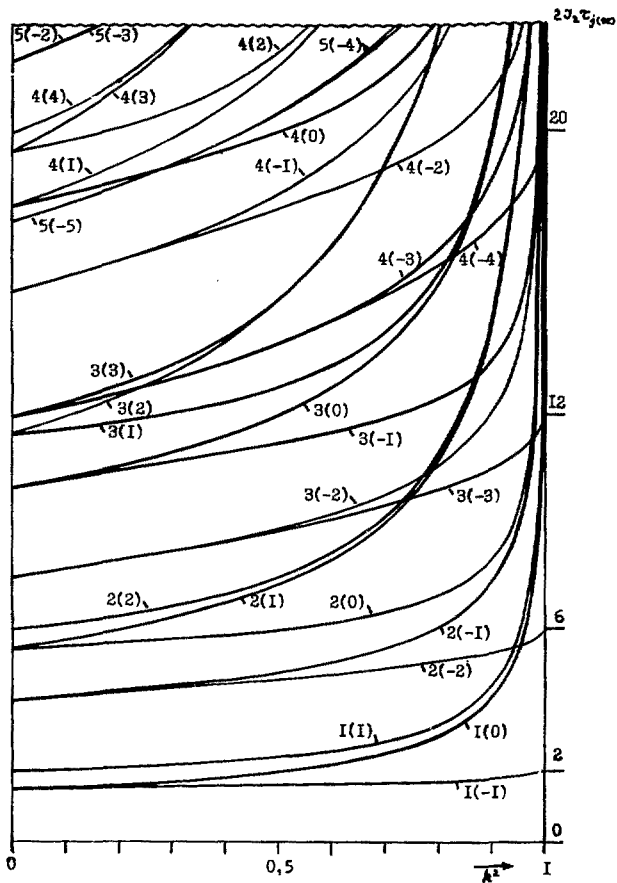


Рис. 3

В гидродинамической модели ядра в приближении жесткого неаксимального ротатора^{1-7/} моменты инерции ядра задаются параметром деформации β (в некоторых единицах) и параметром формы ядра γ следующим образом ($J_1 \gg J_2 \gg J_3$ для $0 \leq \gamma \leq \pi/6$, $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ для $\pi/2 \leq \gamma \leq 2\pi/3$)

$$J_k = \beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} k \right).$$

Следовательно, вращательные уровни энергии ядра имеют вид:

$$2\tau_{j\text{rot}}(\beta, \gamma) = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{j(j+1)}{\sin^2(\gamma - \pi/3)} - \left(\frac{1}{\sin^2(\gamma - 2\pi/3)} - \frac{1}{\sin^2 \gamma} \right) \mu_{j\text{rot}}(k^2) \right],$$

где

$$k^2 = \frac{16 \operatorname{tg}^3 \gamma}{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \gamma + 1)(\sqrt{3} - \operatorname{tg} \gamma)^3}.$$

Зависимость величины $\operatorname{tg} \gamma$ от k^2 определяется из алгебраического уравнения четвертой степени и она приведена на рис. 4. Из этого рисунка видно, что значениям $0 \leq \gamma \leq \pi/12$

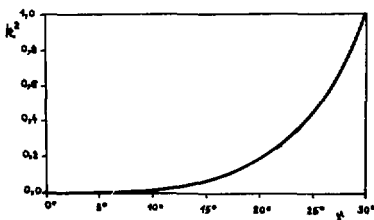


Рис. 4

соответствуют значения $0 \leq k^2 \leq 0,07$, т.е. для этих значений μ ядро представляет собой симметричный вытянутый волчок с небольшим нарушением аксиальной симметрии. Существенное нарушение аксиальной симметрии имеем для значений $\pi/9 \lesssim \gamma < \pi/6$.

Отметим, наконец, что функции несимметричного волчка, осуществляющие (с точностью до постоянной) неканоническое представление группы трехмерных вращений, находят применение и в других физических проблемах, таких как проблема квадрупольного взаимодействия, проблема квадрупольных моментов, разложения разных физических величин (амплитуд), заданных на группе трехмерных вращений и др.

Неканонические представления, очевидно, существуют также для других непрерывных групп, применяемых в физике. На них, однако, обращается недостаточно внимания, хотя они могут привести к интересным физическим результатам. Для группы трехмерных вращений мы попытались заполнить этот пробел. Мы обратили больше внимания на непосредственное применение в физике этого неканонического представления, чем на чисто математическую сторону вопроса.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Таблицы собственных значений $\mu_{j(m)}(k^2)$ для $j = 2, 3, \dots, 13$.

На стр. 45-61 приводятся таблицы собственных значений $\mu_{j(m)}(k^2)$ диагонального оператора (7) для квантового числа $j = 2, 3, \dots, 13$ и $m = -j, -j+1, \dots, 0$ с интервалом 0,05 для параметра k^2 . Одновременно под каждым значенком $\mu_{j(m)}(k^2)$ приведено значение

матричного элемента (46) с $m = 0$, т.е. среднее значение оператора $e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2$ на сферо-конических функциях, равно величине

$$\bar{E}_{j(\infty)}(k^2) = \frac{2 E_{j(\infty)}(e_1, e_2, e_3)}{(2j-1)(2j+3)} = \frac{2[(1-2k^2)j(j+1) - 3\mu_{j(\infty)}(k^2)]}{(2j-1)(2j+3)},$$

причем

$$\max \bar{E}_{j(\infty)}(k^2) = \bar{E}_{j(-j)}(1) = \frac{2j}{2j+3} < 1,$$

$$\min \bar{E}_{j(\infty)}(k^2) = \bar{E}_{j(j)}(0) = -\frac{2j}{2j+3} > -1.$$

Так как имеет место $-1 < \bar{E}_{j(\infty)}(k^2) < 1$, то в таблицах этой величины опущен нуль перед запятой. Численные значения собственного значения $E_{j(\infty)}(e_1, e_2, e_3)$ диагонального оператора (9) находятся с помощью соотношения (II) или с помощью приведенной выше их связи с величиной $\bar{E}_{j(\infty)}(k^2)$.

Таблицы вычислены на вычислительной машине с точностью семи значащих цифр. Здесь пригнаны шесть значащих цифр, причем шестая цифра дана с округлением. Ошибка приводимых в таблицах величин не превышает 0,5 последнего проводимого десятичного места.

В таблицах в левом крайнем столбце даны значения параметра k^2 в возрастающем порядке от 0,00 до 1,00 и в правом крайнем столбце даны значения $k'^2 = 1 - k^2$ в убывающем порядке. Столбцы таблиц обозначены символами $j(\infty) D_2$, где под D_2 подразумевается представление точечной группы D_2 , по которому преобразуются функции некоммуричного волчка, соответствующая данному $\mu_{j(\infty)}(k^2)$. Собственные значения $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ и величины $\bar{E}_{j(\infty)}(k^2)$ для $\infty > 0$ находятся из соотношений

$$\mu_{j(\infty)}(k^2) = -\mu_{j(-\infty)}(k'^2), \quad \bar{E}_{j(\infty)}(k^2) = -\bar{E}_{j(-\infty)}(k'^2).$$

Так, например,

$$\mu_{2(-2)}(0,05) = -\mu_{2(2)}(0,95) = -0,15192,$$

$$\bar{\epsilon}_{2(-2)}(0,05) = -\bar{\epsilon}_{2(2)}(0,95) = -0,557692.$$

Собственные значения $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ при $k^2 = 0$ ($k^2 = 1$) двукратно вырождены. Если параметр k^2 близок к нулю (или к единице), то собственные значения $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ можно рассчитывать по теории возмущений. Ограничиваясь вторым порядком теории возмущений, можно при $0 < k^2 \ll 1$ вместо таблиц использовать для $\mu_{j(\infty)}(k^2)$ выражения

$$\mu_{j(j)}(k^2) \approx -\frac{1}{2}j(j+1)k^2 - \frac{1}{32}(j-1)j(j+1)(j+2)k^4 + \dots$$

$$\mu_{j(-j+1)}(k^2) \approx 4 - \frac{1}{4}[3j(j+1)+2]k^2 - \frac{1}{128}(j-2)(j-1)(j+2)(j+3)k^4 + \dots$$

$$\mu_{j(-j+2)}(k^2) \approx 4 - \frac{1}{4}[j(j+1)+2]k^2 - \frac{1}{128}(j-2)(j-1)(j+2)(j+3)k^4 + \dots$$

$$\mu_{j(-j+3)}(k^2) \approx 4 - \frac{1}{2}[j(j+1)+4]k^2 - \frac{1}{192}[j^2(j+1)^2 - 18j(j+1) + 72]k^4 + \dots$$

$$\mu_{j(-j+4)}(k^2) \approx 4 - \frac{1}{2}[j(j+1)+4]k^2 + \frac{1}{192}[5j^2(j+1)^2 + 6j(j+1) - 72]k^4 + \dots$$

для $3 \leq m \leq j$

$$\mu_{j(-j-1+2m)}(k^2) = \mu_{j(-j+2m)}(k^2) \approx$$

$$\approx m^2 - \frac{1}{2}[j(j+1) + m^2] + \frac{1}{32}\left[2j(j+1) - 3m^2 + \frac{j^2(j+1)^2}{m^2-1}\right]k^4 + \dots$$

Один из авторов (И.Л.) выражает искреннюю благодарность доктору Р.Подгаецкому из Института технической кибернетики Словацкой Академии наук в Братиславе за составление программы и вычисление нижеприведенных таблиц на ЭВМ.

$k^2 \downarrow$	$2(-2) A$	$2(-1) B_2$	$2(0) B_2$	$3(-3) B_1$	$3(-2) B_2$	$3(-1) B_3$	$k^2 \downarrow$
0,00	0,00000 -,571428	1,00000 -,285714	1,00000 -,285714	0,00000 -,533333	1,00000 -,400000	1,00000 -,400000	1,00
0,05	-0,15192 -,557692	0,75000 -,300000	0,90000 -,257143	-0,30959 -,521279	0,52282 -,410157	0,82377 -,370163	0,95
0,10	-0,30788 -,545108	0,50000 -,314286	0,80000 -,228571	-0,63907 -,511876	0,04526 -,420632	0,64487 -,340684	0,90
0,15	-0,46815 -,533758	0,25000 -,328571	0,70000 -,200000	-0,98907 -,505209	-0,43573 -,431431	0,46288 -,311616	0,85
0,20	-0,63303 -,523723	0,00000 -,342857	0,60000 -,171428	-1,35959 -,501279	-0,91918 -,442558	0,27735 -,283020	0,80
0,25	-0,80278 -,515079	-0,25000 -,357143	0,50000 -,142857	-1,75000 -,500000	-1,40512 -,454017	0,08772 -,254970	0,75
0,30	-0,97764 -,507897	-0,50000 -,371428	0,40000 -,114286	-2,15913 -,501217	-1,89358 -,465811	-0,10666 -,227554	0,70
0,35	-1,15784 -,502240	-0,75000 -,395714	0,30000 -,085714	-2,58542 -,504722	-2,38458 -,477945	-0,30657 -,200876	0,65
0,40	-1,34356 -,498160	-1,00000 -,400000	0,20000 -,057143	-3,02710 -,510281	-2,87814 -,490419	-0,51293 -,175058	0,60
0,45	-1,53494 -,495696	-1,25000 -,414286	0,10000 -,285714	-3,48238 -,517651	-3,37427 -,503236	-0,72682 -,150243	0,55
0,50	-1,73205 -,494672	-1,50000 -,428571	0,00000 ,000000	-3,94949 -,526599	-3,87298 -,516398	-0,94949 -,126599	0,50
0,55	-1,93944 -,495696	-1,75000 -,442857	-0,10000 ,285714	-4,42642 -,536909	-4,37427 -,529903	-1,18238 -,104317	0,45
0,60	-2,14356 -,498160	-2,00000 -,457143	-0,20000 ,057143	-4,91293 -,548391	-4,87814 -,543752	-1,42710 -,083614	0,40
0,65	-2,35784 -,502240	-2,25000 -,471428	-0,30000 ,085714	-5,40657 -,560876	-5,38458 -,557945	-1,68542 -,064722	0,35
0,70	-2,57764 -,507897	-2,50000 -,485714	-0,40000 ,114286	-5,90666 -,574221	-5,89358 -,572478	-1,95913 -,047883	0,30
0,75	-2,80278 -,515079	-2,75000 -,500000	-0,50000 ,142857	-6,41228 -,588304	-6,40512 -,587350	-2,25000 -,033333	0,25
0,80	-3,03303 -,523723	-3,00000 -,514286	-0,60000 ,171428	-6,92265 -,603020	-6,91918 -,602558	-2,55959 -,021279	0,20
0,85	-3,26815 -,533758	-3,25000 -,528571	-0,70000 ,200000	-7,43712 -,618282	-7,43573 -,618098	-2,88907 -,011876	0,15
0,90	-3,50788 -,545108	-3,50000 -,542857	-0,80000 ,228571	-7,95513 -,634018	-7,95474 -,633966	-3,23907 -,005210	0,10
0,95	-3,75192 -,557692	-3,75000 -,557143	-0,90000 ,257143	-8,47622 -,650163	-8,47618 -,650157	-3,60959 -,001279	0,05
1,00	-4,00000 -,571428	-4,00000 -,571428	-1,00000 ,285714	-9,00000 -,666667	-9,00000 -,666667	-4,00000 ,000000	0,00
$k^2 \uparrow$	$2(2) A$	$2(1) B_1$	$2(0) B_2$	$3(3) B_3$	$3(2) B_2$	$3(1) B_1$	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	3(0) A	4(-4) A	4(-3) B ₃	4(-2) B ₂	4(-1) B ₁	4(0) A	$k^2 \downarrow$
0,00	4,00000 ,000000	0,00000 -,519480	1,00000 -,441558	1,00000 -,441558	4,00000 -,207792	4,00000 -,207792	1,00
0,05	3,60000 ,000000	-0,52864 -,508726	0,22011 -,450381	0,71979 -,411445	3,99850 -,202714	3,42715 -,200482	0,95
0,10	3,20000 ,000000	-1,11507 -,502473	-0,56940 -,459953	0,42789 -,382243	2,79386 -,197880	2,90892 -,188915	0,90
0,15	2,80000 ,000000	-1,75658 -,500513	-1,36825 -,470253	0,12213 -,354120	2,18583 -,193312	2,44232 -,173326	0,85
0,20	2,40000 ,000000	-2,44687 -,502354	-2,17612 -,481256	-0,20000 -,327278	1,57414 -,189028	2,02070 -,154231	0,80
0,25	2,00000 ,000000	-3,17800 -,507377	-2,99264 -,492933	-0,54138 -,301926	0,95850 -,185052	1,63570 -,132283	0,75
0,30	1,60000 ,000000	-3,94212 -,514971	-3,81741 -,505252	-0,90517 -,278325	0,33860 -,181407	1,27891 -,106137	0,70
0,35	1,20000 ,000000	-4,73240 -,524602	-4,65000 -,518182	-1,29464 -,256725	-0,28587 -,178120	0,94284 -,082376	0,65
0,40	0,80000 ,000000	-5,54333 -,535844	-5,48999 -,531687	-1,71293 -,237371	-0,91528 -,175217	0,62112 -,055497	0,60
0,45	0,40000 ,000000	-6,37064 -,548362	-6,33694 -,547335	-2,16270 -,220470	-1,55000 -,172727	0,30840 -,027917	0,55
0,50	0,00000 ,000000	-7,21110 -,561904	-7,19042 -,560292	-2,64575 -,206162	-2,19042 -,170682	0,00000 ,000000	0,50
0,55	-0,40000 ,000000	-8,06224 -,576279	-8,05000 -,575325	-3,16270 -,194496	-2,83694 -,169112	-0,30840 -,027917	0,45
0,60	-0,80000 ,000000	-8,92220 -,591340	-8,91528 -,590801	-3,71293 -,185423	-3,48999 -,168051	-0,62112 -,055497	0,40
0,65	-1,20000 ,000000	-9,78956 -,606978	-9,78587 -,606691	-4,29464 -,178803	-4,15000 -,167532	-0,94284 -,082376	0,35
0,70	-1,60000 ,000000	-10,6632 -,623107	-10,6614 -,622966	-4,90517 -,174429	-4,81741 -,167590	-1,27891 -,108137	0,30
0,75	-2,00000 ,000000	-11,5423 -,639660	-11,5415 -,639598	-5,54138 -,172056	-5,49264 -,168258	-1,63570 -,132283	0,25
0,80	-2,40000 ,000000	-12,4262 -,656584	-12,4259 -,656561	-6,20000 -,171428	-6,17612 -,169568	-2,02070 -,154231	0,20
0,85	-2,80000 ,000000	-13,3143 -,673838	-13,3142 -,673832	-6,87787 -,172301	-6,86825 -,171552	-2,44232 -,173326	0,15
0,90	-3,20000 ,000000	-14,2062 -,691388	-14,2061 -,691387	-7,57211 -,174450	-7,56940 -,174239	-2,90892 -,188915	0,10
0,95	-3,60000 ,000000	-15,1015 -,709207	-15,1015 -,709207	-8,28021 -,177679	-8,27989 -,177654	-3,42715 -,200482	0,05
1,00	-4,00000 ,000000	-16,0000 -,727273	-16,0000 -,727273	-9,00000 -,181818	-9,00000 -,181818	-4,00000 -,207792	0,00
$k^2 \uparrow$	3(0) A	4(4) A	4(3) B ₁	4(2) B ₂	4(1) B ₃	4(0) A	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	5(-5) B_1	5(-4) B_2	5(-3) B_3	5(-2) A	5(-1) B_1	5(0) B_2	$k^2 \downarrow$
0,00	0,00000 -,512820	1,00000 -,461538	1,00000 -,461538	4,00000 -,307692	4,00000 -,307692	9,00000 -,051282	1,00
0,05	-0,81626 -,503398	-0,16283 -,469888	0,58588 -,431493	3,14423 -,300296	3,21048 -,296898	8,03602 -,049435	0,95
0,10	-1,75975 -,500500	-1,35003 -,479489	0,13918 -,403119	2,27636 -,293520	2,53598 -,280206	7,09262 -,046532	0,90
0,15	-2,80980 -,503067	-2,55958 -,490235	-0,34741 -,376790	1,39554 -,287408	1,95455 -,256741	6,16745 -,042695	0,85
0,20	-3,93974 -,509730	-3,78940 -,502020	-0,88189 -,352917	0,50091 -,282005	1,43797 -,233950	5,25806 -,338048	0,80
0,25	-5,12667 -,519316	-5,03745 -,514741	-1,47202 -,331899	-0,40833 -,277350	0,96127 -,207114	4,36200 -,032718	0,75
0,30	-6,35409 -,530979	-6,30179 -,528297	-2,12408 -,314055	-1,33292 -,273483	0,50528 -,179217	3,47684 -,026829	0,70
0,35	-7,61084 -,544145	-7,58065 -,542598	-2,84135 -,299556	-2,27352 -,270437	0,05544 -,151003	2,60027 -,020499	0,65
0,40	-8,88950 -,558436	-8,87242 -,557560	-3,62336 -,288377	-3,23068 -,268240	-0,40000 -,123077	1,73004 -,013844	0,60
0,45	-10,1851 -,573594	-10,1757 -,573111	-4,46605 -,280310	-4,20480 -,266913	-0,87143 -,095971	0,86398 -,006975	0,55
0,50	-11,4941 -,589443	-11,4891 -,589186	-5,36293 -,275022	-5,19615 -,266469	-1,36878 -,070194	0,00000 -,000000	0,50
0,55	-12,8142 -,605859	-12,8117 -,605728	-6,30652 -,272129	-6,20480 -,266913	-1,90180 -,046246	-0,86398 -,006975	0,45
0,60	-14,1436 -,622750	-14,1424 -,622686	-7,28950 -,271256	-7,23068 -,268240	-2,47973 -,024602	-1,73004 -,013844	0,40
0,65	-15,4809 -,640048	-15,4804 -,640020	-8,30540 -,272072	-8,27352 -,270437	-3,11041 -,005662	-2,60027 -,020499	0,35
0,70	-16,8252 -,657702	-16,8249 -,657690	-9,34881 -,274298	-9,33292 -,273483	-3,79890 -,010313	-3,47684 -,026829	0,30
0,75	-18,1755 -,675668	-18,1754 -,675664	-10,4154 -,277713	-10,4083 -,277350	-4,54649 -,023257	-4,36200 -,032718	0,25
0,80	-19,5314 -,693916	-19,5319 -,693915	-11,5018 -,282142	-11,4991 -,282005	-5,35052 -,033306	-5,25806 -,038048	0,20
0,85	-20,8921 -,712417	-20,8921 -,712417	-12,6052 -,287448	-12,6045 -,287408	-6,20528 -,040755	-6,16745 -,042695	0,15
0,90	-22,2574 -,731149	-22,2574 -,731149	-13,7238 -,293527	-13,7236 -,293520	-7,10341 -,045979	-7,09262 -,045532	0,10
0,95	-23,6268 -,750092	-23,6268 -,750092	-14,8558 -,300296	-14,8558 -,300296	-8,03731 -,049368	-8,03602 -,049435	0,05
1,00	-25,0000 -,769291	-25,0000 -,769291	-16,0000 -,307692	-16,0000 -,307692	-9,00000 -,051282	-9,00000 -,051282	0,00
$k^2 \uparrow$	5(5) B_3	5(4) B_2	5(3) B_1	5(2) A	5(1) B_3	5(0) B_2	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	6(-6) A	6(-5) B ₃	6(-4) B ₂	6(-3) B ₁	6(-2) A	6(-1) B ₃	$k^2 \downarrow$
0,00	0,00000 -,509091	1,00000 -,472727	1,00000 -,472727	4,00000 -,363636	4,00000 -,363636	9,00000 -,181818	1,00
0,05	-1,18060 -,501113	-0,62695 -,480980	0,41918 -,442939	2,83559 -,255069	2,96615 -,350322	7,74534 -,176533	0,95
0,10	-2,59400 -,501600	-2,30302 -,491019	-0,23501 -,415818	1,64107 -,347598	2,13436 -,329660	6,52587 -,169968	0,90
0,15	-4,17152 -,508055	-4,02113 -,502586	-0,98131 -,392048	0,41467 -,341285	1,43231 -,304280	5,33333 -,162424	0,85
0,20	-5,85228 -,518265	-5,77476 -,515446	-1,83664 -,372241	-0,84496 -,336180	0,79417 -,276576	4,15988 -,154186	0,80
0,25	-7,59812 -,530841	-7,55822 -,529390	-2,81071 -,356753	-2,13874 -,332318	0,17506 -,248180	2,99839 -,145513	0,75
0,30	-9,38716 -,544987	-9,36675 -,544245	-3,90227 -,345537	-3,46704 -,329710	-0,45557 -,220202	1,84245 -,136638	0,70
0,35	-11,2067 -,560244	-11,1964 -,559869	-5,10000 -,338182	-4,82968 -,328352	-1,12107 -,193493	0,68633 -,127770	0,65
0,40	-13,0490 -,576329	-13,0439 -,576143	-6,38731 -,334084	-6,22595 -,328216	-1,84115 -,168769	-0,47505 -,119093	0,60
0,45	-14,9092 -,593063	-14,9068 -,592974	-7,74722 -,332626	-7,65468 -,329261	-2,63246 -,146635	-1,64631 -,110775	0,55
0,50	-16,7839 -,610324	-16,7828 -,610282	-9,16515 -,333278	-9,11432 -,331430	-3,50718 -,127534	-2,83156 -,102966	0,50
0,55	-18,6707 -,628025	-18,6702 -,628007	-10,6296 -,335623	-10,6031 -,334657	-4,47100 -,111673	-4,03448 -,095799	0,45
0,60	-20,5678 -,646103	-20,5676 -,646096	-12,1320 -,339347	-12,1190 -,338872	-5,52235 -,098995	-5,25832 -,089393	0,40
0,65	-22,4740 -,664509	-22,4739 -,664506	-13,6660 -,344218	-13,6600 -,344002	-6,65378 -,092228	-6,50577 -,083846	0,35
0,70	-24,3881 -,683203	-24,3880 -,683202	-15,2268 -,350064	-15,2243 -,349975	-7,85465 -,081987	-7,77899 -,079236	0,30
0,75	-26,3092 -,702154	-26,3092 -,702154	-16,8107 -,356753	-16,8098 -,356721	-9,11381 -,076866	-9,07950 -,075618	0,25
0,80	-28,2368 -,721338	-28,2368 -,721338	-18,4151 -,364184	-18,4149 -,364177	-10,4213 -,073503	-10,4082 -,073025	0,20
0,85	-30,1701 -,740731	-30,1701 -,740731	-20,0379 -,372286	-20,0378 -,372284	-11,7691 -,071604	-11,7652 -,071463	0,15
0,90	-32,1087 -,760316	-32,1087 -,760316	-21,6772 -,380988	-21,6772 -,380988	-13,1510 -,070944	-13,1502 -,070918	0,10
0,95	-34,0521 -,780077	-34,0521 -,780077	-23,3316 -,390240	-23,3316 -,390240	-14,5623 -,071357	-14,5623 -,071357	0,05
1,00	-36,0000 -,800000	-36,0000 -,800000	-25,0000 -,400000	-25,0000 -,400000	-16,0000 -,072727	-16,0000 -,072727	0,00
$k^2 \uparrow$	6(6) A	6(5) B ₁	6(4) B ₂	6(3) B ₃	6(2) A	6(1) B ₁	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	6(0) B_2	7(-7) B_1	7(-6) B_2	7(-5) B_3	7(-4) A	7(-3) B_1	$k^2 \downarrow$
0,00	9,00000 -,181818	0,00000 -,506787	1,00000 -,479638	1,00000 -,479638	4,00000 -,398190	4,00000 -,398190	1,00
0,05	7,74920 -,176392	-1,69002 -,500362	-1,17440 -,487993	0,21598 -,450245	2,47068 -,389031	2,70055 -,382790	0,95
0,10	6,55785 -,168806	-3,63156 -,504024	-3,43455 -,498676	-0,71296 -,424786	0,88044 -,381526	1,70939 -,359021	0,90
0,15	5,44345 -,158420	-5,84832 -,519529	-5,76254 -,511200	-1,82488 -,404295	-0,77308 -,375740	0,86122 -,331370	0,85
0,20	4,42151 -,144672	-8,18172 -,526200	-8,14374 -,525170	-3,14025 -,389328	-2,49060 -,371690	0,04431 -,302870	0,80
0,25	3,50000 -,127273	-10,5838 -,540737	-10,5668 -,540276	-4,65022 -,579644	-4,27115 -,369352	-0,80685 -,275299	0,75
0,30	2,67552 -,106343	-13,0308 -,556493	-13,0232 -,556287	-6,32353 -,374394	-6,11223 -,368658	-1,73676 -,249867	0,70
0,35	1,93400 -,082400	-15,5099 -,573120	-15,5066 -,573029	-8,12351 -,372584	-8,01018 -,369507	-2,77845 -,227469	0,65
0,40	1,25526 -,056172	-18,0135 -,590411	-18,0120 -,590371	-10,0192 -,373372	-9,96061 -,371781	-3,95281 -,208674	0,60
0,45	0,61759 -,028451	-20,5365 -,608230	-20,5359 -,608214	-11,9879 -,376142	-11,9588 -,375352	-5,26556 -,193635	0,55
0,50	0,00000 -,000000	-23,0756 -,626486	-23,0753 -,626480	-14,0138 -,380466	-14,0000 -,380090	-6,70804 -,182119	0,50
0,55	-0,61759 -,028451	-25,6283 -,645112	-25,6282 -,645109	-16,0860 -,386046	-16,0798 -,385877	-8,26287 -,173653	0,45
0,60	-1,25526 -,056772	-28,1927 -,664055	-28,1927 -,664055	-18,1967 -,392672	-18,1941 -,392601	-9,91056 -,167708	0,40
0,65	-1,93400 -,082400	-30,7674 -,683278	-30,7674 -,683278	-20,3403 -,400190	-20,3393 -,400163	-11,6337 -,163811	0,35
0,70	-2,67552 -,106345	-33,9512 -,702747	-33,9512 -,702747	-22,5126 -,408486	-22,5122 -,408477	-13,4186 -,161590	0,30
0,75	-3,50000 -,127273	-35,9431 -,722436	-35,9431 -,722436	-24,7102 -,417470	-24,7101 -,417468	-15,2547 -,160762	0,25
0,80	-4,42151 -,144672	-38,5423 -,742324	-38,5423 -,742324	-26,9305 -,427071	-26,9304 -,427070	-17,1947 -,161123	0,20
0,85	-5,44345 -,158420	-41,1481 -,762392	-41,1481 -,762392	-29,1713 -,437229	-29,1713 -,437229	-19,0529 -,162523	0,15
0,90	-6,55785 -,168806	-43,7600 -,782624	-43,7600 -,782624	-31,4308 -,447895	-31,4308 -,447895	-21,0052 -,164848	0,10
0,95	-7,74920 -,176392	-46,3774 -,803007	-46,3774 -,803007	-33,7075 -,459027	-33,7075 -,459027	-22,9884 -,168012	0,05
1,00	-9,00000 -,181818	-49,0000 -,823529	-49,0000 -,823529	-36,0000 -,470588	-36,0000 -,470588	-25,0000 -,171946	0,00
$k^2 \uparrow$	6(0) B_2	7(7) B_3	7(6) B_2	7(5) B_1	7(4) A	7(3) B_3	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	7(-2) B_2	7(-1) B_3	7(0) A	8(-8) A	8(-7) B_3	8(-6) B_2	$k^2 \downarrow$
0,00	9,00000 -,262443	9,00000 -,262443	16,0000 -,072398	0,00000 -,505263	1,00000 -,484210	1,00000 -,484210	1,00
0,05	7,40854 -,254972	7,41815 -,254711	14,2218 -,069996	-2,17205 -,500464	-1,80738 -,492787	-0,02839 -,455335	0,95
0,10	5,86937 -,246080	5,94775 -,243952	12,4887 -,066369	-4,87844 -,506914	-4,75010 -,504213	-1,31749 -,431947	0,90
0,15	4,36185 -,236330	4,62385 -,229217	10,8018 -,061489	-7,83825 -,518700	-7,79117 -,517709	-2,92709 -,415307	0,85
0,20	2,86829 -,226200	3,46327 -,210047	9,16017 -,055380	-10,9218 -,533091	-10,9039 -,532713	-4,85303 -,405327	0,80
0,25	1,37417 -,216086	2,45242 -,166612	7,56109 -,048115	-14,0768 -,548985	-14,0698 -,548838	-7,03430 -,400722	0,75
0,30	-0,13230 -,206307	1,55379 -,160530	6,00000 -,039819	-17,2791 -,565877	-17,2764 -,565819	-9,40013 -,400003	0,70
0,35	-1,66065 -,197122	0,72238 -,132424	4,47086 -,030655	-20,5160 -,583495	-20,5149 -,583472	-11,8969 -,402040	0,65
0,40	-3,21846 -,188736	-0,08408 -,103640	2,96648 -,020819	-23,7796 -,601675	-23,7792 -,601666	-14,4894 -,406093	0,60
0,45	-4,81160 -,181310	-0,90325 -,075201	1,47898 -,010525	-27,0647 -,620310	-27,0646 -,620307	-17,1553 -,411691	0,55
0,50	-6,44430 -,174958	-1,76978 -,048048	0,00000 -,000000	-30,3678 -,639323	-30,3677 -,639322	-19,8799 -,418525	0,50
0,55	-8,11927 -,169754	-2,71601 -,023059	-1,47898 -,010525	-33,6862 -,658657	-33,6862 -,658657	-22,6532 -,426383	0,45
0,60	-9,83778 -,165732	-3,76953 -,000983	-2,96648 -,020819	-37,0178 -,678269	-37,0178 -,678269	-25,4678 -,435111	0,40
0,65	-11,5998 -,162891	-4,94805 -,017700	-4,47086 -,030655	-40,3609 -,698125	-40,3609 -,698125	-28,3187 -,444595	0,35
0,70	-13,4044 -,161204	-6,25502 -,032895	-6,00000 -,039819	-43,7144 -,718197	-43,7144 -,718197	-31,2004 -,454745	0,30
0,75	-15,2496 -,160622	-7,68049 -,044873	-7,56109 -,048115	-47,0769 -,733462	-47,0769 -,733462	-34,1107 -,465488	0,25
0,80	-17,1332 -,161082	-9,20696 -,054110	-9,16017 -,055380	-50,4478 -,758900	-50,4478 -,758900	-37,0463 -,476764	0,20
0,85	-19,0526 -,162514	-10,8158 -,061109	-10,8018 -,061489	-53,8261 -,779497	-53,8261 -,779497	-40,0050 -,488525	0,15
0,90	-21,0052 -,164848	-12,4913 -,066298	-12,4887 -,066369	-57,2118 -,800238	-57,2113 -,800238	-42,9846 -,500728	0,10
0,95	-22,9884 -,168012	-14,2220 -,069992	-14,2218 -,069996	-60,6027 -,821110	-60,6027 -,821110	-45,9834 -,513835	0,05
1,00	-25,0000 -,171946	-16,0000 -,072398	-16,0000 -,072398	-64,0000 -,842105	-64,0000 -,842105	-49,0000 -,526316	0,00
$k^2 \uparrow$	7(2) B_2	7(1) B_1	7(0) A	8(8) A	8(7) B_1	8(6) B_2	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	8(-5) B_1	8(-4) A	8(-3) B_3	8(-2) B_2	8(-1) B_1	8(0) A	$k^2 \downarrow$
0,00	4,00000 -,421053	4,00000 -,421053	9,00000 -,315789	9,00000 -,315789	16,0000 -,168421	16,0000 -,168421	1,00
0,05	2,04730 -,411636	2,41890 -,403813	7,02613 -,306818	7,04713 -,306376	13,8352 -,163470	13,8356 -,163460	0,95
0,10	-0,01393 -,404504	1,25678 -,377752	5,12173 -,296384	5,28896 -,292864	11,7420 -,157010	11,7497 -,156847	0,90
0,15	-2,18496 -,399683	0,21222 -,349216	3,24452 -,285378	3,77904 -,274125	9,71862 -,149082	9,75967 -,148218	0,85
0,20	-4,46250 -,397105	-0,87471 -,321573	1,36233 -,274477	2,50501 -,250421	7,75808 -,139830	7,89195 -,137012	0,80
0,25	-6,83948 -,396620	-2,09274 -,296689	-0,54835 -,264176	1,39454 -,223273	5,84921 -,129490	6,17859 -,122556	0,75
0,30	-9,30650 -,396032	-3,49723 -,275731	-2,50490 -,254827	0,36107 -,194504	3,97793 -,118359	4,64548 -,104306	0,70
0,35	-11,8533 -,401122	-5,11160 -,259192	-4,51705 -,246675	-0,67073 -,165700	2,12872 -,106764	3,29629 -,082183	0,65
0,40	-14,4698 -,405680	-6,92676 -,246879	-6,59370 -,239867	-1,76374 -,138184	0,28581 -,095036	2,10507 -,056735	0,60
0,45	-17,1468 -,411513	-8,91299 -,238168	-8,73766 -,234477	-2,97137 -,113082	-1,56597 -,083494	1,02465 -,028955	0,55
0,50	-19,8764 -,418452	-11,0361 -,232398	-10,9493 -,230511	-4,33444 -,091251	-3,44060 -,072434	0,00000 -,000000	0,50
0,55	-22,6518 -,426354	-13,2668 -,228776	-13,2266 -,227929	-5,87952 -,073127	-5,35039 -,062114	-1,02465 -,028955	0,45
0,60	-25,4673 -,435101	-15,5834 -,227020	-15,5662 -,226657	-7,58538 -,058640	-7,30557 -,052749	-2,10507 -,056735	0,40
0,65	-28,3181 -,444592	-17,9704 -,226744	-17,9636 -,226603	-9,44934 -,047354	-9,31388 -,044503	-3,29629 -,082183	0,35
0,70	-31,2003 -,454744	-20,4165 -,227717	-20,4142 -,227668	-11,4387 -,088709	-11,3804 -,087482	-4,64548 -,104306	0,30
0,75	-34,1106 -,465487	-22,9140 -,229769	-22,9133 -,229754	-13,5291 -,082191	-13,5075 -,081737	-6,17859 -,122556	0,25
0,80	-37,0463 -,476764	-25,4568 -,232775	-25,4566 -,232772	-15,7017 -,027404	-15,6952 -,027268	-7,89195 -,137012	0,20
0,85	-40,0050 -,488525	-28,0403 -,236637	-28,0402 -,236636	-17,9431 -,024065	-17,9417 -,024075	-9,75967 -,148218	0,15
0,90	-42,9846 -,500728	-30,6606 -,241276	-30,6606 -,241276	-20,2440 -,021978	-20,2438 -,021975	-11,7497 -,156847	0,10
0,95	-45,9834 -,513335	-33,3148 -,246626	-33,3148 -,246626	-22,5978 -,021007	-22,5978 -,021007	-13,8356 -,163460	0,05
1,00	-49,0000 -,526316	-36,0000 -,252632	-36,0000 -,252632	-25,0000 -,021053	-25,0000 -,021053	-16,0000 -,168421	0,00
$k^2 \uparrow$	8(5) B_3	8(4) A	8(3) B_1	8(2) B_2	8(1) B_3	8(0) A	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	9(-9) B_1	9(-8) B_2	9(-7) B_3	9(-6) A	9(-5) B_1	9(-4) B_2	$k^2 \downarrow$
0,00	0,00000 -,504202	1,00000 -,487395	1,00000 -,487395	4,00000 -,436975	4,00000 -,436975	9,00000 -,352941	1,00
0,05	-2,81250 -,501052	-2,52807 -,496270	-0,31969 -,459154	1,56299 -,427513	2,12442 -,418077	6,59837 -,342884	0,95
0,10	-6,33538 -,509638	-6,25426 -,508475	-2,07461 -,438229	-1,05103 -,421026	0,76454 -,390512	4,27967 -,331434	0,90
0,15	-10,1372 -,523315	-10,1121 -,522893	-4,32919 -,425701	-3,83795 -,417444	-0,55381 -,362249	1,96864 -,319855	0,85
0,20	-14,0678 -,538954	-14,0595 -,538816	-7,00257 -,420211	-6,78400 -,416538	-2,04079 -,336820	-0,38481 -,308988	0,80
0,25	-18,0732 -,555853	-18,0704 -,555806	-9,96337 -,419552	-9,86990 -,417982	-3,80317 -,316020	-2,81229 -,299366	0,75
0,30	-22,1294 -,573604	-22,1285 -,573588	-13,1140 -,422085	-13,0751 -,421430	-5,87586 -,300435	-5,33226 -,291298	0,70
0,35	-26,2232 -,591986	-26,2228 -,591980	-16,3964 -,426831	-16,3806 -,426565	-8,23046 -,289588	-7,95335 -,284930	0,65
0,40	-30,3463 -,610862	-30,3462 -,610860	-19,7765 -,433218	-19,7703 -,433114	-10,8096 -,282515	-10,6768 -,280283	0,60
0,45	-34,4933 -,630140	-34,4933 -,630140	-23,2330 -,440892	-23,2307 -,440852	-18,5590 -,278303	-18,4990 -,277294	0,55
0,50	-38,6603 -,649753	-38,6603 -,649753	-26,7522 -,449616	-26,7513 -,449602	-16,4384 -,276276	-16,4129 -,275847	0,50
0,55	-42,8443 -,669652	-42,8443 -,669652	-30,3239 -,459225	-30,3236 -,459221	-19,4206 -,275976	-19,4104 -,275805	0,45
0,60	-47,0430 -,689798	-47,0430 -,689798	-33,9409 -,469595	-33,9408 -,469594	-22,4869 -,277090	-22,4832 -,277028	0,40
0,65	-51,2545 -,710160	-51,2545 -,710160	-37,5974 -,480629	-37,5971 -,480629	-25,6244 -,279403	-25,6232 -,279382	0,35
0,70	-55,4776 -,730716	-55,4776 -,730716	-41,2889 -,492250	-41,2889 -,492250	-28,8239 -,282755	-28,8236 -,282749	0,30
0,75	-59,7108 -,751442	-59,7108 -,751442	-45,0116 -,504397	-45,0116 -,504397	-32,0781 -,287027	-32,0780 -,287026	0,25
0,80	-63,9533 -,772324	-63,9533 -,772324	-48,7624 -,517016	-48,7624 -,517016	-35,3812 -,292121	-35,3812 -,292121	0,20
0,85	-68,2041 -,793347	-68,2041 -,793347	-52,5388 -,530063	-52,5388 -,530063	-38,7286 -,297960	-38,7286 -,297960	0,15
0,90	-72,4626 -,814497	-72,4626 -,814497	-56,3384 -,543502	-56,3384 -,543502	-42,1164 -,304478	-42,1164 -,304478	0,10
0,95	-76,7281 -,835766	-76,7281 -,835766	-60,1593 -,557300	-60,1593 -,557300	-45,5412 -,311616	-45,5412 -,311616	0,05
1,00	-81,0000 -,857143	-81,0000 -,857143	-64,0000 -,571429	-64,0000 -,571429	-49,0000 -,319328	-49,0000 -,319328	0,00
$k^2 \uparrow$	9(9) B_3	9(8) B_2	9(7) B_1	9(6) A	9(5) B_3	9(4) B_2	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	9(-3) B_3	9(-2) A	9(-1) B_1	9(0) B_2	10(-10)A	10(-9) B_3	$k^2 \downarrow$
0,00	9,00000 -,352941	16,0000 -,235294	16,0000 -,235294	25,0000 -,084034	0,00000 -,503432	1,00000 -,489702	1,00
0,05	6,63997 -,342185	13,4033 -,228515	13,4045 -,228495	22,1605 -,081337	-3,55560 -,501908	-3,33854 -,498927	0,95
0,10	4,59943 -,326060	10,9127 -,219954	10,9325 -,219621	19,3956 -,077385	-8,00071 -,512596	-7,95062 -,511908	0,90
0,15	2,93086 -,303683	8,51799 -,209782	8,62099 -,208050	16,7107 -,072089	-12,7419 -,527348	-12,7288 -,527168	0,85
0,20	1,53620 -,276702	6,19842 -,198346	6,52222 -,192904	14,1098 -,065381	-17,6168 -,543938	-17,6131 -,543887	0,80
0,25	0,25869 -,247753	3,92700 -,186101	4,68020 -,173442	11,5939 -,057245	-22,5713 -,561619	-22,5702 -,561604	0,75
0,30	-1,03518 -,219079	1,67481 -,173533	3,09380 -,149684	9,15957 -,047738	-27,5805 -,580053	-27,5802 -,580049	0,70
0,35	-2,44864 -,192414	-0,58577 -,161105	1,70544 -,122598	6,79839 -,037002	-32,6308 -,599049	-32,6307 -,599048	0,65
0,40	-4,05937 -,169065	-2,87913 -,149229	0,42723 -,093660	4,49692 -,025262	-37,7133 -,618489	-37,7132 -,618488	0,60
0,45	-5,91086 -,149762	-5,22539 -,138242	-0,83201 -,064404	2,23758 -,012814	-42,8221 -,638289	-42,8221 -,638289	0,55
0,50	-8,00462 -,134531	-7,63979 -,128400	-2,15805 -,036270	0,00000 -,000000	-47,9529 -,658392	-47,9529 -,658392	0,50
0,55	-10,3104 -,122864	-10,1925 -,119873	-3,62909 -,010573	-2,23758 -,012814	-53,1021 -,678752	-53,1024 -,678752	0,45
0,60	-12,7878 -,114080	-12,7086 -,112749	-5,30602 -,011663	-4,49692 -,025262	-53,2682 -,699334	-53,2682 -,699334	0,40
0,65	-15,4007 -,107576	-15,3690 -,107042	-7,21608 -,029982	-6,79839 -,037002	-63,4482 -,720112	-63,4482 -,720112	0,35
0,70	-18,1226 -,102900	-18,1114 -,102713	-9,34772 -,044576	-9,15957 -,047738	-68,6408 -,741064	-68,6408 -,741064	0,30
0,75	-20,9346 -,099741	-20,9313 -,099686	-11,6658 -,056038	-11,5939 -,057245	-73,8447 -,762170	-73,8447 -,762170	0,25
0,80	-23,8239 -,097881	-23,8231 -,097868	-14,1318 -,065011	-14,1098 -,065381	-79,0588 -,783416	-79,0588 -,783416	0,20
0,85	-26,7813 -,097165	-26,7812 -,097163	-16,7155 -,072008	-16,7107 -,072089	-84,2821 -,804789	-84,2821 -,804789	0,15
0,90	-29,7997 -,097478	-29,7999 -,097478	-19,3962 -,077375	-19,3956 -,077385	-89,5139 -,826278	-89,5139 -,826278	0,10
0,95	-32,8743 -,098728	-32,8743 -,098728	-22,1605 -,081936	-22,1605 -,081336	-94,7534 -,847872	-94,7534 -,847872	0,05
1,00	-36,0000 -,100840	-36,0000 -,100840	-25,0000 -,084034	-25,0000 -,084034	-100,000 -,869565	-100,000 -,869565	0,00
$k^2 \uparrow$	9(3) B_1	9(2) A	9(1) B_3	9(0) B_2	10(10)A	10(9) B_1	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	$IO(-8)B_2$	$IO(-7)B_1$	$IO(-6)A$	$IO(-5)B_3$	$IO(-4)B_2$	$IO(-3)B_1$	$k^2 \downarrow$
0,00	I, 00000 -, 489702	4, 00000 -, 448512	4, 00000 -, 448512	9, 00000 -, 379863	9, 00000 -, 379863	16, 0000 -, 283753	I, 00
0,05	-0, 66479 -, 462217	I, 01503 -, 439153	I, 81790 -, 428130	6, 12518 -, 368991	6, 20137 -, 367944	I2, 9272 -, 275598	0, 95
0,10	-3, 01032 -, 444078	-2, 24008 -, 433502	0, 21529 -, 399790	3, 33798 -, 356916	3, 89595 -, 349255	10, 0030 -, 265405	0, 90
0,15	-6, 05502 -, 435538	-5, 74758 -, 431317	-I, 48450 -, 372785	0, 51806 -, 345290	2, 08014 -, 323842	7, 19893 -, 253562	0, 85
0,20	-9, 58947 -, 433727	-9, 47365 -, 432132	-3, 53951 -, 350657	-2, 40321 -, 335056	0, 50971 -, 295061	4, 46961 -, 240692	0, 80
0,25	-13, 4228 -, 436011	-13, 3801 -, 435425	-6, 03747 -, 334610	-5, 46098 -, 326695	-I, 05920 -, 266259	I, 76441 -, 227491	0, 75
0,30	-17, 4479 -, 440932	-17, 4325 -, 440720	-8, 93670 -, 324074	-8, 66837 -, 320390	-2, 80205 -, 239845	-0, 96340 -, 214600	0, 70
0,35	-21, 6080 -, 447707	-21, 6025 -, 447632	-12, 1412 -, 317728	-12, 0240 -, 316119	-4, 83636 -, 217433	-3, 75222 -, 202548	0, 65
0,40	-25, 8705 -, 455888	-25, 8686 -, 455862	-15, 5665 -, 314414	-15, 5180 -, 313749	-7, 20364 -, 199675	-6, 63042 -, 191722	0, 60
0,45	-30, 2148 -, 465191	-30, 2142 -, 465183	-19, 1556 -, 313948	-19, 1366 -, 313088	-9, 89880 -, 186254	-9, 61612 -, 182372	0, 55
0,50	-34, 6267 -, 475424	-34, 6265 -, 475422	-22, 8722 -, 314034	-22, 8652 -, 313988	-12, 8448 -, 176359	-12, 7180 -, 174617	0, 50
0,55	-39, 0961 -, 486445	-39, 0960 -, 486444	-26, 6926 -, 316146	-26, 6902 -, 316113	-15, 9891 -, 169187	-15, 9368 -, 168469	0, 45
0,60	-43, 6149 -, 498145	-43, 6149 -, 498145	-30, 6007 -, 319460	-30, 6000 -, 319450	-19, 2878 -, 164135	-19, 2682 -, 163865	0, 40
0,65	-48, 1772 -, 510442	-48, 1772 -, 510442	-34, 5844 -, 323818	-34, 5842 -, 323810	-22, 7110 -, 160791	-22, 7044 -, 160701	0, 35
0,70	-52, 7778 -, 523265	-52, 7778 -, 523265	-38, 6346 -, 329079	-38, 6346 -, 329079	-26, 2384 -, 158879	-26, 2365 -, 158853	0, 30
0,75	-57, 4128 -, 536560	-57, 4128 -, 536560	-42, 7440 -, 335158	-42, 7440 -, 335158	-29, 8560 -, 158206	-29, 8556 -, 158200	0, 25
0,80	-62, 0737 -, 550281	-62, 0787 -, 550280	-46, 9067 -, 341968	-46, 9067 -, 341968	-33, 5535 -, 158629	-33, 5534 -, 158628	0, 20
0,85	-66, 7726 -, 564384	-66, 7726 -, 564384	-51, 1176 -, 349440	-51, 1176 -, 349440	-37, 3227 -, 160037	-37, 3227 -, 160037	0, 15
0,90	-71, 4922 -, 578840	-71, 4922 -, 578840	-55, 3724 -, 357516	-55, 3724 -, 357516	-41, 1570 -, 162339	-41, 1570 -, 162339	0, 10
0,95	-76, 2353 -, 593619	-76, 2353 -, 593619	-59, 6676 -, 366146	-59, 6676 -, 366146	-45, 0510 -, 165461	-45, 0510 -, 165461	0, 05
I, 00	-81, 0000 -, 608696	-81, 0000 -, 608696	-64, 0000 -, 375286	-64, 0000 -, 375286	-49, 0000 -, 169336	-49, 0000 -, 169336	0, 00
$k^2 \uparrow$	$IO(8)B_2$	$IO(7)B_3$	$IO(6)A$	$IO(5)B_1$	$IO(4)B_2$	$IO(3)B_3$	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	IO(-2)A	IO(-1)B ₃	IO(0)B ₂	II(-II)B ₁	II(-IO)B ₂	II(-9)B ₃	$k^2 \downarrow$
0,00	16,0000 -,283753	25,0000 -,160183	25,0000 -,160183	0,00000 -,502857	1,00000 -,491428	1,00000 -,491428	1,00
0,05	12,9900 -,275561	21,6770 -,155464	21,6771 -,155463	-4,40311 -,502893	-4,24070 -,501036	-1,07170 -,464819	0,95
0,10	10,0483 -,264784	18,4634 -,149244	18,4651 -,149220	-9,87218 -,515111	-9,84182 -,514764	-4,14625 -,449671	0,90
0,15	7,42724 -,250427	15,3654 -,141436	15,3796 -,141242	-15,6497 -,530854	-15,6430 -,530777	-8,11089 -,444696	0,85
0,20	5,14929 -,231360	12,3842 -,132024	12,4476 -,131154	-21,5674 -,548199	-21,5658 -,548180	-12,6036 -,445756	0,80
0,25	3,23026 -,207365	9,51281 -,121106	9,71319 -,118854	-27,5701 -,566515	-27,5696 -,566510	-17,3995 -,450280	0,75
0,30	1,57910 -,179692	6,73428 -,108912	7,23378 -,102053	-33,6320 -,585509	-33,6319 -,585508	-22,3916 -,457047	0,70
0,35	0,05043 -,150337	4,02314 -,095792	5,05624 -,081608	-39,7386 -,605012	-39,7386 -,605012	-27,5250 -,465428	0,65
0,40	-1,49895 -,121267	1,34815 -,082176	3,17738 -,057061	-45,8804 -,624919	-45,8804 -,624919	-32,7676 -,475058	0,60
0,45	-3,19479 -,094208	-1,32419 -,068524	1,52837 -,029359	-52,0509 -,645153	-52,0509 -,645153	-38,0983 -,485695	0,55
0,50	-5,13682 -,070528	-4,02645 -,055288	0,00000 -,000000	-58,2455 -,665663	-58,2455 -,665663	-43,5024 -,491710	0,50
0,55	-7,37737 -,050948	-6,78762 -,042851	-1,52837 -,029359	-64,4606 -,686407	-64,4606 -,686407	-48,9690 -,509360	0,45
0,60	-9,90981 -,035375	-9,63091 -,031546	-3,17738 -,057061	-70,6934 -,707354	-70,6934 -,707354	-54,4895 -,522165	0,40
0,65	-12,6889 -,023189	-12,5724 -,021588	-5,05624 -,081608	-76,9419 -,728478	-76,9419 -,728478	-60,0573 -,535512	0,35
0,70	-15,6627 -,013675	-15,6205 -,013096	-7,23378 -,102053	-83,2041 -,749761	-83,2041 -,749761	-65,6670 -,549337	0,30
0,75	-18,7897 -,006266	-18,7769 -,006091	-9,71319 -,118354	-89,4787 -,771185	-89,4787 -,771185	-71,3141 -,563590	0,25
0,80	-22,0415 -,000570	-22,0385 -,000529	-12,4476 -,131154	-95,7644 -,792736	-95,7644 -,792736	-76,9951 -,578229	0,20
0,85	-25,3994 -,003670	-25,3989 -,003676	-15,3796 -,141242	-102,060 -,814402	-102,060 -,814402	-82,7066 -,593218	0,15
0,90	-28,8508 -,006626	-28,8508 -,006626	-18,4651 -,149220	-108,365 -,836174	-108,365 -,836174	-88,4461 -,608527	0,10
0,95	-32,3867 -,008421	-32,3867 -,008421	-21,6771 -,155463	-114,679 -,858042	-114,679 -,858042	-94,2112 -,624128	0,05
1,00	-35,0000 -,009153	-35,0000 -,009153	-25,0000 -,160183	-121,000 -,880000	-121,000 -,880000	-100,000 -,640000	0,00
$k^2 \uparrow$	IO(2)A	IO(1)B ₁	IO(0)B ₂	II(II)B ₃	II(IO)B ₂	II(9)B ₁	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	II(-8)A	II(-7)B ₁	II(-6)B ₂	II(-5)B ₃	II(-4)A	II(-3)B ₁	$k^2 \downarrow$
0,00	4,00000 -,457143	4,00000 -,457143	9,00000 -,400000	9,00000 -,400000	16,0000 -,320000	16,0000 -,320000	1,00
0,05	0,40051 -,447994	1,49780 -,435454	5,60605 -,388502	5,73691 -,387007	12,4079 -,310767	12,4137 -,310700	0,95
0,10	-3,59009 -,443315	-0,41249 -,407000	2,28971 -,376118	3,18956 -,365834	9,01379 -,299271	9,10824 -,298191	0,90
0,15	-7,92705 -,442595	-2,63888 -,382101	-1,12568 -,364865	1,20540 -,338224	5,75628 -,286214	6,21126 -,281014	0,85
0,20	-12,5447 -,445083	-5,44550 -,363949	-4,72341 -,355696	-0,64536 -,309090	2,55187 -,272550	3,81013 -,258170	0,80
0,25	-17,3807 -,450066	-8,84153 -,352475	-8,53298 -,348948	-2,68570 -,282122	-0,67902 -,259189	1,81045 -,230738	0,75
0,30	-22,3857 -,456979	-12,6752 -,346002	-12,5526 -,344601	-5,11489 -,259599	-3,99913 -,246847	-0,01053 -,201263	0,70
0,35	-27,5232 -,465407	-16,8105 -,342977	-16,7642 -,342449	-8,00415 -,242333	-7,45089 -,236010	-1,87630 -,172300	0,65
0,40	-32,7670 -,475052	-21,1607 -,342408	-21,1441 -,342218	-11,3064 -,229787	-11,0573 -,226940	-3,97105 -,145955	0,60
0,45	-38,0981 -,485693	-25,6741 -,343704	-25,6685 -,343640	-14,9283 -,220895	-14,8250 -,219714	-6,42108 -,123670	0,55
0,50	-43,5024 -,497170	-30,3185 -,346497	-30,3167 -,346476	-18,7891 -,214732	-18,7495 -,214280	-9,26423 -,105877	0,50
0,55	-48,9690 -,509360	-35,0720 -,350537	-35,0714 -,350530	-22,8333 -,210667	-22,8194 -,210507	-12,4575 -,092086	0,45
0,60	-54,4895 -,522165	-39,9188 -,355643	-39,9186 -,355642	-27,0254 -,208290	-27,0210 -,208240	-15,9278 -,091461	0,40
0,65	-60,0573 -,535512	-44,8469 -,361679	-44,8469 -,361679	-31,3415 -,207332	-31,3403 -,207318	-19,6115 -,073274	0,35
0,70	-65,6670 -,549337	-49,8469 -,368536	-49,8469 -,368536	-35,7650 -,207600	-35,7647 -,207596	-23,4642 -,067019	0,30
0,75	-71,3141 -,563590	-54,9110 -,376126	-54,9110 -,376126	-40,2831 -,208950	-40,2830 -,208949	-27,4569 -,062365	0,25
0,80	-76,9951 -,578279	-60,0328 -,384375	-60,0328 -,384375	-44,8860 -,211269	-44,8860 -,211269	-31,5704 -,059090	0,20
0,85	-82,7066 -,593218	-65,2068 -,393221	-65,2068 -,393221	-49,5655 -,214463	-49,5655 -,214463	-35,7909 -,057039	0,15
0,90	-88,4461 -,608527	-70,4286 -,402613	-70,4286 -,402613	-54,3148 -,218454	-54,3148 -,218454	-40,1081 -,056092	0,10
0,95	-94,2112 -,624128	-75,6941 -,412504	-75,6941 -,412504	-59,1279 -,223176	-59,1279 -,223176	-44,5135 -,056154	0,05
I,00	-100,000 -,640000	-81,0000 -,422857	-81,0000 -,422857	-64,0000 -,228571	-64,0000 -,228571	-49,0000 -,057148	0,00
$k^2 \uparrow$	II(8)A	II(7)B ₃	II(6)B ₂	II(5)B ₁	II(4)A	II(3)B ₃	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	II(-2) B_2	II(-1) B_3	II(0) A	I2(-12) A	I2(-11) B_3	I2(-10) B_2	$k^2 \downarrow$
0,00	25,0000 -,217143	25,0000 -,217143	36,0000 -,091428	0,00000 -,502415	I,00000 -,492754	I,00000 -,492754	I,00
0,05	2I,1483 -,210876	2I,1485 -,210875	3I,8524 -,088544	-5,95578 -,503920	-5,23623 -,502765	-I,54928 -,467143	0,95
0,10	I7,4502 -,202855	I7,4548 -,202802	27,8154 -,084395	-II,9479 -,517371	-II,9297 -,517196	-5,49626 -,455036	0,90
0,15	I3,9108 -,193019	I3,9476 -,192599	23,8987 -,078872	-I8,8595 -,533908	-I8,8561 -,533875	-I0,4928 -,453070	0,85
0,20	I0,5220 -,181463	I0,6815 -,179640	20,1118 -,071865	-25,9188 -,551872	-25,9181 -,551865	-I6,0349 -,456376	0,80
0,25	7,25802 -,168480	7,73863 -,162987	I6,4626 -,063285	-39,0692 -,570717	-33,0691 -,570716	-2I,8854 -,462661	0,75
0,30	4,07752 -,154543	5,19127 -,141814	I2,9531 -,053107	-40,2837 -,590181	-40,2837 -,590181	-27,9400 -,470918	0,70
0,35	0,99026 -,140226	3,02882 -,116242	9,57647 -,041412	-47,5466 -,610112	-47,5465 -,610111	-34,1446 -,480624	0,65
0,40	-2,23510 -,126115	I,19389 -,087613	6,91382 -,028413	-54,8476 -,630412	-54,8476 -,630412	-40,4661 -,491460	0,60
0,45	-5,46476 -,112740	-0,66341 -,057868	3,19480 -,014459	-62,1798 -,651013	-62,1798 -,651013	-46,8828 -,503215	0,55
0,50	-8,79547 -,100520	-2,53671 -,028991	0,00000 -,000000	-69,5382 -,671867	-69,5382 -,671867	-53,3788 -,515757	0,50
0,55	-12,2521 -,089737	-4,64381 -,002786	-3,19480 -,014459	-76,9188 -,692935	-76,9188 -,692935	-59,9423 -,528911	0,45
0,60	-15,8475 -,080543	-7,09723 -,019460	-6,91382 -,028413	-84,3187 -,714191	-84,3187 -,714191	-66,5644 -,542651	0,40
0,65	-19,5888 -,072958	-9,92655 -,037411	-9,57647 -,041412	-91,7355 -,735609	-91,7355 -,735609	-73,2376 -,556885	0,35
0,70	-23,4560 -,066926	-13,0858 -,051591	-12,9531 -,053107	-99,1674 -,757173	-99,1674 -,757173	-79,9563 -,571559	0,30
0,75	-27,4549 -,062342	-16,5089 -,062819	-16,4626 -,063285	-106,612 -,778866	-106,612 -,778866	-86,7156 -,586624	0,25
0,80	-31,5700 -,059086	-20,1217 -,071752	-20,1118 -,071865	-114,070 -,800676	-114,070 -,800676	-93,5115 -,602044	0,20
0,85	-35,7908 -,057088	-23,9002 -,078854	-23,8987 -,078872	-121,538 -,822593	-121,538 -,822591	-100,340 -,617783	0,15
0,90	-40,1081 -,056092	-27,8156 -,084393	-27,8154 -,084395	-129,016 -,844604	-129,016 -,844604	-107,200 -,639816	0,10
0,95	-44,5135 -,056154	-31,8524 -,088544	-31,8524 -,088544	-136,504 -,866706	-136,504 -,866706	-114,087 -,650118	0,05
I,00	-49,0000 -,057143	-36,0000 -,091428	-36,0000 -,091428	-144,000 -,888889	-144,000 -,888889	-121,000 -,666667	0,00
$k^2 \uparrow$	II(2) B_2	II(1) B_1	II(0) A	I2(12) A	I2(11) B_1	I2(10) B_2	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	I2(-9)B ₁	I2(-8)A	I2(-7)B ₃	I2(-6)B ₂	I2(-5)B ₁	I2(-4)A	$k^2 \downarrow$
0,00	4,00000 -,463768	4,00000 -,463768	9,00000 -,415459	9,00000 -,415459	16,0000 -,847826	16,0000 -,847826	1,00
0,05	-0,28365 -,454914	1,16057 -,440961	5,04003 -,403478	5,25277 -,401422	11,8463 -,837717	11,8578 -,837605	0,95
0,10	-5,10945 -,451299	-1,14403 -,412986	1,12640 -,891049	2,48199 -,377952	7,94485 -,825170	8,12692 -,823411	0,90
0,15	-10,3867 -,452045	-4,05593 -,390678	-2,98204 -,380503	0,26861 -,349096	4,18033 -,311901	5,00437 -,303339	0,85
0,20	-16,0059 -,456096	-7,80192 -,376830	-7,37355 -,372691	-2,01534 -,320921	0,41848 -,297406	2,50466 -,277250	0,80
0,25	-21,8774 -,462584	-12,2136 -,369214	-12,0588 -,367717	-4,75387 -,297139	-3,44951 -,284536	0,33963 -,247926	0,75
0,30	-27,9378 -,470897	-17,0643 -,365839	-17,0114 -,365328	-8,10199 -,279246	-7,49421 -,273374	-1,84162 -,218760	0,70
0,35	-34,1440 -,480618	-22,2105 -,365319	-22,1932 -,365151	-12,0039 -,266704	-11,7501 -,264252	-4,31993 -,192463	0,65
0,40	-40,4660 -,491459	-27,5722 -,366881	-27,5668 -,366829	-16,3210 -,258174	-16,2236 -,257233	-7,27103 -,170734	0,60
0,45	-46,8827 -,503215	-33,1024 -,370071	-33,1008 -,370056	-20,9380 -,252541	-20,9033 -,252206	-10,7257 -,153872	0,55
0,50	-53,3788 -,515737	-38,7704 -,374593	-38,7700 -,374589	-25,7810 -,249092	-25,7696 -,248981	-14,6046 -,141107	0,50
0,55	-59,9423 -,528911	-44,5547 -,380289	-44,5546 -,380238	-30,8042 -,247364	-30,8008 -,247350	-18,8059 -,131458	0,45
0,60	-66,5644 -,542651	-50,4391 -,386851	-50,4391 -,386851	-35,9777 -,247128	-35,9768 -,247119	-23,2520 -,124174	0,40
0,65	-73,2376 -,556885	-56,4110 -,394309	-56,4110 -,394309	-41,2804 -,248120	-41,2802 -,248118	-27,8927 -,118770	0,35
0,70	-79,9563 -,571559	-62,4603 -,402515	-62,4602 -,402514	-46,6964 -,250207	-46,6964 -,250207	-32,6956 -,114933	0,30
0,75	-86,7156 -,586624	-68,5786 -,411388	-68,5786 -,411388	-52,2131 -,253267	-52,2131 -,253267	-37,6388 -,112452	0,25
0,80	-93,5115 -,602044	-74,7593 -,420862	-74,7593 -,420862	-57,8202 -,257200	-57,8202 -,257200	-42,7064 -,111173	0,20
0,85	-100,340 -,617783	-80,9963 -,430882	-80,9963 -,430882	-63,5092 -,261925	-63,5092 -,261925	-47,8858 -,110974	0,15
0,90	-107,200 -,633816	-87,2849 -,441400	-87,2849 -,441400	-69,2728 -,267371	-69,2728 -,267371	-53,1667 -,111756	0,10
0,95	-114,087 -,650118	-93,6206 -,452373	-93,6206 -,452373	-75,1049 -,273477	-75,1049 -,273477	-58,5406 -,113436	0,05
1,00	-121,000 -,666667	-100,000 -,463768	-100,000 -,463768	-81,0000 -,280193	-81,0000 -,280193	-64,0000 -,115942	0,00
$k^2 \uparrow$	I2(9)B ₃	I2(8)A	I2(7)B ₁	I2(6)B ₂	I2(5)B ₃	I2(4)A	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	$I_2(-3)B_3$	$I_2(-2)B_2$	$I_2(-1)B_1$	$I_2(0)A$	$I_3(-1)B_1$	$I_3(-12)B_2$	$k^2 \downarrow$
0,00	25,0000 -,260870	25,0000 -,260870	36,0000 -,154589	36,0000 -,154589	0,00000 -,502069	1,00000 -,493793	1,00
0,05	20,5752 -,253379	20,5756 -,253376	31,2721 -,150028	31,2721 -,150028	-6,41337 -,504938	-6,32658 -,504220	0,95
0,10	16,9591 -,243873	16,3700 -,243768	26,6965 -,143995	26,6969 -,143992	-14,2263 -,519390	-14,2156 -,519302	0,90
0,15	12,3507 -,232360	12,4366 -,231530	22,2861 -,136366	22,2908 -,136321	-22,3703 -,536582	-22,3686 -,536568	0,85
0,20	8,52081 -,219123	8,87812 -,215670	18,0519 -,127035	18,0805 -,126759	-30,6706 -,555067	-30,6703 -,555065	0,80
0,25	4,81033 -,204731	5,81453 -,195029	13,9971 -,115970	14,1132 -,114849	-39,0686 -,574361	-39,0685 -,574360	0,75
0,30	1,14301 -,189923	3,26052 -,169464	10,1108 -,103282	10,4665 -,099841	-47,5355 -,594225	-47,5355 -,594225	0,70
0,35	-2,55849 -,175444	1,05366 -,140544	6,36076 -,089268	7,23777 -,080794	-56,0546 -,614521	-56,0546 -,614521	0,65
0,40	-6,36018 -,161934	-1,05568 -,110683	2,70028 -,074393	4,48098 -,057188	-64,6148 -,635157	-64,6148 -,635157	0,60
0,45	-10,3098 -,149853	-3,31269 -,082248	-0,93071 -,059234	2,12851 -,029676	-73,2088 -,656073	-73,2088 -,656073	0,55
0,50	-14,4346 -,139464	-5,91991 -,057197	-4,56442 -,044390	0,00000 -,000000	-81,8309 -,677221	-81,8309 -,677221	0,50
0,55	-18,7433 -,130854	-8,98693 -,036589	-8,34731 -,030409	-2,12851 -,029676	-90,4771 -,698569	-90,4771 -,698569	0,45
0,60	-23,2315 -,123976	-12,5007 -,020297	-12,2334 -,017714	-4,48098 -,057188	-99,1440 -,720088	-99,1440 -,720088	0,40
0,65	-27,8868 -,118713	-16,3767 -,007505	-16,2803 -,006573	-7,23777 -,080794	-107,829 -,741759	-107,829 -,741759	0,35
0,70	-32,6941 -,114919	-20,5288 -,002621	-20,4994 -,002905	-10,4665 -,099841	-116,531 -,763564	-116,531 -,763564	0,30
0,75	-37,6385 -,112450	-24,8960 -,010666	-24,8888 -,010736	-14,1132 -,114849	-125,246 -,785488	-125,246 -,785488	0,25
0,80	-42,7064 -,111173	-29,4404 -,017001	-29,4391 -,017014	-18,0805 -,126759	-133,975 -,807521	-133,975 -,807521	0,20
0,85	-47,8858 -,110974	-34,1377 -,021858	-34,1376 -,021859	-22,2908 -,136321	-142,716 -,829652	-142,716 -,829652	0,15
0,90	-53,1667 -,111756	-38,9714 -,025997	-38,9714 -,025997	-26,6969 -,143992	-151,468 -,851872	-151,468 -,851872	0,10
0,95	-58,5406 -,113436	-43,9289 -,027740	-43,9289 -,027740	-31,2721 -,150028	-160,229 -,874174	-160,229 -,874174	0,05
1,00	-64,0000 -,115942	-49,0000 -,028985	-49,0000 -,028985	-36,0000 -,154589	-169,000 -,896552	-169,000 -,896552	0,00
$k^2 \uparrow$	$I_2(3)B_1$	$I_2(2)B_2$	$I_2(1)B_3$	$I_2(0)A$	$I_3(1)B_3$	$I_3(12)B_2$	$k^2 \uparrow$

$k^2 \downarrow$	$I_3(-11)B_3$	$I_3(-10)A$	$I_3(-9)B_1$	$I_3(-8)B_2$	$I_3(-7)B_3$	$I_3(-6)A$	$k^2 \downarrow$
0,00	I,00000 -,493798	4,00000 -,468964	4,00000 -,468966	9,00000 -,427586	9,00000 -,427586	I6,0000 -,369655	1,00
0,05	-2,10685 -,469298	-1,04060 -,460474	0,80115 -,445232	4,42572 -,415235	4,75527 -,412508	II,2432 -,358815	0,95
0,10	-7,06613 -,460133	-6,80559 -,457977	-2,00769 -,418270	-I,61491 -,402992	I,76488 -,387049	6,79405 -,345428	0,90
0,15	-13,1936 -,460637	-13,1341 -,460144	-5,79893 -,399398	-5,07018 -,393408	-0,77919 -,357897	2,45707 -,381114	0,85
0,20	-19,8762 -,465734	-19,8623 -,465619	-10,6176 -,389111	-10,3773 -,387122	-3,69508 -,331821	-I,96183 -,317477	0,80
0,25	-26,8762 -,473458	-26,8728 -,473430	-16,1337 -,384554	-16,0596 -,383942	-7,36944 -,312023	-6,59355 -,305602	0,75
0,30	-34,0910 -,482960	-34,0901 -,482953	-22,0818 -,383373	-22,0598 -,383392	-II,8047 -,298521	-II,5018 -,296015	0,70
0,35	-41,4655 -,493783	-41,4653 -,493782	-28,3258 -,385041	-28,3195 -,384389	-16,8067 -,289711	-16,6990 -,288819	0,65
0,40	-48,9656 -,505646	-48,9655 -,505645	-34,7921 -,388348	-34,7904 -,388334	-22,2026 -,284159	-22,1670 -,283865	0,60
0,45	-56,5679 -,518355	-56,5679 -,518355	-41,4355 -,393121	-41,4350 -,393118	-27,8860 -,280987	-27,8750 -,280896	0,55
0,50	-64,2556 -,531770	-64,2556 -,531770	-48,2254 -,399106	-48,2253 -,399105	-33,7940 -,279675	-33,7909 -,279649	0,50
0,55	-72,0160 -,545788	-72,0160 -,545788	-55,1395 -,406120	-55,1395 -,406120	-39,8870 -,279892	-39,8862 -,279886	0,45
0,60	-79,8395 -,560327	-79,8395 -,560327	-62,1608 -,414021	-62,1608 -,414021	-46,1871 -,281410	-46,1869 -,281409	0,40
0,65	-87,7182 -,575323	-87,7182 -,575323	-69,2760 -,422698	-69,2760 -,422698	-52,5237 -,284058	-52,5237 -,284058	0,35
0,70	-95,6458 -,590724	-95,6458 -,590724	-76,4743 -,432063	-76,4743 -,432063	-59,0907 -,287702	-59,0907 -,287702	0,30
0,75	-103,617 -,606487	-103,617 -,606487	-83,7467 -,442042	-83,7467 -,442042	-65,6449 -,292234	-65,6449 -,292234	0,25
0,80	-111,628 -,622576	-111,628 -,622576	-91,0860 -,452574	-91,0860 -,452574	-72,9555 -,297568	-72,9555 -,297568	0,20
0,85	-119,674 -,638962	-119,674 -,638962	-98,4860 -,463608	-98,4860 -,463608	-79,1535 -,303615	-79,1535 -,303615	0,15
0,90	-127,754 -,655618	-127,754 -,655618	-105,941 -,475100	-105,941 -,475100	-86,0312 -,310327	-86,0312 -,310327	0,10
0,95	-135,863 -,672522	-135,863 -,672522	-113,447 -,487011	-113,447 -,487011	-92,9819 -,317644	-92,9819 -,317644	0,05
I,00	-144,000 -,689655	-144,000 -,689655	-121,000 -,499311	-121,000 -,499311	-100,000 -,325517	-100,000 -,325517	0,00
$k^2 \downarrow$	$I_3(11)B_1$	$I_3(10)A$	$I_3(9)B_3$	$I_3(8)B_2$	$I_3(7)B_1$	$I_3(6)A$	$k^2 \downarrow$

k^{\downarrow}	$I_3(-5)B_1$	$I_3(-4)B_2$	$I_3(-3)B_3$	$I_3(-2)A$	$I_3(-1)B_1$	$I_3(0)B_2$	k^{\downarrow}
0,00	16,0000 -,369655	25,0000 -,295172	25,0000 -,295172	36,0000 -,204138	36,0000 -,204138	49,0000 -,096552	1,00
0,05	II,2648 -,358636	I9,9587 -,286686	I9,9594 -,286680	30,6464 -,198236	30,6464 -,198236	43,2977 -,093536	0,95
0,10	7,12147 -,342719	I5,1930 -,275920	I5,2171 -,275721	25,4966 -,190648	25,4976 -,190640	37,7490 -,089250	0,90
0,15	3,82479 -,319795	IO,6864 -,263009	IO,8700 -,261490	20,5669 -,181239	20,5793 -,181136	32,3676 -,083579	0,85
0,20	I,19009 -,291392	6,37065 -,248519	7,09002 -,242565	I5,8661 -,169936	I5,9400 -,169324	27,1693 -,076392	0,80
0,25	-I,30296 -,261818	2,13738 -,233346	3,98177 -,218082	II,3828 -,156832	II,6705 -,154451	22,1700 -,067558	0,75
0,30	-4,10701 -,234817	-2,12974 -,218453	I,37957 -,189410	7,07608 -,142267	7,90265 -,135426	I7,3812 -,056983	0,70
0,35	-7,50335 -,212717	-6,52891 -,204658	-I,06658 -,159448	2,87667 -,126814	4,72288 -,111535	12,8022 -,044672	0,65
0,40	-I,5452 -,195960	-II,1269 -,192498	-3,70619 -,131086	-I,30084 -,111179	2,04058 -,083526	8,41239 -,030794	0,60
0,45	-16,1172 -,183590	-15,9569 -,182264	-6,80965 -,106563	-5,54216 -,096073	-0,40094 -,053525	4,16704 -,015721	0,55
0,50	-21,0799 -,174454	-21,0244 -,173995	-10,4943 -,086850	-9,91952 -,082098	-2,90773 -,024064	0,00000 -,000000	0,50
0,55	-26,3345 -,167734	-26,3171 -,167590	-14,7094 -,071526	-14,4828 -,069651	-5,76240 -,002518	-4,16704 -,015721	0,45
0,60	-31,8197 -,162922	-31,8149 -,162882	-19,3349 -,059599	-19,2569 -,058954	-9,14980 -,024691	-8,41239 -,030794	0,40
0,65	-37,4968 -,159697	-37,4956 -,159688	-24,2689 -,050226	-24,2458 -,050034	-13,0868 -,042316	-12,8022 -,044672	0,35
0,70	-43,8392 -,157842	-43,8390 -,157840	-29,4452 -,042857	-29,4394 -,042809	-17,4719 -,056233	-17,3812 -,056983	0,30
0,75	-49,3275 -,157193	-49,3275 -,157193	-34,8226 -,037153	-34,8215 -,037143	-22,1931 -,067368	-22,1700 -,067558	0,25
0,80	-55,4462 -,157624	-55,4462 -,157624	-40,3746 -,032893	-40,3744 -,032892	-27,1796 -,076356	-27,1693 -,076392	0,20
0,85	-61,6826 -,159028	-61,6826 -,159028	-46,0820 -,029920	-46,0820 -,029920	-32,3681 -,083574	-32,3676 -,083579	0,15
0,90	-68,0262 -,161320	-68,0262 -,161320	-51,9298 -,028109	-51,9298 -,028109	-37,7490 -,089250	-37,7490 -,089250	0,10
0,95	-74,4679 -,164424	-74,4679 -,164424	-57,9059 -,027359	-57,9059 -,027355	-43,2977 -,093536	-43,2977 -,093536	0,05
I,00	-81,0000 -,168276	-81,0000 -,168276	-64,0000 -,027586	-64,0000 -,027586	-49,0000 -,096552	-49,0000 -,096552	0,00
k^{\uparrow}	$I_3(5)B_3$	$I_3(4)B_2$	$I_3(3)B_1$	$I_3(2)A$	$I_3(1)B_3$	$I_3(0)B_2$	k^{\uparrow}

Литература

1. С. Marty. Nucl. Phys., 1, 85, 1956; 3, 193, 1957.
2. А. С. Давыдов, Г. Ф. Филиппов. ЖЭТФ, 35, 440, 1958;
Nucl. Phys., 9, 237, 1958.
3. А. С. Давыдов, В. С. Ростовский. ЖЭТФ, 36, 1788, 1959;
Nucl. Phys., 12, 58, 1959.
4. А. С. Давыдов, Н. С. Работнов, А. А. Чабан. ЖЭТФ, 38, 1311, 1960;
Nucl. Phys., 17, 169, 1960.
5. С. А. Malmann. Nucl. Phys., 24, 535, 1961.
6. А. С. Давыдов. Возбужденные состояния атомных ядер. М.,
Атомиздат, 1967.
7. Е. В. Гай, Н. С. Работнов. ЯФ, 14, 519, 1971; 16, 284, 1972.
8. Г. Герцберг. Колебательные и вращательные спектры много-
атомных молекул, М., ИЛ, 1949.
9. М. А. Ельяшевич. Труды ГОИ, 12, 1, 1938; Атомная и молеку-
лярная спектроскопия, М., ГИФМЛ, 1962.
10. E. E. Witmer. Proc. Nat. Sci. Amer., 12, 60, 1927.
11. S. C. Wang. Phys. Rev., 34, 243, 1929.
12. H. A. Kramers, G. P. Itmann. Zs. Phys., 22, 553, 1929;
58, 217, 1929; 60, 663, 1930; **перепечатано в книге:**
H. A. Kramers. Collected Scientific Papers, North-Holland
Pub. Com., Amsterdam, 1986, pp. 423-471.
13. O. Klein. Zs. Phys., 58, 730, 1929.
14. H. B. G. Casimir. Rotation of Rigid Body in Quantum
Mechanics, Leyden, 1931.
15. D. M. Dennison. Rev. Mod. Phys., 2, 280, 1931.
16. B. S. Ray. Zs. Phys., 78, 74, 1932.
17. G. W. King, R. M. Hainer, P. C. Cross, J. Chem. Phys., 11, 27, 1943;
17, 826, 1949.

18. C. Van Winter. *Physica*, 20, 274, 1954.
19. F. Hund. *Zs. Phys.*, 51, 1, 1928.
20. F. Reiche, H. Rademaacher. *Zs. Phys.*, 39, 444, 1926;
41, 453, 1927.
21. R. de L. Kronig, J. J. Rabi. *Phys. Rev.*, 29, 262, 1927.
22. D. M. Dennison, *Phys. Rev.*, 28, 318, 1926.
23. Н. Мотт, И. Снеддон. *Волновая механика и ее применения*,
М., Наука, 1966
24. A. R. Edmonds. CERN-Report 55-26, Geneva, 1955,
пер. в сб. *Деформация атомных ядер*, М., ИЛ, 1958.
25. M. Zaoharia. *Amer. J. Phys.*, 40, 344, 1972.
26. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, М., ГИФМЛ, 1963.
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М., ГИФМЛ,
1963.
28. D. M. Brink, G. R. Satchler. *Angular momentum*, Clarendon,
Press, Oxford, 1968.
29. И. Лукач. *ТМФ*, 14, 366, 1975.
30. J. Patera, P. Winternitz. Preprint CRM-248, Montreal, 1972.
31. А. А. Эйхенвальд. *Теоретическая физика*, часть 3, М.-Л.,
ГТИИ, 1932.
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Механика*, М., Наука, 1965.
33. А. Г. Ситенко, В. К. Таргановский. *Лекции по теории ядра*,
М., Атомиздат, 1972.
34. М. Н. Олевский. *Мат. сб.*, 27, 379, 1950.
35. R. D. Spence. *Amer. J. Phys.*, 27, 329, 1959.

36. П.Вятерниц, Н.Лукач, Я.А.Сморodinский. ЯФ, 7, 192, 1968.
37. И.Лукач, Я.А.Сморodinский. АЭТФ, 57, 1324, 1969.
38. И.Аннс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.
39. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т.3, М., Наука, 1967.
40. Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа, т.2, М., ГИИИЛ, 1963.
41. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц, М., Наука, 1967.
42. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов суммы, рядов и произведений. М., ГИИИЛ, 1962.
43. Е.В.Гай. Препринт ФЭИ-203, 1970.
44. С.Ескарт. Rev.Mod.Phys., 2, 305, 1930.
45. G.Nasah. Phys.Rev., 61, 186, 1942; 62, 438, 1942; 63, 367, 1943; 76, 1352, 1949.
46. Е.Вигнер. Теория группы и ее применения к квантовомеханической теории атомных спектров. М., ИЛ, 1961.
47. А.Л.Джис, А.А.Бандзайтис. Теория момента количества движения в квантовой механике, Вильнюс, 1965.
48. Е.Кондон, Г.Шортли. Теория атомных спектров. М., ИЛ, 1949.
49. Я.А.Сморodinский, Л.А.Шелепин. УФН, 106, 3, 1972.
50. F.M.Arcsott, I.M.Khabaza. Tables of Lamé Polynomials, Pergamon Press, Oxford, 1962. (Mathematical Tables Series, vol.17).

Рукопись поступила в издательский отдел
20 сентября 1973 года.