СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7435

В.Н.Стрельцов

О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЖИДКОСТИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

I

Рассмотрим тензор энергии-импульса T_{ik} идеальной жидкости /газа/, который, как известно, характеризуется, в частности, равными нулю смешанными компонентами 3-тензора $T_{\alpha\beta}$ - натяжений. При этом в собственной системе отсчета (K°), где покоится данная жидкость вместе с заключающим ее замкнутым сосудом, тензор T_{ik} будет иметь отличными от нуля только диагональные элементы /см., например, /1/ /:

$$T^\circ_{ik} = \begin{vmatrix} p^\circ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon^\circ \end{vmatrix} \qquad /1/$$

Напомним, что равенство пространственных компонент $T^\circ_{11} = T^\circ_{22} = T^\circ_{33} = p^\circ$ определяет собою закон Паскаля.

В качестве модели такой идеальной системы мы рассмотрим равновесное излучение, заключенное в замкнутый сосуд.

1. Возьмем для этого сначала плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси OX и описываемую компонентами напряженностей:

$$\mathcal{E}^\circ_x = 0,\ \mathcal{E}^\circ_y = f,\ \mathcal{E}^\circ_z = g,\ H^\circ_x = 0,\ H^\circ_y = -g,\ H^\circ_z = f. \qquad /2/$$

При этом тензор энергин-импульса /электромагнитного поля/ плоской волны будет иметь вид:

$$t^{\circ}_{ik} = \begin{vmatrix} f^2+g^2 & 0 & 0 & -i(f^2+g^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i(f^2+g^2) & 0 & 0 & -(f^2+g^2) \end{vmatrix} \qquad /3/$$

Пусть далее происходит отражение указанной плоской волны от некоторой площадки, нормальной к оси OX, в результате чего компоненты t°_{14} и t°_{41} изменяют знак. Если теперь мы введем тензор

$$T^{\circ}_{ik} = \frac{1}{2}(t^{\circ}_{ik} + t^{\text{отраж.}}_{ik}), \qquad /4/$$

то он будет описывать совокупность плоских волн вида /2/, заключенных в пространстве между двумя ограничительными площадками, нормальными к OX. При этом, очевидно, будут отличны от нуля только две его компоненты, связанные известным равенством

$$T^{\circ}_{11} = -T^{\circ}_{44} \; (p^{\circ} = \epsilon^{\circ}). \qquad /5/$$

2. Перейдем теперь к случаю двух пространственных измерений, т.е. рассмотрим систему плоских волн различных направлений, заключенных в плоский замкнутый сосуд. Чтобы вычислить давление излучения в этом случае, произведем поворот координатной системы на угол θ. В результате для компонент $T^{\circ\prime\prime}_{11}$ и $T^{\circ\prime\prime}_{22}$ будем иметь:

$$T^{\circ\prime\prime}_{11}(\theta) = \cos^2\theta \, T^{\circ}_{11}, \quad T^{\circ\prime\prime}_{22}(\theta) = \sin^2\theta \, T^{\circ}_{11}. \qquad /6/$$

Усредняя по углу θ, придем к естественному результату

$$T^{\circ\prime\prime}_{11} = \int T^{\circ\prime\prime}_{11}(\theta)\, d\theta = T^{\circ\prime\prime}_{22} = \int T^{\circ\prime\prime}_{22}(\theta)\, d\theta = p^{\circ\prime\prime} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\circ}. \qquad /7/$$

3. Для определения давления излучения в общем случае произведем произвольный поворот в пространстве, который будет описываться матрицей

$$a_{\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_1\sin\phi_2 - \cos\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 & \sin\phi_1\sin\theta \\ \sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\theta\cos\phi_1\sin\phi_2 & -\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\theta\cos\phi_1\cos\phi_2 & -\cos\phi_1\sin\theta \\ \sin\phi_2\sin\theta & \cos\phi_2\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \qquad /8/$$

где ϕ_1, ϕ_2 и θ - углы Эйлера. При этом будем иметь

$$T^{\circ\prime\prime\prime}_{11}(\phi,\theta) = (a_{11})^2 T^{\circ}_{11}, \quad T^{\circ\prime\prime\prime}_{22}(\phi,\theta) = (a_{21})^2 T^{\circ}_{11}, \quad T^{\circ\prime\prime\prime}_{33}(\phi,\theta) = (a_{31})^2 T^{\circ}_{11}. \qquad /9/$$

Усредняя по всем возможным направлениям, найдем в соответствии с известным результатом

$$\int (a_{11})^2 dV = \int (a_{21})^2 dV = \int (a_{31})^2 dV = \frac{1}{3}, \qquad /10/$$

где $dV = \dfrac{1}{8\pi^2} \sin\theta \, d\phi_1 \, d\phi_2 \, d\theta$,

а следовательно /опуская штрихи/,

$$T^{\circ}_{11} = T^{\circ}_{22} = T^{\circ}_{33} = p^{\circ} = \frac{1}{3}\,\epsilon^{\circ}. \qquad /11/$$

II

1. Рассмотрим далее формулы преобразования для компонент тензора энергии-импульса T_{ik} при переходе от одной инерциальной системы отсчета (K°) к другой (K). При этом в соответствии с общими правилами преобразования компонент симметричного тензора 2-го ранга будем, например, иметь

$$T_{11} = (T^{\circ}_{11} - \beta^2 T^{\circ}_{44})\gamma^2, \quad T_{22} = T^{\circ}_{22}, \quad T_{33} = T^{\circ}_{33}, \qquad /12/$$

$$T_{44} = (T^{\circ}_{44} - \beta^2 T^{\circ}_{11})\gamma, \quad T_{41} = i\beta(T^{\circ}_{11} - T^{\circ}_{44})\gamma^2, \qquad /13/$$

где $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, или, в частности,

$$p_{||} = (p^\circ + \beta^2 \epsilon^0)\gamma^2, \quad p_\perp = p^\circ, \qquad /12a/$$

$$\epsilon = (\epsilon^\circ + \beta^2 p^\circ)\gamma^2, \quad S_x = \beta(\epsilon^\circ + p^\circ)\gamma^2. \qquad /13a/$$

Здесь необходимо специально подчеркнуть следующее. Если, подобно Планку /см., например, /2/ /, считать, что нормальное давление p является скалярной величиной и не преобразуется при переходе к другой системе отсчета ($p_{||} = p^\circ$), то мы вынуждены допустить тогда на основании первой формулы /12a/, что $p^\circ = -\epsilon^\circ$ ($T^\circ_{44} = T^\circ_{11}$). При этом, опираясь на первое выражение /13a/, будем иметь также $\epsilon = \epsilon^\circ$.

Полученные таким образом выводы вряд ли можно считать приемлемыми, поскольку, например, первый из них находится в прямом противоречии с формулой /11/. Кроме того, на основании второго выражения /13/ придем к другому физически неудовлетворительному результату, что в K-системе, где объем с жидкостью движется, поток переносимой им энергии S_x должен быть равен нулю.

Учитывая сказанное, мы вынуждены поставить под сомнение справедливость /общепринятого/ исходного утверждения об инвариантности нормального давления *. Составляющие указанной величины должны преобразовываться согласно правилам преобразования для компонент тензора 2-го ранга, определяемым формулами /12/.

2. Коснемся теперь вопроса об импульсе и энергии рассматриваемой равновесной системы. Введем для этого, как обычно, 4-вектор импульса

$$P_i = \int T_{ik}\, dV_k, \qquad /14/$$

где dV_k - 4-вектор бесконечно малого элемента объема.

* Ранее при рассмотрении близких вопросов с использованием тензора энергии-импульса 4-го ранга $T_{i,jk\ell}$ /3/ автор фактически опирался на отмеченный выше результат Планка. В связи с вышесказанным можно, по-видимому, говорить лишь о том, что данный тензор $T_{i,jk\ell}$ антисимметричен относительно перестановок только трех последних /координатных/ индексов.

Напомним, что, в частности, его четвертая компонента dV_4 описывает объем прямоугольного параллелепипеда, образованного тремя бесконечно малыми 3-векторами специального вида $dx_\alpha(dx,0,0)$, $\delta x_\alpha(0,dy,0)$ и $\Delta x_\alpha(0,0,dz)$:

$$dV_4 = \begin{vmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{vmatrix}. \qquad /15/$$

Здесь мы хотим обратить внимание на следующее. Если в соответствии с общепринятым определением длины движущегося масштаба считать, что в K-системе вектор dx_i имеет вид dx_i $(dx,0,0,0)$, а поэтому, например,

$$dV_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{vmatrix} = 0, \qquad /16/$$

то для энергии и импульса (P_x) данной равновесной системы будем иметь

$$P_x = i\int T_{14}\, dV_4, \quad E = -\int T_{44}\, dV_4. \qquad /17/$$

С другой стороны, для K°-системы получим

$$P^\circ_x = \int T^\circ_{11}\, dV^\circ_1, \quad E^\circ = -\int T^\circ_{44}\, dV_4, \qquad /18/$$

поскольку на основании формулы преобразования для компонент 4-вектора будем иметь известное равенство

$$dV^\circ_4 = dV_4\,\gamma, \qquad /19/$$

а кроме того, следующее выражение

$$dV^\circ_1 = -\beta\, dV_4\,\gamma, \qquad /20/$$

откуда с необходимостью вытекает, что в K°-системе данный покоящийся объем с жидкостью должен обладать импульсом *

$$P_x^\circ = \int T_{11}^\circ \, dV_1^\circ \neq 0, \qquad /21/$$

Укажем сразу, что этот результат является прямым следствием использования общепринятого определения понятия длины движущегося масштаба, которое приводит к лоренцеву сокращению. Поэтому, чтобы избавиться от отмеченной трудности, мы должны отказаться от указанного определения.

2a. В связи с вышеизложенным будем определять элемент пространственного объема в K°-системе как объем прямоугольного параллелепипеда, образованного тремя бесконечно малыми векторами $dx_i^\circ(dx^\circ, 0, 0, 0)$, $\delta x_i^\circ\ (0, dy^\circ, 0, 0)$ и $\Delta x_i^\circ\ (0, 0, dz^\circ, 0)$. В результате будем, например, иметь

$$dV_4^\circ = \begin{vmatrix} dx^\circ & 0 & 0 \\ 0 & dy^\circ & 0 \\ 0 & 0 & dz^\circ \end{vmatrix}, \quad dV_1^\circ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & dy^\circ & 0 \\ 0 & 0 & dz^\circ \end{vmatrix} = 0, \qquad /22/$$

откуда следует, что

$$P_x^\circ = \int T_{11}^\circ dV_1^\circ + i \int T_{14}^\circ dV_4^\circ = 0, \qquad /23а/$$

$$E^\circ = -\int T_{44}^\circ \, dV_4^\circ, \qquad /23б/$$

т.е., как того и требует логика вещей, импульс покоящегося объема действительно равен нулю.

---

* В частном случае одного пространственного измерения при условии постоянства T_{11}° будем иметь, например, $P_x^\circ = T^\circ \int_{-\beta X\gamma}^{0} dt = -\beta\, T_{11}^\circ X\gamma$, где X - продольный размер рассматриваемого объема в K-системе. Заметим, что полученный результат имеет силу и применительно к импульсу электромагнитного поля классического электрона.

Привлекая формулы преобразования для компонент тензора T_{ik} /12/ и для составляющих вектора объема:

$$dV_4 = dV_4^\circ \gamma, \quad dV_1 = \beta\, dV_4^\circ\, \gamma \qquad /24/$$

найдем, что

$$P_x = \int T_{11} dV_1 + i \int T_{14} dV_4 = -\beta\gamma \int T_{44}^\circ \, dV_4^\circ = \beta E^\circ \gamma, \qquad /25а/$$

$$E = i \int T_{41}\, dV_1 - \int T_{44} dV_4 = -\gamma \int T_{44}^\circ \, dV_4^\circ = E^\circ \gamma. \qquad /25б/$$

На основании /25а/ и /25б/ мы можем заключить, что энергия и импульс рассматриваемой равновесной системы образуют 4-вектор. Последний результат находится в полном соответствии с аналогичным выводом, который был сделан ранее относительно энергии и импульса электромагнитного поля классического электрона /см., например, /4/ и /5/ /*.

III

В заключение мы сделаем качественное замечание, касающееся вида формулы для плотности энергии излучения черного тела /закон Стефана-Больцмана/:

$$\epsilon^\circ = a T^{\circ 4}. \qquad /26/$$

Зависимость плотности излучения от четвертой степени температуры достаточно трудно понять, если рассматривать ϵ° как компоненту тензора 2-го ранга. Действительно, ведь компоненты указанного тензора, например, преобразуются как произведения составляющих двух 4-векторов. Мы достигнем значительно большего понимания, если снова будем трактовать плотность энер-

---

* Впрочем, отмеченный результат в какой-то мере можно было предвидеть, поскольку, например, рассмотренное в ч. I электромагнитное излучение, заключенное в замкнутый сосуд, может служить достаточно хорошей моделью ультрарелятивистской жидкости.

гии как компоненту тензора 4-го ранга /3/. При этом наряду с вектором температуры, предложенным Арцели /6/:

$$T^{\circ}_{Ai} = \frac{P^{i\,\circ}}{m} T^{\circ}, \qquad /27/$$

необходимо будет, по-видимому, ввести также три пространственных вектора температуры типа $T^{\circ}_{i} = n^{\circ}_{i} T^{\circ}$, где n°_{i} - единичные векторы, направленные вдоль соответствующих /пространственных/ координатных осей.

Дополнение

1. Рассмотрим выражение, описывающее закон сохранения энергии и, например, x - компоненты импульса электромагнитного поля

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -q\,, \qquad /Д.1/$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma} = -q_x\,. \qquad /Д.2/$$

Здесь $q = \vec{j}\vec{E}$ - джоулево тепло, выделяемое в единицу времени в единице объема, $\vec{\sigma}\,(T_{11}, T_{12}, T_{13})$, а q_x - импульс, переносимый тепловым потоком.

Определим, как обычно, собственную систему отсчета (K°), где $q^{\circ}_{x} = 0$. Тогда с точки зрения некоторой другой системы отсчета, движущейся относительно собственной со скоростью β, на основании формул преобразования для левых частей /Д.1/ и /Д.2/ найдем, в частности, что

$$q = \frac{q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \qquad /Д.3/$$

Вследствие инвариантности четырехмерного объема эта формула должна быть справедлива также для всей теплоты, выделенной при определенном процессе:

$$Q = \frac{Q^{\circ}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \qquad /Д.3'/$$

2. Рассмотрим далее следующее выражение:

$$dA = \epsilon\, dV_4\,, \qquad /Д.4/$$

описывающее работу, совершаемую над некоторой замкнутой системой, при условии отсутствия потока энергии.

В результате сведения интеграла по объему к интегралу по поверхности с последующим переходом к криволинейному интегралу будем иметь

$$A = \int \epsilon\, dV_4 =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial^3 P_4}{\partial z\,\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^3 P_4}{\partial y\,\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^3 P_4}{\partial x\,\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^3 P_4}{\partial z\,\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^3 P_4}{\partial y\,\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^3 P_4}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \right) \times$$

$$\times\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial^2 P_4}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 P_4}{\partial y\,\partial z} \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial^2 P_4}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 P_4}{\partial z\,\partial x} \right) dz\, dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 P_4}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 P_4}{\partial x\,\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{(s)} \frac{\partial P_4}{\partial x} dx + \frac{\partial P_4}{\partial y} dy + \frac{\partial P_4}{\partial z} dz,$$

где $P_4 = \sum_i p_4^i N^i$, а N^i - число частиц с данной энергией. С учетом того, что $\partial P_4 / \partial t = 0$, придем к релятивистскому выражению для работы

$$dA = \frac{\partial P_4}{\partial t} dt + \frac{\partial P_4}{\partial x} dx + \frac{\partial P_4}{\partial y} dy + \frac{\partial P_4}{\partial z} dz = \frac{d\,P_4}{d\,s} ds = F_4 ds, \qquad /Д.5/$$

где F_4 -4-ая компонента силы Минковского, а ds - элемент длины в 4-мире.

3. На основании равенств $T_{44}=\sum_i P_4^i j_4^i$, $T_{11}=\sum_i P_1^i j_1^i$ и т.д. можно заключить, что

$$T_{\alpha\alpha}+T_{4i}=-\sum_i \rho^{*i} m^i, \qquad /Д.6/$$

где ρ^{*i} - инвариантная плотность частиц с массой m^i.

4. При условии, что в уравнении, описывающем первое начало термодинамики

$$dQ^\circ=dU^\circ-dA^\circ, \qquad /Д.7/$$

dU° представляет собою изменение внутренней кинетической энергии системы, релятивистское выражение

$$dQ_4^\circ=dU_4^\circ-\epsilon^\circ dV_4^\circ$$

может быть сведено на основании /Д.7/ к равенству

$$dQ^\circ=dU^\circ-3p^\circ dV_4^\circ, \qquad /Д.8/$$

где мы учли, что в собственной системе отсчета K° $T_{11}^\circ=T_{22}^\circ=T_{33}^\circ=p^\circ$.

5. В связи с вышеизложенным /п.п. 4 и 5/ ковариантные уравнения состояния релятивистского идеального газа должны определяться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} &T_{\alpha\alpha}V_4-T_{41}V_1=Nk_1\theta_4,\\ &(T_{44}+T_{22}+T_{33})V_1-T_{14}V_4=Nk_1\theta_1. \end{aligned} \qquad /Д.9/$$

В собственной системе отсчета, где $T_{41}^\circ=0$ и $V_1^\circ=0$, в частности, будем иметь

$$T_{\alpha\alpha}^\circ V_4^\circ=Nk_1\theta_4^\circ$$

или

$$p^\circ V^\circ=Nk\,\theta_4^\circ, \text{ где } k_1=3k. \qquad /Д.9'/$$

Литература

1. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., § 124, 1954.*
2. *В.Паули. Теория относительности, ОГИЗ, ГИТТЛ, М.-Л., § 45, стр. 194, 1947.*
3. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-6694, Дубна, 1972.*
4. *F.Rohrlich. Amer. J.Phys., 38, 1310 (1970).*
5. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-6710, Дубна, 1972.*
6. *H.Arzeliès. Nuovo Cim., 35, 792 (1965).*

Рукопись поступила в издательский отдел 30 августа 1973 года.