ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 7430

Дао Вонг Дык

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ И ПРАВИЛА ОТБОРА ДЛЯ КОНФОРМНО-КОВАРИАНТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7430

Дао Вонг Дык

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ И ПРАВИЛА ОТБОРА ДЛЯ КОНФОРМНО-КОВАРИАНТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

Направлено в ТМФ

Дао Вонг Дык

Р2 - 7430

Общие формулы и правила отбора для конформно-ковариантного разложения произведения операторов

На основе закона R-преобразования получены общие формулы для конформно-ковариантного разложения произведения операторов. Указаны правила отбора для случая сохраняющихся тензоров. Полученные результаты непосредственно перенесены затем на формулы для конформно-ковариантных двухточечных и трехточечных корреляционных функций.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1973

Dao Vong Dyc

P2 - 7430

General Formulae and Selection Rules for Conformally Covariant Operator Product Expansion

On the basis of the R-transformation law general formulae were obtained for the conformally covariant expansion of the operator product. The selection rules are mentioned for the case of conserved tensors. The obtained results are transferred directly to the formulae for the conformally covariant two- and three-point correlation functions.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

1. ВВЕДЕНИЕ

Важность вопроса разложения произведения операторов общеизвестна. Этот вопрос широко обсуждается в последние годы как в рамках теории возмущения, так и в рамках различных моделей теории поля. Особый интерес представляет применение идеи конформной инвариантности к такому разложению, чему посвящаются многие работы /например, /1-3/ и цитированная там литература/. При этом в основном был использован метод, основанный на тождествах Якоби или на изоморфизме между конформной алгеброй и ортогональной алгеброй $O(4,2)$.

В настоящей работе мы выводим общие формулы для конформно-ковариантного разложения произведения операторов, исходя из закона R-преобразования /4-8/. Указаны также правила отбора для случая сохраняющихся тензорных операторов. Полученные результаты непосредственно перенесены затем на формулы для конформно-ковариантных двухточечных и трехточечных корреляционных функций.

Для удобства кратко напомним сначала некоторые основные положения, касающиеся R-преобразования.

Оператор координатной инверсии R определяется как

$$R x^{\mu} = -\frac{x^{\mu}}{x^2}. \qquad /1.1/$$

Имеют место следующие соотношения:

$$R M_{\mu\nu} R = M_{\mu\nu}, \quad R P_{\mu} R = K_{\mu}, \quad R D R = -D, \qquad /1.2/$$

где $M_{\mu\nu}$, P_{μ}, D и K_{μ} - генераторы однородного преобразования Лоренца, трансляции, масштабного и специального конформного преобразования соответственно. Из этих соотношений следует, что ковариантность по отношению к R и D /а также к алгебре Пуанкаре/ влечет за собой ковариантность по отношению ко всей конформной алгебре.

Под действием R тензорный оператор $A_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}(x)$ преобразуется по формуле

$$U(R)A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)U^{-1}(R) =$$

$$= \delta_A (x^2)^{\ell_A} (\delta_{\mu_1}^{\mu_1'} - \frac{2x_{\mu_1}x^{\mu_1'}}{x^2}) \ldots (\delta_{\mu_p}^{\mu_p'} - \frac{2x_{\mu_p}x^{\mu_p'}}{x^2}) \times$$

$$\times A_{\mu_1'\ldots\mu_p'}(Rx), \quad |\delta_A| = 1, \qquad /1.3/$$

а спинорный оператор $\psi(x)$ - по формуле

$$U(R)\psi(x)U^{-1}(R) = \delta_\psi (x^2)^{\ell_\psi} \frac{\hat{x}}{(x^2)^{1/2}} \psi(Rx), \; |\delta_\psi| = 1 \; (\hat{x} \equiv x^\mu \gamma_\mu), \qquad /1.4/$$

где ℓ_ϕ - масштабная размерность поля ϕ, определяющая его поведение при масштабном преобразовании:

$$e^{-iaD}\phi(x)e^{iaD} = \lambda^{-\ell_\phi}\phi(\lambda x), \quad \lambda = e^a. \qquad /1.5/$$

После этих кратких сведений мы приступим теперь к выводу общей формулы для конформно-ковариантного разложения произведения операторов.

2. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим произведение двух неприводимых /т.е. симметричных и бесследных/ тензорных операторов $A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)$ и $B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)$ с определенными масштабными размерностями ℓ_A и ℓ_B. Пусть для этого произведения имеет место конформно-ковариантное разложение, которое отыскивается в следующем общем виде:

$$A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y) = \sum_C \int d^4z \, F^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,y,z)C^{\rho_1\ldots\rho_r}(z), \qquad /2.1/$$

где $C^{\rho_1\ldots\rho_r}$ - также неприводимый тензорный оператор с определенной масштабной размерностью ℓ_C, а $F^{ABC}_{\mu\ldots\mu\,\nu\ldots\nu\,\rho\ldots\rho}$ - некоторая тензорная функция. Ясно, что эта функция должна быть симметричной и бесследной по индексам μ и ν в отдельности, а также может быть выбрана такой же и по индексам ρ. Кроме того, из-за трансляционной инвариантности она должна зависеть лишь от разностей координат $(x-y)$ и $(y-z)$.

Осуществляя R -преобразование и масштабное преобразование в обеих частях уравнения /2.1/ по формулам /1.3/ и /1.5/, можно получить следующие уравнения для функции $F^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}$ /фазовые множители опущены/:

$$F^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(Rx,Ry,Rz) =$$

$$= (x^2)^{-\ell_A}(y^2)^{-\ell_B}(z^2)^{-L_C} M(x)^{\mu_1'}_{\mu_1} \ldots M(x)^{\mu_p'}_{\mu_p} \ldots M(y)^{\nu_1'}_{\nu_1} \ldots M(y)^{\nu_q'}_{\nu_q} \times$$

$$\times M(z)^{\rho_1'}_{\rho_1} \ldots M(z)^{\rho_r'}_{\rho_r} F^{ABC}_{\mu_1'\ldots\mu_p'\nu_1'\ldots\nu_q'\rho_1'\ldots\rho_r'}, \qquad /2.2/$$

$$F^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^{\ell_A+\ell_B+L_C} F^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,y,z), \qquad /2.3/$$

где использовано обозначение

$$M(x)^{\mu'}_{\mu} \equiv \delta^{\mu'}_{\mu} - \frac{2x_\mu x^{\mu'}}{x^2}, \ldots, \quad L_C \equiv -(\ell_C + 4). \qquad /2.4/$$

Для нахождения общего вида решения уравнения /2.2/ и /2.3/ будем исходить из следующих равенств:

$$(Rx-Ry)^2 = \frac{(x-y)^2}{x^2y^2}, \qquad /2.5/$$

$$R(Rx-Ry)_\mu = -x^2 M(x)_\mu^{\mu'} R(x-y)_{\mu'} + x_\mu , \qquad /2.6/$$

$$M(x)_{\mu_1}^{\mu_1'} M(x)_{\mu_2}^{\mu_2'} g_{\mu_1'\mu_2'} = g_{\mu_1\mu_2} , \qquad /2.7/$$

$$M(x)_\mu^{\mu'} M(y)_\nu^{\nu'} M_{\mu'\nu'}(x-y) = M_{\mu\nu}(Rx-Ry), \qquad /2.8/$$

вытекающих непосредственно из определений /1.1/ и /2.4/. Эти равенства показывают, что решением уравнений /2.2/ и /2.3/ может служить всякое выражение типа

$$f^{(i,j,k)}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,y,z) \equiv$$

$$\equiv [(x-y)^2]^{\frac{1}{2}(\ell_A+\ell_B-L_C+p+q-r)-i-j+k} \times$$

$$\times [(y-z)^2]^{\frac{1}{2}(\ell_B+L_C-\ell_A+q+r-p)-j-k+i} [(z-x)^2]^{\frac{1}{2}(L_C+\ell_A-\ell_B+r+p-q)-k-i+j} \times$$

$$\times \underset{(\mu)}{S}\, g_{\mu_1\mu_2}\ldots g_{\mu_{2i-1}\mu_{2i}}[R(x-y)-R(x-z)]_{\mu_{2i+1}}\ldots[R(x-y)-R(x-z)]_{\mu_p}\times$$

$$\times \underset{(\nu)}{S}\, g_{\nu_1\nu_2}\ldots g_{\nu_{2j-1}\nu_{2j}}[R(y-z)-R(y-x)]_{\nu_{2j+1}}\ldots[R(y-z)-R(y-x)]_{\nu_q}\times$$

$$\times \underset{(\rho)}{S}\, g_{\rho_1\rho_2}\ldots g_{\rho_{2k-1}\rho_{2k}}[R(z-x)-R(z-y)]_{\rho_{2k+1}}\ldots[R(z-x)-R(z-y)]_{\rho_r},$$

/2.9/

где i, j, k принимают целые значения от нуля до $p/2$, $q/2$, $r/2$ соответственно, символы $\underset{(\mu)}{S}$, $\underset{(\nu)}{S}$ и $\underset{(\rho)}{S}$ означают симметризацию по всем индексам μ, ν и ρ в отдельности. Можно видеть, что число членов, входящих сюда, равно

$$\frac{p!}{(2i)!\,(p-2i)!}(2i-1)!!, \quad \frac{q!}{(2j)!\,(q-2j)!}(2j-1)!!,$$

$$\frac{r!}{(2k)!\,(r-2k)!}(2k-1)!!$$

соответственно.

Решением уравнений /2.2/ и /2.3/ может служить также выражение типа

$$f_1{}^{(i,j)}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,y,z) \equiv$$

$$\equiv [(x-y)^2]^{\frac{1}{2}(\ell_A+\ell_B-L_C+p)-i}[(y-z)^2]^{\frac{1}{2}(\ell_B+L_C-\ell_A-p)+i} \times$$

$$\times [(z-x)^2]^{\frac{1}{2}(L_C+\ell_A-\ell_B+p)-i} \times$$

$$\times \underset{(\mu)}{S}\, g_{\mu_1\mu_2}\ldots g_{\mu_{2i-1}\mu_{2i}}[R(x-y)-R(x-z)]_{\mu_{2i+1}}\ldots[R(x-y)-R(x-z)]_{\mu_p}\times$$

$$\times \underset{(\nu)}{S}\,\underset{(\rho)}{S}\, g_{\nu_1\nu_2}\ldots g_{\nu_{2j-1}\nu_{2j}} g_{\rho_1\rho_2}\ldots g_{\rho_{2j-1}\rho_{2j}} M(y-z)_{\nu_{2j+1}\rho_{2j+1}}\ldots M(y-z)_{\nu_q\rho_q}$$

/2.10/

в случае $q=r$ и аналогичное выражение в случае $r=p$ или $p=q$. Здесь число членов, возникающих при симметризации $\underset{(\nu)}{S}\,\underset{(\rho)}{S}$, равно $\left[\frac{q!(2j-1)!!}{(2j)!}\right]^2 \frac{1}{(q-2j)!}$.

Условие бесследиости функции $F^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}$ по каждой группе индексов μ, ν и ρ, однако, допускает только решение в виде линейной комбинации выражений типа /2.9/ или типа /2.10/ с определенными коэффициентами, а именно:

$$F^{ABC}_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q \rho_1 \dots \rho_r} = g^{ABC} \sum_{i,j,k} \frac{(-1)^{i+j+k}}{2^{i+j+k}} \frac{(p-i)!}{p!} \times$$

$$\times \frac{(q-j)!}{q!} \frac{(r-k)!}{r!} f^{(i,j,k)}_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q \rho_1 \dots \rho_r}(x,y,z) +$$

$$+ \delta_{qr} g_1^{ABC} \sum_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{2^i} \frac{(p-i)!}{p!} \frac{j!(q-j)!}{q!} f^{(i,j)}_{1\,\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q \rho_1 \dots \rho_r}(x,y,z) +$$

$$+ \delta_{rp} g_2^{ABC} \sum_{j,k} \frac{(-1)^{j+k}}{2^j} \frac{(q-j)!}{q!} \frac{k!(r-k)!}{r!} f^{(j,k)}_{2\,\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q \rho_1 \dots \rho_r}(x,y,z) +$$

$$+ \delta_{pq} g_3^{ABC} \sum_{k,i} \frac{(-1)^{k+i}}{2^k} \frac{(r-k)!}{r!} \frac{i!(p-i)!}{p!} f^{(k,i)}_{3\,\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q \rho_1 \dots \rho_r}(x,y,z), \qquad /2.11/$$

где g^{ABC}, $g^{ABC}_{1,2,3}$ - некоторые постоянные множители, а $f_2^{(j,k)}$ и $f_3^{(k,i)}$ - функции, получающиеся из /2.10/ по правилу циклической подстановки:

$$(x, \ell_A, i, p, \mu) \to (y, \ell_B, j, q, \nu) \to (z, L_C, k, r, \rho) \to (x, \ell_A, i, p, \mu). \qquad /2.12/$$

Таким образом, мы получили общую формулу /2.1/, /2.9/-/2.12/ для конформно-ковариантного разложения произведения двух неприводимых тензоров любого ранга с определенными масштабными размерностями. В частности, для произведения скалярных операторов эта формула переходит в /2,3/:

$$A(x)B(y) = \sum g^{ABC} \int d^4 z [(x-y)^2]^{1/2(\ell_A+\ell_B-L_C-r)} \times$$

$$\times [(y-z)^2]^{1/2(\ell_B+L_C-\ell_A+r)} [(z-x)^2]^{1/2(L_C+\ell_A-\ell_B+r)} \times$$

$$\times [R(z-x)-R(z-y)]_{\rho_1} \dots [R(z-x)-R(z-y)]_{\rho_r}. \qquad /2.13/$$

Для разложения произведения двух спинорных операторов мы поступаем аналогично. Вместо /2.1/ теперь имеем:

$$A_a(x)\bar{B}^{\beta}(y) = \sum_C \int d^4 z \{F^{ABC}_{\rho_1 \dots \rho_r}(x,y,z)\}_a^{\beta} C^{\rho_1 \dots \rho_r}(z) \qquad /2.14/$$

/ a, β - спинорные индексы/ и следующее уравнение для F вместо /2.2/:

$$\{F^{ABC}_{\rho_1 \dots \rho_r}(Rx,Ry,Rz)\}_a^{\beta} = (x^2)^{-(\ell_A+1/2)} (y^2)^{-(\ell_B+1/2)} (z^2)^{-L_C} \times$$

$$\times M(z)^{\rho_1'}_{\rho_1} \dots M(z)^{\rho_r'}_{\rho_r} \{\hat{x} F^{ABC}_{\rho_1' \dots \rho_r'}(x,y,z) \hat{y}\}_a^{\beta}. \qquad /2.15/$$

Используя равенства

$$\hat{x}\hat{R}(x-y)\hat{y} = \hat{R}(Rx-Ry), \qquad /2.16/$$

$$\hat{x}\hat{R}(x-z)\hat{R}(z-y)\hat{y} = \frac{1}{z^2} \hat{R}(Rx-Rz)\hat{R}(Rz-Ry), \qquad /2.17/$$

$$M(z)^{\rho'}_{\rho} \hat{x}\hat{R}(x-z)\gamma_{\rho'} \hat{R}(z-y)\hat{y} = -\frac{1}{z^2} \hat{R}(Rx-Rz)\gamma_{\rho}\hat{R}(Rz-Ry), \qquad /2.18/$$

вытекающие непосредственно из /1.1/ и /2.4/, вместе с /2.5/ - /2.7/ и свойством матриц Дирака $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu}$ можно получить следующее общее решение уравнения /2.15/ /и уравнения однородности, аналогичного /2.3//:

$$F^{ABC}_{\rho_1\ldots\rho_r}(x,y,z)=[(x-y)^2]^{1/2(\ell_A+\ell_B-L_C+1-r)}\times$$

$$\times[(y-z)^2]^{1/2(\ell_B+L_C-\ell_A+r)}[(z-x)^2]^{1/2(\ell_C+\ell_A-\ell_B+r)}\times$$

$$\times\{[R(z-x)-R(z-y)]_{\rho_1}\ldots[R(z-x)-R(z-y)]_{\rho_r}\times$$

$$\times[g_{ABC}\frac{\hat{x}-\hat{y}}{(x-y)^2}+g'_{ABC}\frac{(\hat{x}-\hat{z})(\hat{y}-\hat{z})}{((x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2)^{1/2}}]+$$

$$+\delta_{r1}\,g''_{ABC}\,\frac{\hat{x}-\hat{z}}{(x-z)^2}\gamma_{\rho_1}\frac{\hat{y}-\hat{z}}{(y-z)^2}\}. \qquad /2.19/$$

Наконец, приводим формулу разложения в пределе светового конуса, т.е. при $(x-y)^2\to 0$. Для этого в полученных выражениях /2.11/ и /2.19/ оставляем лишь ведущие члены по $\frac{1}{(x-y)^2}$, а затем применяем преобразование Римана-Лиувиля, как это делается в работах /9,2/. В результате имеем:

$$A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)\underset{(x-y)^2\to 0}{\approx}\sum_C[(x-y)^2]^{1/2(\ell_A+\ell_B-\ell_C-p-q-r)}\times$$

$$\times(x-y)_{\mu_1}\ldots(x-y)_{\mu_p}(x-y)_{\nu_1}\ldots(x-y)_{\nu_q}(x-y)_{\rho_1}\ldots(x-y)_{\rho_r}\times$$

$$\times\int_0^1 du\,u^{-1/2(\ell_C+\ell_A-\ell_B-r+p-q)-1}\times$$

$$\times(1-u)^{-1/2(\ell_B+\ell_C-\ell_A+q-r-p)-1}C^{\rho_1\ldots\rho_r}(u(x-y)+y). \qquad /2.20/$$

$$A_\alpha(x)\bar{B}^\beta(y)\underset{(x-y)^2\to 0}{\approx}\sum_C[(x-y)^2]^{1/2(\ell_A+\ell_B-\ell_C-r-1)}\times$$

$$\times(\hat{x}-\hat{y})_\alpha^\beta(x-y)_{\rho_1}\ldots(x-y)_{\rho_r}\int_0^1 du\,u^{-1/2(\ell_C+\ell_A-\ell_B-r)-1}\times$$

$$\times(1-u)^{-1/2(\ell_B+\ell_C-\ell_A-r)-1}C^{\rho_1\ldots\rho_r}(u(x-y)+y). \qquad /2.21/$$

3. ПРАВИЛА ОТБОРА

Посмотрим теперь, какие ограничения будут накладываться на форму разложения /2.1/ и /2.11/, если $A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)$ и/или $B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)$ - сохраняющиеся тензоры. Оказывается, что в этом случае константы g^{ABC}, $g^{ABC}_{1,2,3}$, входящие в /2.11/, могут отличаться от нуля только при определенных соотношениях между масштабными размерностями ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C и рангами p, q и r.

В самом деле, если $A_{\mu_1\ldots\mu_p}$ сохраняется, $\partial^\mu A_{\mu\mu_2\ldots\mu_p}=0$, то результат дифференцирования /2.11/ показывает, что эти константы могут быть отличными от нуля только в следующих случаях:

$$\left.\begin{array}{lll} g^{ABC} & \text{при} & \ell_B=L_C,\ q=r=0\ \text{ или }\ p=1, \\ g^{ABC}_1 & \text{при} & \ell_B=L_C, \\ g^{ABC}_2 & \text{при} & L_C-\ell_B=\ell_A,\ q=0, \end{array}\right\}$$

$$g_3^{ABC} \quad \text{при} \quad \ell_B - L_C = \ell_A\,,\ r = 0\,. \qquad /3.1/$$

При этом везде $\ell_A = -(p+2)$.

Если $B_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ сохраняется, $\partial^{\nu} B_{\nu\nu_2\ldots\nu_q} = 0$, то эти константы могут быть отличными от нуля только в следующих случаях:

$$\left.\begin{aligned} &g^{ABC} \quad \text{при} \quad \ell_A = L_C\,,\ r = p = 0 \ \text{или} \ q = 1\,,\\ &g_1^{ABC} \quad \text{при} \quad L_C - \ell_A = \ell_B\,,\ p = 0\,,\\ &g_2^{ABC} \quad \text{при} \quad \ell_A = L_C\,,\\ &g_3^{ABC} \quad \text{при} \quad \ell_A - L_C = \ell_B\,,\ r = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad /3.2/$$

При этом везде $\ell_B = -(q+2)$.

Если оба тензора $A_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ и $B_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ сохраняются, то из /3.1/ и /3.2/ следует, что:

$$\left.\begin{aligned} &g^{ABC} \ \text{может отличаться от нуля только при}\\ &\qquad \ell_A = \ell_B = L_C = -3 \quad /\text{т.е. } \ell_C = -1/,\ p = q = 1,\\ &g_1^{ABC} = g_2^{ABC} = 0\,,\\ &g_3^{ABC} \ \text{может быть отличным от нуля только при}\\ &\quad \ell_A = \ell_B = -(p+2),\ L_C = 0 \quad /\text{т.е. } \ell_C = -4/,\ r = 0\,. \end{aligned}\right\} /3.3/$$

Формулы /3.1/ - /3.3/ представляют собой правила отбора для конформно-ковариантного разложения произведения сохраняющихся неприводимых тензорных операторов.

4. КОВАРИАНТНЫЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ И ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Полученные выше результаты можно непосредственно перенести на рассмотрение конформно-ковариантных двухточечных и трехточечных корреляционных функций. Рассмотрим сначала двухточечную функцию

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(x,y) \equiv \langle 0 |\, A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)\, B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)\, | 0 \rangle\,. \qquad /4.1/$$

Она удовлетворяет уравнениям

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(Rx, Ry) = (x^2)^{-\ell_A}(y^2)^{-\ell_B} \times \qquad /4.2/$$

$$\times M(x)_{\mu_1}^{\mu'_1} \ldots M(x)_{\mu_p}^{\mu'_p} M(y)_{\nu_1}^{\nu'_1} \ldots M(y)_{\nu_q}^{\nu'_q}\, G^{AB}_{\mu'_1\ldots\mu'_p\nu'_1\ldots\nu'_q}(x,y)\,,$$

$$/4.3/$$

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\ell_A+\ell_B}\, G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(x,y),$$

и поэтому имеет вид

$$G^{AB}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(x,y) = \delta_{pq}\delta_{\ell_A\ell_B}\cdot G^{AB}\cdot[(x-y)^2]^{\ell_A} \times \qquad /4.4/$$

$$\times \sum_i (-1)^i\, i!\, \frac{(p-i)!}{p!} \underset{(\mu)}{S}\ \underset{(\nu)}{S}\ g_{\mu_1\mu_2} \ldots g_{\mu_{2i-1}\mu_{2i}} \times$$

$$\times g_{\nu_1\nu_2} \ldots g_{\nu_{2i-1}\nu_{2i}}\, M(x-y)_{\mu_{2i+1}\nu_{2i+1}} \ldots M(x-y)_{\mu_p\nu_p}\,.$$

Если $A_{\mu_1\ldots\mu_p}$ или $B_{\nu_1\ldots\nu_q}$ является сохраняющимся, то G^{AB} может быть отлична от нуля только при $\ell_A = -(p+2)$.

Рассмотрим теперь трехточечную функцию

$$G^{ABC}_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q\rho_1\ldots\rho_r}(x,y,z) \equiv \langle 0|\, A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)\times$$

$$\times B_{\nu_1\ldots\nu_q}(y)\, C_{\rho_1\ldots\rho_r}(z)\,|0\rangle . \qquad /4.5/$$

Она удовлетворяет тем же уравнениям /2.2/ и /2.3/ с заменой $L_C \to \ell_C$ и поэтому имеет такой же вид /2.11/ /с заменой $L_C \to \ell_C$ /. В простейшем случае, когда A, B и C представляют собой скалярные операторы, имеем:

$$\langle 0|\, A(x)B(y)C(z)\,|0\rangle = g^{ABC}\left[(x-y)^2\right]^{1/2(\ell_A+\ell_B-\ell_C)}\times$$

$$\times\left[(y-z)^2\right]^{1/2(\ell_B+\ell_C-\ell_A)}\left[(z-x)^2\right]^{1/2(\ell_C+\ell_A-\ell_B)}.$$

Правила отбора в случае, когда $A_{\mu_1\ldots\mu_p}$ и $B_{\nu_1\ldots\nu_q}$ - сохраняющиеся операторы, будут такие же, как и /3.1/ - /3.3/ /с заменой $L_C \to \ell_C$ /, а в случае, когда $C_{\rho_1\ldots\rho_r}$ - сохраняющийся, таковы /будем использовать старые обозначения для возникающих здесь постоянных множителей/:

$$\left.\begin{array}{ll} g^{ABC} & \text{может быть отличным от нуля только} \\ & \text{при } \ell_A=\ell_B, \quad p=q=0 \text{ или } r=1, \\ g_1^{ABC} & \text{при } \ell_B-\ell_A=\ell_C, \quad p=0, \\ g_2^{ABC} & \text{при } \ell_A-\ell_B=\ell_C, \quad q=0, \\ g_3^{ABC} & \text{при } \ell_A=\ell_B. \end{array}\right\} \qquad /4.7/$$

При этом везде: $\ell_C = -(r+2)$.

Если же все три оператора $A_{\mu_1\ldots\mu_p}$, $B_{\nu_1\ldots\nu_q}$ и $C_{\rho_1\ldots\rho_r}$, сохраняются, то из /3.1/, /3.2/ (с заменой $L_C \to \ell_C$) и /4.7/ следует, что:

$$\left.\begin{array}{l} g^{ABC} \text{ может быть отличным от нуля только при} \\ \qquad \ell_A=\ell_B=\ell_C=-3, \qquad p=q=r=1, \\ \qquad g_1^{ABC}=g_2^{ABC}=g_3^{ABC}=0, \end{array}\right\} \qquad /4.8/$$

и мы тогда имеем:

$$\langle 0|\, A_\mu(x)B_\nu(y)C_\rho(z)\,|0\rangle =$$

$$= g^{ABC}\left[(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[R(x-y)-R(x-z)\right]_\mu\left[R(y-z)-R(y-x)\right]_\nu\left[R(z-x)-R(z-y)\right]_\rho . \qquad /4.9/$$

Таким образом, для скалярных и сохраняющихся неприводимых тензорных операторов только трехточечные функции типа /4.6/ и /4.9/ и следующих типов могут иметь неисчезающее значение:

$$\langle 0|\, A_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)B(y)C(z)\,|0\rangle =$$

$$= g^{ABC}\sum_i \frac{(-1)^i}{2^i}\,\frac{(p-i)!}{p!}\left[(x-y)^2\right]^{-(1+i)}\left[(y-z)^2\right]^{\ell_B+1+i}\times$$

$$\times\left[(z-x)^2\right]^{-(1+i)}\underset{(\mu)}{S}\; g_{\mu_1\mu_2}\ldots g_{\mu_{2i-1}\mu_{2i}}\times$$

$$\times\left[R(x-y)-R(x-z)\right]_{\mu_{2i+1}}\ldots\left[R(x-y)-R(x-z)\right]_{\mu_p} \qquad /4.10/$$

при

$$\ell_A=-(p+2), \qquad \ell_B=\ell_C, \qquad /4.11/$$

$$<0|\, A_\mu(x) B_\nu(y)\, C(z)\,|\,0> \;= g^{ABC} [(x-y)^2]^{-1/2} [(y-z)^2]^{-3/2} [(z-x)^2]^{-3/2} \times$$

$$\times\, [R(x-y) - R(x-z)]_\mu \, [R(y-z) - R(y-x)]_\nu \qquad /4.12/$$

при $\ell_A = \ell_B = \ell_C = -3$.

Отметим, что правило отбора /4.11/ было получено в /2/, а в частном случае, при $p = 1$, в /9/.

Наконец, рассмотрим трехточечную функцию, включающую спинорные операторы:

$$\{\, G^{ABC}_{\rho_1 .. \rho_r}(x,y,z) \}^{\beta}_{\alpha} \equiv <0|\, A_\alpha(x) B^{-\beta}(y) C_{\rho_1 ... \rho_r}(z) |\, 0> . \qquad /4.13/$$

Она удовлетворяет тому же уравнению /2.15/ с заменой $L_C \to \ell_C$ и поэтому имеет такой же вид /2.19/ /с указанной заменой/. Если $C_{\rho_1 ... \rho_r}$ сохраняется, то правило отбора для $G^{ABC}_{\rho_1 ... \rho_r}$ будет таково /будем использовать старые обозначения для возникающих здесь постоянных множителей/:

$$\left. \begin{array}{l} g_{ABC} \text{ может быть отличным от нуля только} \\ \qquad\qquad \text{при } \ell_C = -(r+2), \\ \qquad\qquad\qquad \ell_A = \ell_B . \end{array} \right\} \qquad /4.14/$$

g'_{ABC}, g''_{ABC} – при $\ell_C = -3$, $\ell_A = \ell_B$, $r = 1$.

В частности, имеем:

$$<0|\, \psi(x) \bar\psi(y) J_\mu(z)\,|\, 0> = [(x-y)^2]^{1/2(2\ell_\psi + 3)} [(y-z)^2]^{-1} [(z-x)^2]^{-1} \times \qquad /4.15/$$

$$\times \{\, [R(z-x) - R(z-y)]_\mu \Big[g \frac{\hat x - \hat y}{(x-y)^2} + g' \frac{(\hat x - \hat z)(\hat y - \hat z)}{((x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2)^{1/2}} \Big] +$$

$$+ g'' \frac{\hat x - \hat z}{(x-z)^2} \gamma_\mu \frac{\hat y - \hat z}{(y-z)^2} \}$$

для сохраняющегося тока J_μ /при $\ell_J = -3$/,

$$<0|\, \psi(x) \bar\psi(y) \phi(z) |\, 0> = [(x-y)^2]^{1/2(2\ell_\psi - \ell_\phi + 1)} [(y-z)^2]^{1/2 \ell_\phi} [(z-x)^2]^{1/2 \ell_\phi} \times$$

$$\times \{\, g \frac{\hat x - \hat y}{(x-y)^2} + g' \frac{(\hat x - \hat z)(\hat y - \hat z)}{((x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2)^{1/2}} \} \qquad /4.16/$$

для скалярного оператора ϕ и соответствующее выражение, умноженное на γ_5, для псевдоскалярного оператора.

В заключение я выражаю глубокую благодарность проф. Д.И. Блохинцеву за интерес к работе.

Литература

1. K. Wilson. Phys. Rev., 179, 1499 (1969).
2. S. Ferrara, R. Gatto, A.F. Grillo. Ann. Phys., 76, 161 (1973); Frascati preprint, 1971.
3. L. Bonora, G. Sartori, M. Tonin. Nuovo Cimento., 10A, 667 (1972).
4. H.A. Kastrup. Phys. Rev., 142, 1060 (1966).
5. E.J. Schreier. Phys. Rev., D3, 980 (1971).
6. S. Ferrara, A.G. Grillo, G. Parisi . Lett. Nuovo Cim., 4, 115 (1972).
7. I.T. Todorov. Preprint JINR, E2-6642, Dubna, 1972.
8. Дао Вонг Дык. Препринт ОИЯИ, Р2-7091, Дубна, 1973.
9. A.A. Migdal. Phys. Lett., B37, 98 (1971).
10. А.М. Поляков. Письма в ЖЭТФ, 12, 538 /1970/.

Рукопись поступила в издательский отдел 29 августа 1973 года.