СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 7424

Д.И. Блохинцев

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7424

Д.И. Блохинцев

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ I. Исходные уравнения и определения

Матричный элемент оператора матрицы плотности ρ в координатном представлении определяем формулой:

$$\langle x, \sigma | \hat{\rho} | x' \sigma' \rangle = \sum_n \mathcal{P}_n \psi^*_{n\sigma}(x) \psi_{n\sigma'}(x'), \quad (1)$$

где x – координаты частиц, σ – спиновые индексы, n – индекс состояния, числа $\mathcal{P}_n \geq 0$, $\sum_n \mathcal{P}_n = 1$. Все формулы во избежание громоздкости выписываются явно для одного измерения и для одной частицы. Оператор ρ, как известно, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\hat{\rho}, \hat{\mathcal{H}}] = 0, \quad (2)$$

где $[A,B] = \frac{1}{i}(AB - BA)$ и $\hat{\mathcal{H}}$ – есть оператор Гамильтона, имеющий матричные элементы:

$$\langle x, \sigma | \hat{\mathcal{H}} | x' \sigma' \rangle = \alpha_{\sigma\sigma'} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') + \beta_{\sigma\sigma'} m + \langle x, \sigma | \hat{W} | x' \sigma' \rangle, \quad (3)$$

где α, β – матрицы Дирака, m – масса частицы, $\hat{W}$ – оператор взаимодействия.

Преобразуем теперь операторы $\hat{\rho}$ и $\mathcal{H}$ из координатного пространства в пространство фазовое $\mathcal{R}(x,p)$, способом, приведенным в работе /1/. Именно, для любого оператора $\hat{\mathcal{L}}$ вместо матричных элементов $\langle x, \sigma | \hat{\mathcal{L}} | x' \sigma' \rangle$ введём их изображение в фазовом пространстве $L_{\sigma\sigma'}(x,p)$, определённое формулой:

$$\langle x,\sigma | \hat{\mathcal{L}} | x', \sigma' \rangle = \int L_{\sigma\sigma'}(x,p) \exp\left\{ i \frac{p(x-x')}{\hbar} \right\} \frac{dp}{2\pi\hbar} . \qquad (4)$$

Существование обратного преобразования от $L(x,p)$ к $\langle x | \mathcal{L} | x' \rangle$ - очевидно. В соответствии с преобразованием (4) оператор ρ в фазовом пространстве $\mathcal{R}(x,p)$ будет изображаться величиной $R_{\sigma\sigma'}(x,p)$, при этом функция

$$F(x,p) = Sp\, R(x,p)$$

(здесь след взят по спиновым переменным) играет роль "плотности" в фазовом пространстве. Подстановка в уравнение (2) операторов $\hat{\mathcal{H}}$ и $\hat{\rho}$, выраженных, согласно (4), через $H(x,p)$ и $R(x,p)$, приводит к уравнению:

$$\frac{\partial R(x,p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\alpha} R(x,p) \right) + i p \left[\tilde{\alpha}, R(x,p) \right] + $$

$$+ \frac{1}{i} \int e^{i\frac{\xi\eta}{\hbar}} \frac{d\xi d\eta}{2\pi\hbar} \Big\{ \tilde{W}(x,p+\eta) R(x+\xi,p) -$$

$$- R(x,p+\eta) \tilde{W}(x+\xi,p) \Big\} = 0. \qquad (6)$$

При этом величины со знаком тильды означают транспонированные величины. Спиновые знаки в (6) не выписаны явно. Последний член в (6) имеет смысл квантовой скобки Пуассона и может быть представлен в виде разложения по степеням $\hbar$, а именно:

$$[\tilde{W}, R] = \frac{1}{2\pi i} \int e^{i \frac{\xi \eta}{\hbar}} \frac{d\xi d\eta}{\hbar} \{\tilde{W}(x, p+\eta) \times$$

$$\times R(x+\xi, p) - R(x, p+\eta) \tilde{W}(x+\xi, p)\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^{n-1}}{n!} [\tilde{W}, R]_n , \tag{7}$$

где:

$$[A(x,p), B(x,p)]_n = \frac{\partial^n A(x,p)}{\partial p^n} \frac{\partial^n B(x,p)}{\partial x^n} -$$

$$- \frac{\partial^n A(x,p)}{\partial x^n} \frac{\partial B(x,p)}{\partial p^n} \tag{8}$$

есть классическая скобка Пуассона, n -го порядка (ср. /I/).

Нетрудно показать, что пространственная плотность $\rho(x)$, равная

$$\rho(x) = \int Sp\, R(x, p) \frac{dp}{2\pi\hbar}, \tag{9}$$

вследствие уравнения (6) удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \vec{J} = 0, \tag{10}$$

где

$$\vec{J} = \int Sp(\vec{\alpha} R(x,p)) \frac{dp}{2\pi\hbar} . \tag{11}$$

§ 2. Малые колебания

Предположим, что плотность $R(x,p)$ и энергию взаимодействия $W(x,p)$ можно представить в виде:

$$R(x,p) = R_0(x,p) + f(x,p), \tag{12}$$

$$\tilde{W}(x,p) = \tilde{W}_0(x,p) + \tilde{\phi}(x,p), \tag{13}$$

причём величины f и $\tilde{\phi}$ предполагаются малыми, а R_0 и $\tilde{W}_0$ – известными. Тогда получим из (6):

$$\frac{\partial R_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\alpha} R_0) + ip[\tilde{\alpha} R_0] + [\tilde{W}_0 R_0] = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\alpha} f) + ip[\tilde{\alpha}, f] + [\phi, R_0] + [\tilde{W}_0, f] = 0. \tag{15}$$

Вид $\tilde{W}$ и $\tilde{\phi}$ зависит от характера конкретной задачи. В частности, в случае электромагнитного взаимодействия

$$\hat{W}(x) = e\vec{\alpha}\vec{A}(x) - eA_0(x), \tag{16}$$

где e – заряд частицы, $\vec{A}$, A_0 – вектор-потенциал, определяемый из уравнений:

$$\Box^2 \vec{A} = -4\pi e \vec{J}(x), \tag{17}$$

$$\Box^2 A_0 = -4\pi e \rho(x) \tag{18}$$

и плотности $\vec{J}(x)$, $\rho(x)$ определены уравнениями (9) и (11).

Особенно простой случай возникает, когда $\tilde{W}_0 = 0$ и $\tilde{\Phi}(x,p)$ не зависит от p. Тогда плотность $R_0(x,p)$ есть функция лишь p, и уравнение (15) принимает вид:

$$\frac{\partial f(x,p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{I} f(x,p)\right) + ip\left[\mathcal{I}, f(x,p)\right] +$$

$$+\int e^{i\frac{\xi \zeta}{\hbar}} \frac{d\xi\, d\zeta}{2\pi i}\left\{\tilde{\Phi}(x) R_0(p) - R_0(p-\zeta)\tilde{\Phi}(x+\xi)\right\} = 0 \tag{19}$$

§ 3. Продольные колебания в плазме

В качестве иллюстрации релятивистского уравнения (19) рассмотрим продольные колебания в плазме. В этом, специальном случае магнитное поле $\vec{H} = 0$. Поэтому вместо лоренцовской нормировки потенциалов, приводящей к уравнениям (I7) и (I8), удобнее положить:[x)]

$$\mathcal{A}_0 = a_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)},$$
$$\vec{\mathcal{A}} = 0 \ . \tag{20}$$

$$\tag{20$^{\text{I}}$}$$

Представляя обусловленный колебаниями плазмы ток $\vec{j}(x,t)$ и плотность $\rho(x,t)$ в форме:

$$\vec{j}(x,t) = \vec{j}_0 \exp i(\vec{k}\vec{x}-\omega t), \ \rho(x,t) = \rho_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}, \tag{2I}$$

получим:

$$a_0 = \frac{4\pi}{k^2}\rho_0 \quad , \ \vec{j}_0 = \frac{1}{4\pi}\vec{k}\omega a_0 = \frac{\vec{k}\,\omega}{k^2}\rho_0 \ . \tag{22}$$

В соответствии с (20), положим

$$f(x,p) = f(p) \exp i(\vec{k}\vec{x}-\omega t) \ , \tag{23}$$

$$\tilde{\varphi}(x,t) = e\mathcal{A}_0(x,t) = e a_0 \exp i(\vec{k}\vec{x}-\omega t) \tag{24}$$

---

x) Сравним с подобным расчетом в /2/.

и, подставляя эти величины в уравнения (I9), найдём:

$$-i\omega f(p) + ik\, Sp\{\tilde{\alpha} f(p)\} - ie\alpha_0\, Sp\{R_0(p) - R_0(p+k)\} = 0. \qquad (25)$$

С другой стороны,

$$\rho(x,t) = e\int Sp\, f(x,p)\frac{dp}{2\pi\hbar}, \qquad (26)$$

так, что амплитуда ρ_0 в (2I), равна

$$\rho_0 = e\int Sp\, f(p)\frac{dp}{2p} \qquad (28)$$

и

$$\alpha_0 = \frac{4\pi e}{k^2}\int Sp\, f(p)\frac{dp}{2\pi}. \qquad (28')$$

Поэтому из (25) и (28) получаем:

$$\omega f(p) - \vec{k}\, Sp\,(\tilde{\alpha} f(p)) + \frac{4\pi e^2}{k^2}\int Sp\, f(p)\frac{dp}{2\pi\hbar} \times$$

$$\times \{R_0(p) - R_0(p+k)\} = 0. \qquad (29)$$

Обозначая через

$$N = \int R_0(p)\frac{dp}{2\pi\hbar} \qquad (30)$$

полное число частиц в единице объёма и через

$$\mathcal{M} = \int S_p\, f(p) \frac{dp}{2\pi}, \tag{31}$$

получим из (29) уравнение

$$1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{[R_0(p) - R_0(p+k)]}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \frac{dp}{2\pi} = 0, \tag{32}$$

где введено обозначение:

$$\vec{v} = \frac{1}{M} \int S_p\{\vec{\mathcal{L}} f(p)\} \frac{dp}{2\pi} . \tag{33}$$

Уравнение (32) есть дисперсионное уравнение Власова[3], в котором учтены релятивистские эффекты, в том числе спин частиц.

При малых длинах волн $(|\vec{k}| \to 0)$, предполагая, что $R_0(\vec{p}) \equiv R_0(p)$, $p = |\vec{p}|$, получим из (32):

$$1 + \frac{4\pi e^2}{3\omega^2} \int \frac{dR_0}{dp} \frac{p}{E} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 0. \tag{34}$$

Из этого уравнения определяется низшее значение частоты продольных колебаний ω_0. Интегрированием по частям находим:

$$\omega_0^2 = + \frac{4\pi e^2}{(2\pi\hbar)^3} \left[\int R_0(p) \frac{1}{E} d^3 p - \frac{1}{3} \int R_0(p) \frac{p^2}{E^3} d^3 p \right]. \tag{35}$$

В нерелятивистском случае $(p \ll m)$ второй интеграл мал, а в первом $E \simeq m$. Учитывая (30), получим формулу Лангмюра:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2}{m} N. \qquad (36)$$

В релятивистском случае, при $p \gg m$, получаем из (35)

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \frac{2}{3} \overline{\left(\frac{m}{p}\right)}, \qquad (37)$$

где $\overline{\left(\frac{m}{p}\right)}$ означает среднее по распределению $R_0(p)$ от величины $\frac{m}{p} \ll 1$.

В вырождённом ферми-газе $S_p R_0(p) = F(p) = 2$, $N = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{p_{max}}{\hbar}\right)$, где p_{max} есть максимальный импульс в ферми-распределении и $\overline{\left(\frac{m}{p}\right)} = \frac{3}{2}\frac{m}{p_{max}}$. Поэтому в релятивистском вырождённом газе

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{p_{max}} = \frac{4}{3\pi} \alpha \frac{p_{max}^2 c^2}{\hbar^2}, \qquad (38)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$.

В заключение два замечания. Известно, что существует загадочный квант Намбу /3/, с энергией $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha^{-1} m_e c^2$; массы элементарных частиц оказываются кратными величине ε/c^2 [4] . Такой квант мог бы рассматриваться как квант энергии колебаний вырождённой релятивистской плазмы при $p_{max} \sim \alpha^{-3/2} m_e c$. Можно было бы думать, что он имеет какие-либо отношения к колебаниям в "дираковском море" уровней с отрицательной энергией. Однако из приведённых выше формул следует, что в этом случае $\omega_0^2 < 0$, так что подобные колебания должны затухать в течение времени $\sim \frac{\hbar \mathcal{N}}{P_{max} c}$.

Автор признателен А.А. Тяпкину, из обсуждения с которым загадки Намбу возникла эта заметка.

Литература:

1. D.I.Blokhintsev. Journ.of Physics (USSR), vol.2, p.71 (1940).
2. А.И.Ахиезер, И.А.Ахиезер, Р.В.Половин, А.Г.Ситенко, К.Н.Степанов. Коллективные колебания в плазме. Атомиздат, М., 1964.
3. Y.Nambu. Progr.Theor.Phys., 7, 595 (1952).
4. П.С.Исаев, С.Н.Мурзин. ЖЭТФ 31, стр.715,(1956).
   П.С.Исаев, Препринт ОИЯИ Д-824 (1961),
   П.С.Исаев, Препринт ОИЯИ Р2-6447 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 августа 1973 года.