ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7405

В.И. Огиевецкий

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ АЛГЕБРА ГРУППЫ ОБЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КООРДИНАТ КАК ЗАМЫКАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР КОНФОРМНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ ГРУПП

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7405

В.И. Огиевецкий

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ АЛГЕБРА ГРУППЫ ОБЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КООРДИНАТ КАК ЗАМЫКАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР КОНФОРМНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ ГРУПП

Направлено в ***Lett. Nuovo Cimento***

Теория тяготения Эйнштейна основана на группе общих преобразований координат (или общековариантной группе)

$$X_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{I}$$

где $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — произвольные функции координат x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$. Общековариантная группа является бесконечнопараметрической. Цель настоящей работы – привлечь внимание к простому и примечательному факту, состоящему в том, что действие общековариантной группы можно свести к повторным действиям двух её конечнопараметрических подгрупп, специальной линейной группы $SL(4, R)$ и конформной группы C_{15}. Линейная и конформная группы действуют в одном многообразии – многообразии координат, но не коммутируют между собой. Мы докажем, что замыканием алгебр линейной и конформной групп оказывается алгебра общековариантной группы (I), т.е. что любой генератор общековариантной группы представим в виде линейной комбинации повторных коммутаторов от генераторов групп $SL(4.R)$ и C_{15}. Тем самым трансформационные свойства (в частности, инвариантность) любой величины относительно бесконечномерной общековариантной группы определяются её трансформационными свойствами относительно существенно более простых конечномерных групп $SL(4.R)$ и C_{15}. Некоторые перспективы такого нового подхода к общековариантной группе мы кратко обсудим в заключительной части заметки.

Перейдём к доказательству основного утверждения. Разложим функции $f_i(x)$ (I) в бесконечные ряды по степеням координат. Коэффициенты этих рядов служат параметрами общековариантной группы, а её генераторы записываются в виде:

$$L_K^{n, n_1 n_2 n_3 n_4} = -i\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} x_4^{n_4} \partial_K \tag{2}$$

$$\left(n \equiv n_1 + n_2 + n_3 + n_4,\ \partial_K = \partial / \partial x_K \right).$$

Группа $SL(4.R)$ состоит из всех линейных преобразований $x_i' = a_{ik} x_k$ с единичным детерминантом, и её генераторами являются

$$SR_{ik} = -i\left[x_i \partial_k - \frac{1}{4}\delta_{ik}(x\partial)\right]. \tag{3}$$

Совокупность генераторов конформной группы C_{15}, как известно, состоит из генераторов 4-мерных вращений (входящих как подалгебра и в(3)), генераторов сдвига P_i, растяжений D и собственно конформных преобразований K_i:

$$P_i = -i\partial_i, \quad (a), \qquad D = -i(x\partial), \quad (б)$$

$$K_i = -i\left(x^2\partial_i - 2x_i(x\partial)\right), \quad (в) \tag{4}$$

Рассмотрим замыкание алгебр линейной и конформной групп, т.е. такую наименьшую алгебру, которая содержала бы все коммутаторы генераторов (3) и (4) и их линейные комбинации. Мы докажем, что замыкающая алгебра совпадает с алгеброй общековариантной группы (2), т.е., что справедлива следующая теорема

<u>Любой генератор общековариантной группы $L_k^{n\, n_1 n_2 n_3 n_4}$ представим в виде линейной комбинации повторных генераторов специальной линейной и конформной групп</u>.

Доказательство проводится методом математической индукции. Генераторы сдвигов (4а) дают все генераторы $L_k^{n\dots}$ с $n=0$. Генераторы $SL(4.R)$ совместно с растяжениями (4б) образуют алгебру $L(4.R)$ с генераторами

$$R_{ik} = -ix_i\partial_k \tag{5}$$

и дают все $L_k^{n\dots}$ с $n=1$.

Генераторы собственно конформных преобразований K_i (4в) квадратичны по x. Покажем, что все генераторы $L_k^{n\dots}$ с $n=2$ содержатся в замыкающей алгебре. Рассмотрим коммутатор растяжения вдоль m-й оси R_{mm} с K_p, $m \neq p$

$$[R_{mm}, K_p] = -2x_m^2\partial_p. \tag{6}$$

Итак, мы располагаем генератором $-ix_m^2\partial_p\, (m\neq p)$. Далее,

$$[R_{pm}, -ix_m^2\partial_p] = -2x_m x_p\partial_p + x_m^2\partial_m. \tag{6$^{\mathrm{I}}$}$$

Сравнивая (6) и (6$^{\mathrm{I}}$) с самим генератором K_m, мы заключаем, что замыкающая алгебра включает генераторы $-ix_m x_p\partial_p\, (m\neq p)$ и $-ix_m^2\partial_m$. Наконец, генератор $-ix_m x_n\partial_p\, (m\neq n\neq p)$ возникает в коммутаторе.

$$[R_{mp}, -ix_n x_p\partial_p] = -x_m x_n\partial_p \tag{6$^{\mathrm{II}}$}$$

Итак, все генераторы $L_k^{n\dots}$ с $n=2$ исчерпаны. Коммутируя квадратичные по x генераторы между собой, приходим к генераторам третьей степени по x:

$$[-ix_m^2\partial_n, -ix_n^2\partial_n] = -2x_m^2 x_n\partial_n, \quad (a)$$

$$[-ix_m x_n\partial_n, -ix_n^2\partial_n] = -x_m x_n^2\partial_n, \quad (б) \tag{7}$$

у нас возникли генераторы $-ix_m^2 x_n\partial_n$ и $-ix_m x_n^2\partial_n$. Коммутатор последнего из них с R_{nm} (5) есть

$$[R_{nm}, -ix_m x_n^2\partial_n] = -x_n^3\partial_n + x_n^2 x_m\partial_m \tag{8a}$$

и, с учетом (7) мы получили важный в дальнейшем генератор

$$-ix_n^3\partial_n. \tag{8б}$$

Другие генераторы третьей степени по x нам не потребуются для доказательства по индукции. Мы показали выше, что теорема верна для $n=0,2,3$. Предположим, что теорема справедлива для некоторого n, т.е. генераторы $\mathcal{L}_k^{n, n_1 n_2 n_3 n_4}$ представимы в виде линейных комбинаций повторных коммутаторов генераторов линейной и конформной групп. Докажем, что тогда теорема будет иметь место и для $n+1$.

Все индексы дифференцирования k в $\mathcal{L}_k^{n,\dots}$ равноправны, и достаточно рассмотреть $k=1$. Тогда, если $n_1 \neq 0$ и $n_1 \neq 3$,

$$\mathcal{L}_1^{n+1, n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{i}{n_1-3}\left[-i x_1^2 \partial_1, \mathcal{L}_1^{n, n_1-1, n_2, n_3, n_4}\right]. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь случаи $n_1 = 0$ и $n_1 = 3$. В этих случаях, если хотя бы один из показателей n_2, n_3, n_4 больше нуля, например, $n_2 > 0$, то

$$\mathcal{L}_1^{n+1, n_1 n_2 n_3 n_4} = \frac{i}{n_1-1}\left[-i x_1 x_2 \partial_1, \mathcal{L}_1^{n, n_1, n_2-1, n_3, n_4}\right]. \tag{10}$$

Наконец, для $n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = n_4 = 0$ соответствующий генератор даётся формулой (8). Итак, теорема доказана.

Можно убедиться, что она верна для пространств любой размерности $r \geq 2$, каждый раз генераторы общих преобразований координат представимы в виде линейных комбинаций повторных коммутаторов генераторов соответствующих специальной линейной и конформной групп.

В последующей статье мы покажем, что уравнения Эйнштейна теории тяготения следуют из требования инвариантности относительно конформной и линейной групп, что естественно в рамках развиваемого подхода. В глубокой аналогии с тем, что π-мезоны связаны с нелинейными реализациями динамической киральной $SU(2)\times SU(2)$-симметрии (см., например/I/), гравитационное поле оказывается связанным с совместными нелинейными реализациями динамических конформной и аффинной симметрий[x)].

---

x) Нелинейные реализации пространственно-временных симметрий обсуждались в/2,3,4/.

Отметим также, что настоящий подход вселяет надежду на построение унитарных представлений бесконечномерной алгебры общих преобразований координат.

Автор сердечно благодарен Ф.А. Березину, А.Б. Борисову, Д.В. Волкову и В. Тыбору за полезные обсуждения.

Литература:

I. S.Weinberg, in Proc. 1970 Brandeis Summer Institute in Theor.Physics, p.287, ed.S.Deser, Cambridge, 1970.
2. Д.В. Волков. ЭЧАЯ, 4, 3, I973.
3. C.J.Isham, A.Salam, J.Strathdee, Ann.Phys.(N.Y.) 62, 98, 1971.
4. В.И. Огиевецкий. Труды X зимней школы теоретической физики в Карпаче, Польша, I973 год.

Рукопись поступила в издательский отдел
IO августа I973 года.