СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 7347

Д.Ю.Бардин, Г.В.Мицельмахер, Н.М.Шумейко

О РАСПАДАХ $K \to \mu \nu_\mu e^+ e^-$, $K \to e \nu_e \mu^+ \mu^-$, $K \to \mu \nu_\mu \mu^+ \mu^-$, $K \to e \nu_e e^+ e^-$

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

P2 - 7347

Д.Ю.Бардин, Г.В.Мицельмахер, Н.М.Шумейко

О РАСПАДАХ $K \to \mu \nu_\mu e^+ e^-$, $K \to e \nu_e \mu^+ \mu^-$, $K \to \mu \nu_\mu \mu^+ \mu^-$, $K \to e \nu_e e^+ e^-$

I. Введение

В настоящей работе рассматриваются процессы

$$K \to \ell_1 \nu_{\ell_1} \ell_2^+ \ell_2^- \qquad (I)$$

$(K \to \mu\nu_\mu e^+e^-, K \to e\nu_e \mu^+\mu^-; K \to \mu\nu_\mu\mu^+\mu^-, K \to e\nu_e e^+e^-)$. Эти редкие распады еще не наблюдались на опыте. Однако, поскольку их относительная вероятность составляет $10^{-5} \div 10^{-8}$, то они, несомненно, будут доступны экспериментальному изучению уже в недалеком будущем.

Исследование процессов со слабым и электромагнитным взаимодействиями представляет значительный интерес. В работе /I/ рассматривались распады $\pi \to e(\mu)\, e^+e^-$ с целью изучения вопроса о том, какую информацию можно получить о структуре матричного элемента процесса такого типа. Здесь мы исследуем с той же целью аналогичные распады каонов, экспериментальное изучение которых позволит получить информацию о структуре соответствующего матричного элемента в процессах с изменением странности.

Матричный элемент процессов (I) по общей структуре, определяемой требованиями градиентной и лоренц-инвариантностей, очевидно, не отличается от соответствующих выражений для π -распадов (формулы (2), (7) и (I8) работы /I/) и представляет сумму двух членов, описывающих внутреннее тормозное (IB) и структурное (SD) излучения. Однако из-за отсутствия сохранения векторного тока с $\Delta S \neq 0$ соответствующий вклад не может быть связан с характеристиками других распадов (в отличие от процессов с пионами). Кроме того, так как импульсы лептонных пар k (пары $\ell_2^+\ell_2^-$) и Q (пары $\ell_1 \nu_{\ell_1}$) велики ($\sim m_K$), то использованное в /I/ предположение о слабой зависимости формфакторов (ф.ф.) структурного матричного элемента от k^2 и Q^2 в данном случае неприменимо.

В работе [2] исследовалась зависимость ф.ф. от Q^2 для распадов $K\to\ell\nu_\ell\gamma$. Учитывались два первых члена в разложении ф.ф. в ряд по Q^2. Такое описание требует введения четырех параметров – двух значений ф.ф. при $Q^2=0$ и двух коэффициентов перед Q^2. Если для последних принять значения, следующие из предположения о K^*- и K_A -доминантности, то, как показано в [2], учет зависимости от Q^2 является необходимым.

Если применить такой же подход к распадам (I), то поскольку их матричный элемент описывается пятью ф.ф., зависящими от k^2 и Q^2, потребуется введение слишком большого числа параметров, которые крайне трудно определить из опыта. В связи с этим феноменологический анализ распадов (I), подобный анализу процессов $K\to\ell\nu_\ell\gamma$, выполненному в [2], не имеет смысла.

В работах, посвященных теоретическому исследованию амплитуды распадов $K\to\ell\nu_\ell\gamma$ [3] и $K\to\ell_1\nu_{\ell_1}\ell_2^+\ell_2^-$ [4], использовалось предположение о доминантности низколежащих резонансов K^*, K_A, ρ и ω. Для ф.ф. a, характеризующего вклад векторного тока, в таком случае справедлива формула

$$a(k^2,Q^2)=a_o\left[\left(1+\frac{k^2}{m_\rho^2}\right)\left(1+\frac{Q^2}{m_{K^*}^2}\right)\right]^{-1}, \qquad (2)$$

т.е. вся зависимость от k^2 и Q^2 факторизуется и определяется только массами резонансов. Величина $a_o=a(0,0)$ зависит от констант связи. Некоторые из этих констант очень трудно определить из опыта, поэтому для вычисления a_o используются различные теоретические представления [3], дающие значения, отличающиеся в пределах 20%. Т.о. в рамках доминантного подхода зависимость ф.ф. a от k^2 и Q^2 известна более точно, чем значение a_o. Поэтому разумно рассматривать формулу (2) как представление для a с единственным неизвестным параметром a_o.

В разделе 2 настоящей работы показано, что в модели, использующей технику жестких каонов [5,6], схожая ситуация имеет место и для четырех аксиальных ф.ф. b, c, d и h. В соответствии с этим мы предлагаем использовать для двух существенных ф.ф. b и c (вклады, содержащие ф.ф. h и d, оказываются пренебрежимо малыми) параметризацию, подобную (2) с заменой m_{K^*} на m_{K_A} – массу резонанса K_A (I240). Тогда рассматриваемые процессы можно описать тремя параметрами a_o, b_o и c_o, характеризующими значения ф.ф. a, b и c при $k^2=Q^2=0$. Ниже мы обсудим возможность их определения из опыта.

Экспериментальное исследование процессов с e^+e^- -парой затруднено из-за фона от $K_{\ell 3}$ -распада с последующим распадом $\pi^0\to\gamma e^+e^-$, в котором γ -квант не регистрируется.

Произведение вероятностей процессов $K\to\pi^0\ell\nu_\ell$ и $\pi^0\to\gamma e^+e^-$ составляет $(4 \div 5)\cdot 10^{-4}$ от полной вероятности K -распада W_K. Поскольку процессы $K\to\mu\nu_\mu e^+e^-$ и $K\to e\nu_e e^+e^-$ идут на уровне $3{,}0\cdot 10^{-5}W_K$ и $2{,}1\cdot 10^{-7}W_K$ соответственно, то имеется значительное превышение фона над эффектом. В работе [7] мы исследовали вопрос о возможности экспериментального подавления фона на основе анализа кинематики процессов.

Численные расчеты распадов (I) проводились на ЭВМ с помощью метода Монте-Карло способом, аналогичным изложенному в [1]. В процессах $K\to\mu\nu_\mu\mu^+\mu^-$ и $K\to e\nu_e e^+e^-$ учитывались эффекты тождественности частиц в конечном состоянии, что, как оказалось, является необходимым.

В работе [8] распад $K\to\mu\nu_\mu e^+e^-$ анализировался с точки зрения получения информации о возможном слабо-электромагнитном нарушении Т-инвариантности. В работе [4] вычислены интегральные вероятности и спектры по k^2 для процессов $K\to\mu\nu_\mu e^+e^-$ и $K\to e\nu_e\mu^+\mu^-$. Мы проводим сопоставление части наших результатов с результатами этих работ.

Расчеты распадов $K\to\mu\nu_\mu\mu^+\mu^-$ и $K\to e\nu_e e^+e^-$ в обычной теории слабых взаимодействий выполнены в настоящей работе впервые.

Рассматриваемые процессы обсуждались также в работах /9,10/ с точки зрения возможного вклада аномальных четырехлептонного и шестифермионного взаимодействий.

2. Матричный элемент

Матричный элемент распадов (I)

$$K^+(q)\to\ell_1^+(p_1)+\nu_{\ell_1}(p)+\ell_2^+(p_2)+\ell_2^-(p_3) \quad (3)$$

имеет вид /I/

$$\langle f|S|i\rangle = ie^2\frac{Gf_K}{\sqrt{2}}\left(\frac{m^2 m_\ell}{2q_0p_{10}p_{20}p_{30}}\right)^{1/2}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(2\pi)^7}\delta(p+p_1+p_2+p_3-q)\times \quad (4)$$

$$\times\left[\bar{u}(p)\hat{q}(1+\gamma_5)\frac{1}{-\hat{p}_1-\hat{k}-im_\ell}\hat{\epsilon}\,u(-p_1)+\epsilon_\alpha M_{\alpha\beta}\ell_\beta\right],$$

где m_ℓ – масса лептона ℓ_1, m – масса лептона ℓ_2, $k=p_2+p_3$, $Q=p+p_1=q-k$, $\epsilon_\alpha=\bar{u}(p_3)\gamma_\alpha u(p_2)$, $\ell_\beta=\bar{u}(p)\gamma_\beta(1+\gamma_5)u(-p_1)$; f_K – определяется вероятностью $K\to\mu\nu_\mu$ распада $W_{K\to\mu\nu_\mu}=\frac{G^2f_K^2}{8\pi}m_K m_\mu^2\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2$.

Второй член в квадратных скобках выражения (4) представляет собой сумму вкладов двух слабых токов, изменяющих странность, – векторного и аксиального. Запишем его в виде /I/

$$M_{\alpha\beta}=-\frac{(2Q_\alpha+k_\alpha)}{Q^2+m_K^2}Q_\beta+\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{m_K^2}\Big[d(k^2)\frac{2Q_\beta}{Q^2+m_K^2}\big(k^2Q_\alpha-(Qk)k_\alpha\big)-$$
$$-a(k^2,Q^2)\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}k_\rho Q_\sigma+b(k^2,Q^2)\big(Q_\alpha k_\beta-(Qk)\delta_{\alpha\beta}\big)+ \quad (5)$$
$$+c(k^2,Q^2)\big(k_\alpha k_\beta-k^2\delta_{\alpha\beta}\big)+\frac{1}{m_K^2}h(k^2,Q^2)\big(k^2Q_\alpha-(Qk)k_\alpha\big)Q_\beta\Big],$$

где $d(k^2)=\frac{m_K^2}{k^2}(1-F_K(k^2))$, а $F_K(k^2)$ – электромагнитный ф.ф. каона. При таком определении все ф.ф. безразмерны.

Поскольку мы предполагаем, что имеет место T-инвариантность, ф.ф. являются вещественными функциями k^2 и Q^2.

Первые два слагаемых в (5) вместе с первым членом в (4) описывают внутреннее тормозное излучение, а остальные слагаемые – – структурное излучение.

Мы вычислили дифференциальную вероятность процессов (3). Выражение для нее приведено в приложении.

Для того чтобы найти вероятности рассматриваемых распадов, помимо предположения о том, что зависимость ф.ф. от k^2 и Q^2 определяется формулами (2), необходимо оценить их значения при $k^2=Q^2=0$, что можно сделать лишь в рамках некоторой модели.

Аксиальные ф.ф. b, c, d и h могут быть вычислены с помощью техники жестких каонов, /5/ являющейся обобщением техники жестких пионов, развитой в /6/. Подобные расчеты выполнены в работе /4/. Однако, использовав для амплитуды представление (5), в отличие от громоздких формул работы /4/ мы получили компактные выражения для ф.ф. Кроме того, было обнаружено, что один из ф.ф. найден в /4/ неверно. Результаты вычислений имеют вид

$$b(k^2,Q^2)=\frac{1}{2}\sum_{V=\rho,\omega}\frac{m_K^2m_V^2g_{KA}^2(-\delta)}{F_K^2m_{KA}^2(k^2+m_V^2)(Q^2+m_{KA}^2)},$$

$$c(k^2,Q^2)=\frac{1}{2}\sum_{V=\rho,\omega}\frac{m_K^2}{(k^2+m_V^2)}\left\{\frac{m_V^2g_{KA}^2\Delta}{F_K^2m_{KA}^2(Q^2+m_{KA}^2)}+1\right\}, \quad (6)$$

$$d(k^2)=\frac{1}{2}c(k^2,0),$$

$$h(k^2,Q^2)=-\frac{1}{2}\sum_{V=\rho,\omega}\frac{m_K^4m_V^2g_{KA}^2\Delta}{F_K^2m_{KA}^4(k^2+m_V^2)(Q^2+m_{KA}^2)}.$$

Векторный ф.ф. a может быть получен на основе обычного предположения о K^* -доминантности /3/

$$a(k^2,Q^2)=\frac{m_K^2 m_\rho^2 |g_{K^*} G_{K^*K\gamma}|}{|F_K|(k^2+m_\rho^2)(Q^2+m_{K^*}^2)} . \qquad (7)$$

В формулах (6) и (7) $g_{K^*}, g_{K_A}, G_{K^*K\gamma}$ - константы распадов $K^*\to l\nu_l$, $K_A\to l\nu_l$ и $K^*\to K\gamma$ соответственно; $F_K = f_K/\sqrt{2}\sin\theta$, θ - угол Кабиббо, δ - параметр модели, имеющий физический смысл аномального магнитного момента K_A -мезона (далее δ полагалось равным $-\frac{1}{2}$ /6/), $\Delta = m_{K_A}^2/m_V^2 - 1 - \delta$, m_V, m_{K^*}, m_{K_A} - массы $\rho(\omega)$-, K^*- и K_A -мезонов.

При выводе формул (5) используется соотношение /5,6,II/ $g_{K_A}^2/m_{K_A}^2 + F_K^2 = g_{K^*}^2/m_{K^*}^2$ и гипотеза частичного сохранения аксиального тока (PCAC).

Для получения g_{K^*} используем правило сумм /I2/ $g_{K^*}^2/m_{K^*}^2 = g^2/m_\rho^2 = 2F_\pi^2$. Для $G_{K^*K\gamma}$ примем значение /3/ $G_{K^*K\gamma}=0,98\,Гэв^{-1}$, следующее из $SU(3)$-симметрии и измеренной вероятности распада $\omega^0\to\pi^0\gamma$. Отношение F_π/F_K возьмем из экспериментальных значений вероятностей распадов $\pi\to\mu\nu_\mu$ и $K\to\mu\nu_\mu$ для угла Кабиббо, равного $\theta=0,24$. При этом $\sqrt{2}F_\pi/F_K$ = I,27. Далее используем приближение $m_\omega\approx m_\rho$, точность которого оказывается лучшей 0,I%. Для масс резонансов примем значения m_ρ = 765 Мэв, m_{K^*} =892 Мэв и m_{K_A} = I240 Мэв. Тогда для ф.ф. при $k^2=0$ и $Q^2=0$ получим

$$a_0=0,35\,,\ b_0=0,048\,,\ c_0=0,62\,,\ d_0=0,31\,,\ h_0=-0,033. \qquad (8)$$

Отметим теперь, что в рассматриваемой модели в приближении $m_\rho\approx m_\omega$ для аксиальных ф.ф. справедливы следующие формулы

$$b(k^2,Q^2)=b_0\left[\left(1+\frac{k^2}{m_\rho^2}\right)\left(1+\frac{Q^2}{m_{K_A}^2}\right)\right]^{-1}, \qquad (9\ )$$

$$d(k^2)=d_0\left(1+\frac{k^2}{m_\rho}\right)^{-1}, \qquad (9')$$

$$h(k^2,Q^2)=h_0\left[\left(1+\frac{k^2}{m_\rho^2}\right)\left(1+\frac{Q^2}{m_{K_A}^2}\right)\right]^{-1}, \qquad (9'')$$

$$c(k^2,Q^2)=c_0\left[c_1\left(1+\frac{Q^2}{m_{K_A}^2}\right)^{-1}+1-c_1\right]\left(1+\frac{k^2}{m_\rho}\right)^{-1}, \qquad (I0)$$

где C_1 = 0,33.

При использовании представления (5) для амплитуды,выражение (9) для ф.ф. b является самым общим в любой модели, основанной на доминантности ближайших резонансов [I]. Вследствие этого,как и в случае ф.ф. a ,формулу (9) можно рассматривать как однопараметрическое представление для b .

Несколько иная ситуация имеет место для ф.ф. c , в котором зависимость от Q^2 не факторизуется. Вычисления показывают, однако, что отличие (I0) от представления

$$c(k^2,Q^2)=c_0\left[\left(1+\frac{k^2}{m_\rho^2}\right)\left(1+\frac{Q^2}{m_{K_A}^2}\right)\right]^{-1} \qquad (II)$$

сказывается весьма мало (см. пункт 8 следующего раздела), поэтому описание процессов с помощью трех параметров a_0 , b_0 и c_0 не противоречит рассмотренной модели.

В работах /I,I3/ было показано, что в предположении о независимости ф.ф. от k^2 и Q^2 из PCAC и алгебры токов следует, что $c=2d$. Полученные нами c и d удовлетворяют условию $c(k^2,0)=2d(k^2)$ (см. формулы (6) и (8)), откуда $c_0=2d_0$. Однако в данном случае последнее условие является следствием модели и не может быть получено только из PCAC и коммутационных соотношений алгебры токов, поскольку предположение о независимости ф.ф. от k^2 и Q^2 несправедливо. Техника жестких каонов предсказывает, во-первых, что $c_0=2d_0=\frac{1}{3}\langle r_K^2\rangle m_K^2$, а во-вторых, дает значение среднеквадратичного электромагнитного радиуса каона $\sqrt{\langle r_K^2\rangle}$, которое

[I] Это справедливо, если отсутствуют так называемые контактные члены, отвечающие испусканию $l\nu_l$ -пары и γ -кванта из одной точки. Мы предполагаем, что это условие выполняется.

может меняться в зависимости от параметров модели. При использованных нами параметрах $\sqrt{\langle r_K^2 \rangle} = 0{,}55\,F$. Измерение C_0 позволит проверить соотношение $C_0 = \frac{1}{3}\langle r_K^2 \rangle m_K^2$, если из других экспериментов известно, значение $\langle r_K^2 \rangle$.

Вычисление полных и интегральных вероятностей процессов проведено для двух случаев: с постоянными ф.ф. при $K^2=Q^2=0$ (значения (8)) и с ф.ф. -функциями K^2 и Q^2 (формулы (7-I0)).

В следующей части мы обсудим результаты вычисления полных вероятностей распадов (3) и сделаем некоторые общие замечания.

3. Общие замечания

Отношение R полной вероятности процессов (3) к полной вероятности распада K^+-мезона W_K представим в следующем виде

$$R = \frac{W(K\to l_1\nu_1 l_2^+ l_2^-)}{W_K} = IB + A^2 + A + B^2 + B + AB + C^2 + C + AC + BC + H^2 + H + AH + BH + CH + D^2 + D + AD + BD + CD + HD. \qquad (I2)$$

Здесь CH, например, - полный вклад (включая вклад обменных диаграмм для процессов $K\to\mu\nu_\mu\mu^+\mu^-$ и $K\to e\nu_e e^+e^-$) в R интерференции тех частей амплитуды, которые содержат ф.ф. C и h; A - вклад в R интерференции части амплитуды, содержащей ф.ф. a, с амплитудой тормозного излучения; IB - вклад в R квадрата амплитуды тормозного излучения и т.д. В приложении даны выражения для дифференциальных вероятностей dW_{IB}, dW_{A^2} и т.д., соответствующие каждому слагаемому в формуле (I2). В таблицах I и 2 приводятся численные значения вкладов в полную вероятность всех членов, входящих в формулу (I2).

Представление вероятности процессов (3) в виде (I2) весьма удобно, т.к. позволяет выделить вклады каждого из ф.ф. в отдельности.

Перед тем, как обсуждать характерные черты каждого процесса, сделаем общие замечания, касающиеся всех рассматриваемых распадов.

I. Во всех процессах, за исключением $K\to\mu\nu_\mu e^+e^-$, доминирует структурное излучение, которое характеризуется вероятностью $(10^{-8} \div 10^{-7})\,W_K$, что значительно превышает уровень структурного излучения в распаде $\pi\to e\nu e^+e^-$.

2. В процессах с тождественными частицами в конечном состоянии значителен вклад интерференции прямых и обменных диаграмм, достигающий, например, в членах C и C^2 половины вклада квадратов прямых диаграмм. Такая большая интерференция объясняется тем, что часть амплитуды, пропорциональная ф.ф. C, не содержит $1/k^2$, вследствие чего нет сильной корреляции частиц противоположного заряда l_2^+ и l_2^- и все частицы равномерно распределены в фазовом объеме.

3. Для численных расчетов мы применили метод Монте-Карло, во-первых, из-за необходимости учета тождественности и, во-вторых, для того, чтобы иметь возможность вычислять интегральную вероятность в произвольной части фазового объема. Все расчеты этим методом выполняются с некоторой статистической ошибкой. В таблицах ошибка приводится только для полной вероятности, которая вычислена с точностью не хуже I%. С такой же точностью рассчитано и большинство отдельных вкладов. Некоторые несущественные вклады были вычислены с худшей точностью. В таблицах перед такими вкладами поставлен знак $\sim$. Если в пределах статистической точности вклад равен 0, то вместо него приводится его верхняя граница (знак $<$), равная по порядку величины ошибке вычисления. Чтобы обеспечить точность, приведенную в таблицах, было разыграно $\sim$100 000 событий для каждого распада, что требует около часа времени на ЭВМ БЭСМ-6.

4. Пренебрежимо малы вклады, содержащие ф.ф. h и d. Это объясняется не столько малостью самих h и d, сколько наличием множителя m_ℓ^2 перед этими вкладами, из-за чего они особенно малы в процессах, где ℓ_1 – позитрон. Таким образом, распады (I) эффективно описываются тремя ф.ф. a, b и c.

5. Ф.ф. a и b при $k^2=0$ должны совпадать с соответствующими ф.ф. для распадов $K\to\ell\nu_\ell\gamma$. Естественно, величины a_0 и b_0 могут быть найдены из экспериментов по изучению этих процессов. В работах /3/, посвященных анализу амплитуды распадов $K\to\ell\nu_\ell\gamma$, для величины a_0 получались значения, близкие к использованному нами, в то время как для b_0 были найдены различные значения, лежащие в интервале $0 \leqslant |b_0| \leqslant 0{,}6|a_0|$.

В используемой нами модели $|b_0| = 0{,}14|a_0|$. Этим объясняется малость вкладов, содержащих b (см. таблицы I и 2). Кинематические же множители перед a и b имеют одинаковый порядок величины и схожую зависимость от k^2 (основное поведение $1/k^2$).

Числа в таблицах могут быть легко пересчитаны для любых других a_0', b_0' и c_0', отличных от a_0, b_0 и c_0 (например, вклад $A'^2 = \frac{a_0'^2}{a_0^2} A^2$ и т.д.).

6. В таблицах приведены результаты, полученные при постоянных ф.ф. (8) и при ф.ф.-функциях k^2 и Q^2 – (7-I0). Как видно, различие двух вычислений весьма значительно: в некоторых вкладах оно достигает 20% для процессов с e^+e^--парой и 35% – с $\mu^+\mu^-$-парой. Учет зависимости ф.ф. от k^2 и Q^2 является, таким образом, необходимым.

7. Знаки интерференционных членов A, AB и т.д., вообще говоря, неизвестны. В рассмотренной модели некоторые из них фиксированы конкретным видом ф.ф. (6). Неизвестен, однако, относительный знак векторного ф.ф. a, а следовательно, и всех интерференционных членов, которые его содержат.

8. Числа, приведенные в таблицах, получены с использованием ф.ф. (7-I0). Мы рассчитали также полные вероятности и в том случае, когда C дается формулой (II). Максимальное отличие, очевидно, имеет место в членах C^2 и, как показали вычисления, не превышает 3% [2]. Поэтому приведенные в таблицах числа пригодны и для обсуждавшегося выше трехпараметрического описания процессов.

На опыте желательно вести измерения в тех областях фазового объема, где возможны независимые определения отдельных ф.ф.. Ниже мы обсудим характерные черты каждого из четырех распадов и укажем такие кинематические области.

4. Процесс $K\to\mu\nu_\mu e^+e^-$

В таблице 3 приведены основные вклады (большие 10^{-10} при выбранных a_0, b_0 и c_0) в интегральную вероятность для процесса $K\to\mu\nu_\mu e^+e^-$. Чтобы выделить структурное излучение на фоне доминирующего в этом распаде вклада IB, необходимо отбирать события с большими значениями инвариантной массы e^+e^--пары $\sqrt{-k^2}$ /I/.

В таблице 3 приводится интегральная вероятность для двух обрезаний по $-k^2$ ($|k^2| \geqslant m_0^2$ и $|k^2| \geqslant 2m_0^2$, где m_0 – масса π^0-мезона). Как видно, вклад IB уменьшается при этом на три порядка и становится сравнимым со структурными вкладами C и C^2. Однако члены A^2 и B^2 также значительно уменьшаются при больших $|k^2|$, поэтому нельзя выделить область, где были бы велики вклады ф.ф. a и b.

[2] Отмеченная слабая зависимость от Q^2 касается только членов, содержащих ф.ф. C. Зависимостью от Q^2 нельзя пренебрегать в других ф.ф.

Основной вклад в области $|k^2| \geqslant m_o^2$ дают члены IB, A, C и C^2. При этом структурное излучение имеет относительную вероятность $2 \cdot 10^{-8}\, W_K$, что на два порядка больше, чем в области больших $|k^2|$ для процесса $\pi \to e \nu e^+ e^-$ (см. /1/).

Большая величина интерференционных членов A и C позволяет определить знаки ф.ф. a и c относительно F_K.

Таким образом в области $|k^2| \geqslant m_o^2$ распад представляет значительный интерес с точки зрения изучения ф.ф., характеризующих структурное излучение.

Значение обрезания, равное m_o^2, выбрано из двух соображений. Во-первых, при таком обрезании уже сильно подавлено тормозное излучение и еще велико структурное, во-вторых, область $|k^2| \geqslant m_o^2$ свободна от фона. Изучение этого распада в области, занятой фоном, хотя и возможно (как показано в /7/), но не представляет интереса из-за доминирования IB.

В заключение сравним наши вычисления с имеющимися в литературе результатами. В работе /4/ для процесса $K \to \mu \nu_\mu e^+ e^-$ приводится величина $R_1 = W_{IB}(k_o > 20\,\text{Мэв}) / W_K = 0{,}82 \cdot 10^{-6}$. Мы получили $R_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$. В работе /8/ получено $R_2 = W_{IB}(p_{2o} > 10\,\text{Мэв}, p_{3o} > 10\,\text{Мэв}) / W_K = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$. Мы же нашли $R_2 = 9{,}8 \cdot 10^{-6}$ [3].

Учитывая такое резкое расхождение результатов, мы проверили наши расчеты, использующие метод Монте-Карло, путем аналитического вычисления вкладов прямых диаграмм в полную вероятность для всех четырех распадов. Подобно тому, как это сделано в работах /4,14/,

---

[3] В работе /4/ содержится утверждение, что различие между полученным $R_1 = 0{,}82 \cdot 10^{-6}$ и $R_2 = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ из работы /8/ объясняется ошибкой в 1/4, допущенной в работе /8/. И действительно $R_1 \approx \frac{1}{4} R_2$. Непонятно, однако, как можно сравнивать величины R_1 и R_2, имеющие разный физический смысл. Наши расчеты показали, что R_1 и R_2 отличаются почти вдвое.

они были сведены к двойным интегралам и вычислены затем на ЭВМ. Мы получили одинаковые результаты для R_1 и вкладов прямых диаграмм в полную вероятность при двух способах вычисления (R_2 и обменные вклады не могут быть сведены к двойным интегралам).

5. Процесс $K \to e \nu_e \mu^+ \mu^-$

Поскольку распад $K \to e \nu_e$ подавлен, вклады IB и интерференционных членов A, B и C в полную вероятность процесса $K \to e \nu_e \mu^+ \mu^-$ пренебрежимо малы. Дают вклад только A^2, BC и C^2, причем доминирует C^2.

Исследование этого распада позволит найти величину C_o.

Для полной вероятности мы нашли $W(K \to e \nu_e \mu^+ \mu^-) = 7{,}8 \cdot 10^{-9}\, W_K$ в отличие от значения $1{,}5 \cdot 10^{-8}\, W_K$, приведенного в /4/.

Однако в данном случае нельзя с определенностью говорить о расхождении результатов, поскольку в полную вероятность распада дает вклад только структурное излучение, а в /4/ не приводятся значения параметров, входящих в формулы (6) и (7). Возможно, расхождение объясняется ошибкой, допущенной в /4/ в определении одного из ф.ф. (см. раздел 2).

6. Процесс $K \to \mu \nu_\mu \mu^+ \mu^-$

Полная вероятность распада $K \to \mu \nu_\mu \mu^+ \mu^-$, равна $W_{3\mu} = 1{,}0 \cdot 10^{-8}\, W_K$. В нее, как видно из таблицы 2, вносят вклад члены $IB, A^2, A, B^2, B, C^2, C$ и BC, из которых особенно существенны IB, C^2 и C.

Вклад интерференции прямых и обменных диаграмм в полную вероятность равен $3{,}1 \cdot 10^{-9}\, W_K$.

Исследование этого распада позволит получить информацию о всех трех параметрах a_o, b_o и C_o.

Возможная постановка опыта для исследования этого процесса обсуждалась в работе /9/.

7. Процесс $K \to e\nu_e e^+e^-$

Распад $K \to e\nu_e e^+e^-$ из-за большого энерговыделения имеет наибольшую вероятность структурного излучения $W_{SE} = 2{,}1\cdot10^{-7}W_K$.

К сожалению, большая часть фазового объема этого процесса занята фоном от K_{e3} -распада. В работе /7/ мы детально рассматриваем возможность его экспериментального изучения во всем фазовом объеме.

В таблице 4 приводятся основные вклады в полную вероятность и в интегральные вероятности, ограниченные условиями: I) $|k^2|$ и $|n^2| \geqslant 0{,}01 m_K^2$, 2) $|k^2|$ и $|n^2| \geqslant m_\circ^2$, где $n = p_1 + p_3$ [4]. Вторая область свободна от фона от K_{e3} -распада.

Так же как и в процессе $K \to e\nu_e \mu^+\mu^-$ пренебрежимо малы члены IB, A, B и C. Практически дают вклад только A^2, BC и C^2.

Самым важным свойством этого распада является то, что в его фазовом объеме существуют две различные области, в одной из которых (малые $|k^2|$ и $|n^2|$) доминируют A^2 и B^2, а в другой (большие $|k^2|$ и $|n^2|$) доминирует C^2. Изучение распределения по k^2 и n^2 в этом процессе даст полную информацию об абсолютных величинах параметров $a_\circ$, $b_\circ$ и $c_\circ$.

8. Выводы

Проведенный анализ распадов $K \to l_1\nu_{l_1} l_2^+ l_2^-$ показал, что их исследование на опыте предоставляет большие возможности для изучения ф.ф., характеризующих слабо-электромагнитную вершину с изменением странности.

---

[4] Из-за наличия 2-х тождественных частиц в конечном состоянии любые экспериментальные обрезания должны быть симметризованы.

Экспериментальное изучение этих процессов позволит:

I) Измерить параметры $a_\circ$, $b_\circ$ и $c_\circ$ – значения соответствующих ф.ф. при $k^2 = Q^2 = 0$, что даст возможность проверить предсказания техники жестких каонов и получить информацию о параметрах модели. В частности, можно будет проверить справедливость соотношения $c_\circ = \frac{1}{3}\langle r_K^2\rangle m_K^2$, если из других экспериментов известно значение среднеквадратичного радиуса каона $\sqrt{\langle r_K^2\rangle}$.

2) Более детальное изучение распадов позволит проверить сделанное предположение о том, что зависимость ф.ф. от k^2 и Q^2 определяется только массами ближайших резонансов (формулы (2), (9), (II)). Отметим, что уже возможность описания всех четырех процессов тремя параметрами будет служить доводом в пользу справедливости этого предположения.

Полученные дифференциальные вероятности и созданные программы для ЭВМ позволяют легко рассчитать вероятности процессов в любой части фазового объема и с любыми ф.ф.

Авторы выражают глубокую благодарность С.М.Биленькому за постоянный интерес к работе и полезные замечания и Е.А.Иванову и С.М.Коренченко за обсуждение результатов работы.

Литература

1. Д.Ю.Бардин, С.М.Биленький, Г.В.Мицельмахер, Н.М.Шумейко. ЯФ, 14, 427, I97I.
2. Д.Ю.Бардин, С.М.Биленький. ЯФ, I6, 557, I972.
3. A.Q.Sarker. Phys.Rev., 173, 1749, 1968.
   R.Rockmore. Phys.Rev., 177, 2573, 1969.
   N.J.Carron, R.L.Schult. Phys.Rev., D1, 3171,1970; D3, 2237, 1971.
4. S.Krishna, H.S.Mani. Phys.Rev., D5, 678, 1972.
5. K.C.Gupta, J.S.Vaishya. Phys.Rev., 170, 1530, 1968.
   Y.Ueda. Phys.Rev., 174, 2082, 1968; 184, 1966(E), 1969.
6. H.J.Schnitzer, S.Weinberg. Phys.Rev., 164, 1828, 1967.
7. Д.Ю.Бардин, Г.В.Мицельмахер, Н.М.Шумейко. Сообщение ОИЯИ Р2-7348 Дубна, I973.
8. W.T.Chu, T.Ebata, D.M.Scott. Phys.Rev., 166, 1577, 1968.
9. Л.Окунь, Б.Понтекорво, К.Руббиа. ЯФ, 4, I202, I966.
10. T.Ericson, S.L.Glashow. Phys.Rev., 133, B130, 1964.
    А.Ванжа, А.Исаев, Л.Лапидус. ЯФ, I2, 595, I970.
11. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 18, 507, 1967.
12. T.Das, V.S.Mathur, S.Okubo.Phys.Rev.Lett., 19, 470, 1967.
13. T.Das, V.S.Mathur, S.Okubo.Phys.Rev.Lett., 19, 859, 1967.
14. Н.М.Шумейко. Автореферат диссертации, 2-5564, Дубна, I97I.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июля I973 года.

Таблица I.

Численные значения вкладов в полную вероятность величин, входящих в равенство (I2) в единицах $I0^{-8}\,W_K$

Процесс	$K\to\mu+\nu_\mu+e^++e^-$		$K\to e+\nu_e+\mu^++\mu^-$	
Формфакторы	Постоянные	функции	Постоянные	функции
Тип вклада				
IB	$\sim3,00\cdot I0^{3}$	$\sim3,00\cdot I0^{3}$	$3,05\cdot I0^{-5}$	$3,05\cdot I0^{-5}$
A^2	8,95	$I,I5\cdot I0$	$3,44\cdot I0^{-2}$	$4,65\cdot I0^{-2}$
A	$\simeq4,63\cdot I0$	$\simeq5,26\cdot I0$	$-I,08\cdot I0^{-5}$	$-I,25\cdot I0^{-5}$
B^2	$I,78\cdot I0^{-I}$	$2,02\cdot I0^{-I}$	$I,26\cdot I0^{-3}$	$I,67\cdot I0^{-3}$
B	$\sim8,75$	$\sim9,4I$	$2,29\cdot I0^{-6}$	$2,63\cdot I0^{-6}$
A·B	0,	0,	0,	0,
C^2	I,07	I,2I	$5,03\cdot I0^{-I}$	$6,83\cdot I0^{-I}$
C	4,83	5,07	$4,05\cdot I0^{-5}$	$4,69\cdot I0^{-5}$
A·C	0,	0,	0,	0,
B·C	$2,2I\cdot I0^{-I}$	$2,55\cdot I0^{-I}$	$3,75\cdot I0^{-2}$	$5,02\cdot I0^{-2}$
H^2	$I,89\cdot I0^{-5}$	$2,20\cdot I0^{-5}$	$6,30\cdot I0^{-II}$	$8,40\cdot I0^{-II}$
H	$-I,26\cdot I0^{-2}$	$-I,39\cdot I0^{-2}$	$-I,47\cdot I0^{-8}$	$-I,67\cdot I0^{-8}$
A·H	0,	0,	0,	0,
B·H	$<I,00\cdot I0^{-6}$	$<I,00\cdot I0^{-6}$	$<I,00\cdot I0^{-II}$	$<I,00\cdot I0^{-II}$
C·H	$-3,I7\cdot I0^{-3}$	$-3,57\cdot I0^{-3}$	$-4,I6\cdot I0^{-8}$	$-5,62\cdot I0^{-8}$
D^2	$I,55\cdot I0^{-2}$	$I,62\cdot I0^{-2}$	$2,84\cdot I0^{-8}$	$3,65\cdot I0^{-8}$
D	$5,52\cdot I0^{-I}$	$5,57\cdot I0^{-I}$	$3,I3\cdot I0^{-7}$	$3,52\cdot I0^{-7}$
A·D	0,	0,	0,	0,
B·D	$<I,00\cdot I0^{-4}$	$<I,00\cdot I0^{-4}$	$<I,00\cdot I0^{-I0}$	$<I,00\cdot I0^{-I0}$
C·D	$7,99\cdot I0^{-2}$	$8,68\cdot I0^{-2}$	$8,42\cdot I0^{-7}$	$I,I2\cdot I0^{-6}$
H·D	$-I,05\cdot I0^{-3}$	$-I,I6\cdot I0^{-3}$	$-2,67\cdot I0^{-9}$	$-3,50\cdot I0^{-9}$
Сумма	$\sim2,98\cdot I0^{3}$	$\sim2,98\cdot I0^{3}$	$5,77\cdot I0^{-I}$	$7,83\cdot I0^{-I}$
Ошибка	$9,3I\cdot I0$	$9,3I\cdot I0$	$I,64\cdot I0^{-3}$	$2,I3\cdot I0^{-3}$

Таблица 2

Численные значения вкладов в полную вероятность величин, входящих в равенство (I2) в единицах $IO^{-8}\,W_K$

Процесс	$K\to e+\nu_e+e^++e^-$		$K\to\mu+\nu_\mu+\mu^++\mu^-$	
Формфакторы	Постоянные	функции	Постоянные	функции
Тип вклада				
IB	$\sim2,83\cdot IO^{-I}$	$\sim2,83\cdot IO^{-I}$	$3,80\cdot IO^{-I}$	$3,80\cdot IO^{-I}$
A^2	$I,24\cdot IO$	$I,55\cdot IO$	$I,00\cdot IO^{-2}$	$I,34\cdot IO^{-2}$
A	$\simeq5,8I\cdot IO^{-2}$	$\simeq6,29\cdot IO^{-2}$	$-7,I2\cdot IO^{-2}$	$-8,27\cdot IO^{-2}$
B^2	$2,53\cdot IO^{-I}$	$2,85\cdot IO^{-I}$	$6,9I\cdot IO^{-4}$	$9,I4\cdot IO^{-4}$
B	$\sim8,08\cdot IO^{-3}$	$\sim8,42\cdot IO^{-3}$	$2,57\cdot IO^{-2}$	$2,95\cdot IO^{-2}$
A·B	$<I,00\cdot IO^{-2}$	$<I,00\cdot IO^{-2}$	$-3,35\cdot IO^{-4}$	$-4,48\cdot IO^{-4}$
C^2	$3,3I$	$3,87$	$2,07\cdot IO^{-I}$	$2,69\cdot IO^{-I}$
C	$6,55\cdot IO^{-4}$	$6,94\cdot IO^{-4}$	$3,43\cdot IO^{-I}$	$3,89\cdot IO^{-I}$
A·C	$<I,00\cdot IO^{-2}$	$<I,00\cdot IO^{-2}$	$<I,00\cdot IO^{-4}$	$<I,00\cdot IO^{-4}$
B·C	$5,I8\cdot IO^{-I}$	$5,99\cdot IO^{-I}$	$2,I3\cdot IO^{-2}$	$2,79\cdot IO^{-2}$
H^2	$6,44\cdot IO^{-IO}$	$7,50\cdot IO^{-IO}$	$6,62\cdot IO^{-7}$	$8,72\cdot IO^{-7}$
H	$\sim2,88\cdot IO^{-7}$	$\sim2,95\cdot IO^{-7}$	$\sim7,72\cdot IO^{-5}$	$\sim8,95\cdot IO^{-5}$
A·H	$I,77\cdot IO^{-6}$	$2,I2\cdot IO^{-6}$	$\simeq6,42\cdot IO^{-6}$	$\simeq8,92\cdot IO^{-6}$
B·H	$-2,60\cdot IO^{-7}$	$-2,98\cdot IO^{-7}$	$-7,I8\cdot IO^{-6}$	$-9,42\cdot IO^{-6}$
C·H	$-3,72\cdot IO^{-7}$	$-4,20\cdot IO^{-7}$	$-3,IO\cdot IO^{-4}$	$-4,04\cdot IO^{-4}$
D^2	$4,55\cdot IO^{-7}$	$4,84\cdot IO^{-7}$	$3,26\cdot IO^{-4}$	$4,09\cdot IO^{-4}$
D	$<I,00\cdot IO^{-6}$	$<I,00\cdot IO^{-6}$	$-I,72\cdot IO^{-3}$	$-I,9I\cdot IO^{-3}$
A·D	$-4,83\cdot IO^{-5}$	$-5,52\cdot IO^{-5}$	$I,2I\cdot IO^{-4}$	$I,70\cdot IO^{-4}$
B·D	$7,04\cdot IO^{-6}$	$7,67\cdot IO^{-6}$	$I,59\cdot IO^{-4}$	$2,03\cdot IO^{-4}$
C·D	$8,24\cdot IO^{-6}$	$9,09\cdot IO^{-6}$	$6,77\cdot IO^{-3}$	$8,57\cdot IO^{-3}$
H·D	$-3,I8\cdot IO^{-8}$	$-3,56\cdot IO^{-8}$	$-2,94\cdot IO^{-5}$	$-3,78\cdot IO^{-5}$
Сумма	$I,68\cdot IO$	$2,06\cdot IO$	$9,2I\cdot IO^{-I}$	$I,03$
Ошибка	$6,I6\cdot IO^{-2}$	$7,53\cdot IO^{-2}$	$I,85\cdot IO^{-3}$	$I,98\cdot IO^{-3}$

Таблица 3

Существенные вклады в полную вероятность в единицах $IO^{-8}\,W_K$

Процесс $K\to\mu+\nu_\mu+e^++e^-$

Область фазового объема	Полная вероятность		$\lvert k^2\rvert\geqslant m_0^2$		$\lvert k^2\rvert\geqslant 2m_0^2$	
Формфакторы	пост.	функ.	пост.	функ.	пост.	функ.
Тип вклада						
IB	~3000	~3000	5,83	5,83	I,03	I,03
A^2	8,95	II,5	0,20	0,26	0,04	0,06
A	≃46,3	≃52,6	-0,82	-0,93	-0,I7	-0,20
B^2	0,I8	0,20	0,0I	0,0I	-	-
B	~8,75	~9,4I	0,2I	0,23	0,05	0,06
C^2	I,07	I,2I	0,6I	0,73	0,3I	0,39
C	4,83	5,07	I,57	I,70	0,60	0,66
B·C	0,22	0,26	0,09	0,II	0,04	0,05
Сумма	~2980	~2980	7,70	7,93	I,90	2,05
Ошибка	93	93	0,08	0,08	0,02	0,02

Таблица 4

Существенные вклады в полную вероятность в единицах $IO^{-8}\,W_K$

Процесс $K\to e+\nu_e+e^++e^-$

Область фазового объема	Полная вероятность		$\lvert k^2\rvert$ и $\lvert n^2\rvert\geqslant 0,01\,m_K^2$		$\lvert k^2\rvert$ и $\lvert n^2\rvert\geqslant m_0^2$	
Формфакторы	пост.	функ.	пост.	функ.	пост.	функ.
Тип вклада						
IB	~0,28	~0,28	-	-	-	-
A^2	I2,4	I5,5	I,9I	2,36	0,I8	0,23
B^2	0,25	0,28	0,05	0,06	-	-
A·B	0,	0,	~0,03	~0,04	~0,02	~0,03
C^2	3,3I	3,87	3,02	3,54	I,5I	I,83
A·C	0,	0,	~0,03	~0,04	~0,08	~0,09
B·C	0,52	0,60	0,44	0,5I	0,I6	0,I8
Сумма	I6,8	20,6	5,48	6,55	I,95	2,37
Ошибка	0,06	0,07	0,04	0,05	0,02	0,03

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем выражения для дифференциальной вероятности dW процессов $K \to \ell_1 + \nu_\ell + \ell_2^+ + \ell_2^-$.

$$dW = \sum_{i=IB}^{HD} dW_i \,,$$

где

$$dW_{IB} = A_{IB}\frac{d\Gamma}{K^4}\{2x^2(p_1p)[(qr)^2 - z^2] + 2xy[2(p_1p)((qK)(p_1K) - (qr)(p_1r)) + (qr)((p_1K)(pr) - (p_1r)(pK)) - K^2(2(p_1p)(p_1q) - (pq)(p_1K) + (p_1q)(pK))] - y^2[2(p_1p)((p_1K)^2 - (p_1r)^2) + 2(p_1r)((p_1K)(pr) - (p_1r)(pK)) + r^2(pK)(p_1K) + K^2((p_1r)(pr) + 2m^2(p_1p) + 2(pq)(m_\ell^2 + (p_1K)))]\} ,$$

$$dW_{A^2} = A_{SD}\,a^2\frac{d\Gamma}{K^4}\{(p_1p)[(qr)^2K^2 + (K^2 - 4m^2)z^2] + 8m^2[m_\ell^2 z^2 - K^2(p_1q)^2 + m_K^2(p_1K)^2 + 2(p_1K)(p_1q)(qK)] - 2[(p_1r)^2 z^2 + 2(p_1r)(qr)(K^2(p_1q) - (p_1K)(qK)) + (qr)^2((p_1K)^2 + K^2m_\ell^2)]\},$$

$$dW_A = A_{INT}(-a)\frac{d\Gamma}{K^4}y\{K^2(pr)(qr) - (K^2 - 4m^2)[K^2(pq) - (pK)(qK)]\},$$

$$dW_{B^2} = A_{SD}\,b^2\frac{d\Gamma}{K^4}\{-2(p_1K)(pK)(qr)^2 - 2(QK)^2[(p_1r)(pr) + 2m^2(p_1p)] + 2(QK)\times (qr)[(p_1K)(pr) + (p_1r)(pK)] - K^2[(p_1p)(z^2 - (qr)^2) - 2(p_1K)(pK)(m_K^2 + K^2) - 2(QK)((p_1K)(pq) + (p_1q)(pK))]\},$$

$$dW_B = A_{INT}(-b)\frac{d\Gamma}{K^4}\{2K^2(pK)[x(qK) - y(p_1K)] - y[K^2(pr)(qr) - K^2(pK)(qK) - 4m^2(pK)(QK)] - 2(x(qr) - y(p_1r))[(qr)(pK) - (pr)(QK)] - K^2[y(2(pK)(QK) + K^2(pq)) - 2(QK)(x(pq) - y(p_1p)) - 2(pK)(xm_K^2 + y(p_1q))]\},$$

$$dW_{AB} = A_{SD}(-ab)\frac{d\Gamma}{K^4}2\{(qr)[(p_1r)z^2 + (qr)(K^2(p_1q) - (qK)(p_1K))] + (QK)[(qr)((p_1K)(pr) - (p_1r)(pK)) + (K^2 - 4m^2)((p_1q)(pK) - (p_1K)(pq))]\},$$

$$dW_{C^2} = A_{SD}\,c^2\,d\Gamma\cdot 2\{(p_1K)(pK) - (p_1r)(pr) - 2m^2(p_1p)\},$$

$$dW_C = A_{INT}\,c\,\frac{d\Gamma}{K^2}2\{(pK)[x(qK) - y(p_1K) - 2ym^2] - (pr)[x(qr) - y(p_1r)] - K^2[x(pq) - y(p_1p) - y(pK)]\},$$

$$dW_{AC} = A_{SD}(-ac)\frac{d\Gamma}{K^2}2\{(qr)[(p_1K)(pr) - (p_1r)(pK)] + (K^2 - 4m^2)[(p_1q)(pK) - (p_1K)(pq)]\},$$

$$dW_{BC} = A_{SD}(-bc)\frac{d\Gamma}{K^2}2\{2(qK)(p_1r)(pr) + 4m^2(p_1p)(QK) + 2K^2((p_1K)(pK) - (p_1r)(pr)) - (qr)[(p_1K)(pr) + (pK)(p_1r)] - K^2[(p_1K)(pq) + (p_1q)(pK)]\},$$

$$dW_{H^2} = A_{SD}h^2 d\Gamma\, m_\ell^2 t_1/2\,,\quad dW_H = A_{INT}h\frac{d\Gamma}{K^2}t_2\,,\quad dW_{AH} = 0,$$

$$dW_{BH} = A_{SD}bh\frac{d\Gamma}{K^2}2m_\ell^2 t_3\,,\quad dW_{CH} = A_{SD}ch\,2m_\ell^2 t_4\,d\Gamma,$$

$$dW_{D^2} = A_{IB}d^2 d\Gamma\, x^2 t_1\,,\quad dW_D = A_{IB}d\frac{d\Gamma}{K^2}(-2xt_2)\,,\quad dW_{AD} = 0,$$

$$dW_{BD} = A_{INT}bd\frac{d\Gamma}{K^2}(-2xt_3)\,,\quad dW_{CD} = A_{INT}cd\,d\Gamma(-2xt_4)\,,$$

$$dW_{HD} = A_{INT}hd\,d\Gamma(-xt_1)\,,$$

где $d\Gamma = \frac{d\vec{p}}{2p_0}\frac{d\vec{p}_1}{2p_{10}}\frac{d\vec{p}_2}{2p_{20}}\frac{d\vec{p}_3}{2p_{30}}\delta(p + p_1 + p_2 + p_3 - q)$, $K = p_2 + p_3$, $r = p_2 - p_3$,
$Q = p_1 + p$, $z^2 = (qK)^2 + m_K^2K^2$, $x = (2(qK) - K^2)^{-1}$, $y = (2(p_1K) + K^2)^{-1}$,
$t_1 = \{2(p_1p)[(qr)^2 - z^2]\}m_K^{-4}$,
$t_2 = \{xt_1m_K^4 + y[2(p_1p)((qK)(p_1K) - (qr)(p_1r)) + (qr)((p_1K)(pr) - (pK)(p_1r)) - K^2(2(p_1p)(p_1q) - (pq)(p_1K) + (pK)(p_1q))]\}m_K^{-2}$,
$t_3 = \{(qr)[(qr)(pK) - (pr)(QK)] - K^2[(pK)(qK) + (QK)(pq) + (pK)m_K^2]\}m_K^{-2}$,
$t_4 = \{(pK)(qK) - (pr)(qr) - K^2(pq)\}m_K^{-2}$,
$A_{IB} = \frac{\alpha^2G^2f_K^2m_\ell^2}{2\pi^6 m_K}$, $A_{INT} = \frac{A_{IB}}{m_K^2}$, $A_{SD} = \frac{A_{INT}}{2m_\ell^2m_K^2}$.

В случае процессов с тождественными частицами выражение для дифференциальной вероятности имеет вид

$$dW = \sum_{i=IB}^{HD}\{(dW_i + dW_i^e) + (dW_i + dW_i^e)_{p_1 \rightleftarrows p_2}\},$$

где

$$dW_{IB}^e = A_{IB}\frac{d\Gamma}{K^2n^2}\{2Y_{p_1}[-2(p_1p)Y_{p_3}^e + (pr)Y_n^e - ((Kn) - n^2)Y_p^e + (pn)Y_K^e - 2y(p_1p)((Kn) - n^2) + m^2(pn)] + Y_K[-n^2Y_p^e + (p_3p)Y_n^e - 2y(n^2(p_1p) - m^2(pn))] + Y_n[-(p_3p)Y_K^e + K^2Y_p^e + 2y(K^2(p_1p) - m^2(pK))] + 2ym^2(Kn)Y_p + (K^2(pn) - (Kn)(p_3p))[-(p_1p_2)y^2 + (p_2q)xy + (p_1q)x^ey + m_K^2xx^e] - y^2[(m^2 + 2(p_1p_2))K^2(pn) - (3m^2 + 2(p_1p_2))(p_3p)(Kn)]\},$$

$$dW_{A^2}^e = A_{SD}\,a\,a^e\frac{d\Gamma}{K^2n^2}\{n^2[(pK)(m_K^2((Kn) - n^2) - 2(p_3q)((qn) - (qK))) + (pq)(2(Kn)((qK) + (p_3q)) - K^2(qn) - n^2(qK))] + (p_3p)[-\tfrac{3}{2}m_K^2K^2n^2 + 2(n^2 - m^2)((qn)(qK) + m_K^2(Kn)) + 2(p_3q)^2(Kn) - 2(qK)n^2((qK) + (p_3q))] - (Kn)^2[2(pq)(p_3q) + m_K^2(p_3p)]\},$$

$$
\begin{aligned}
dW_A^e = {} & A_{INT}a^e\frac{d\Gamma}{k^2n^2}\{2Y_{p_3}[(pq)(2n^2-(kn))+(pn)((qk)-2(qn))]+Y_n[(pq)(k^2-(kn))+\\
& +3(pn)(qk)-2(qk)(p_3p)]+Y_k[(pn)(qn)-n^2(pq)]+Y_p[(qn)(kn)-n^2(qk)]-\\
& -Y_q[2(kn)(p_1p)+k^2(pn)]-y[n^2(pk)(p_1q)-2n^2k^2(pq)+\tfrac{1}{2}(n^2-4m^2)((pq)(kn)-\\
& -(qk)(pn))+4n^2(qk)(p_3p)-2(p_3p)(p_3q)(kn)+(p_3q)(k^2(pn)-n^2(pk))-\\
& -(qn)(3(kn)(p_3p)-\tfrac{3}{2}k^2(pn))]\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dW_{B^2}^e = {} & A_{SD}bb^e\frac{d\Gamma}{k^2n^2}\{2(qk)[n^2((p_1p_2)(pq)+(p_2q)(p_1p))+(p_3q)(k^2(pn)-n^2(pk)-2n^2(pn))-\\
& -(qn)(p_3p)(n^2-m^2)]+2(p_3q)(kn)[(pq)(n^2-(kn))+(p_2p)(p_3q)]+m_k^2[(kn)(n^2(pk)-\\
& -(kn)(p_3p))-\tfrac{1}{2}k^2n^2(pq)]+2n^2[t_1^e+k^2t_2^e]\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dW_B^e = {} & A_{INT}b^e\frac{d\Gamma}{k^2n^2}\{Y_{p_3}[2(qn)(2(p_1p)-(pk))+4(pn)(p_3q)+2n^2(pq)]-Y_k[2(qn)(p_1p)+\\
& +2(p_3q)(pn)+n^2(pq)]+Y_p[k^2(qn)+n^2(qk)-2(kn)(p_3q)]+2Y_n[(p_3q)(pk)-(pn)(qk)]+\\
& +Y_q[2(pn)(kn)-n^2(pk)]+y[k^2(pn)((qn)-3(p_3q))+(p_3p)((qn)(4k^2-2(kn))-2(kn)(p_3q))+\\
& +2m^2(pk)(qn)+n^2((pk)(qn)+2(pk)(p_3q)-(qk)(p_3p))+\tfrac{1}{2}k^2n^2(pq)]-2n^2t_3^e\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dW_{AB}^e = {} & A_{SD}ab^e\frac{d\Gamma}{k^2n^2}\{m_k^2[(kn)(n^2(pk)+k^2(pn)+2(p_3p)(n^2-(kn)))-n^2(k^2(p_2p)+\\
& +(pk)(n^2+2m^2))]-2m^2[2(p_3q)(2(pq)(kn)-(pk)(qn))-k^2(qn)(pq)]+2(p_1p_2)(pq)\times\\
& \times[k^2(qn)+n^2(qk)-2(kn)(p_3q)]-2(p_3p)((qk)+(qn))[k^2(qn)-n^2(qk)]+2(p_3q)[(p_1q)+\\
& +(p_2q)](k^2(pn)-n^2(pk))+(p_3p)(3k^2(qn)-2(p_3q)(kn)-n^2(qk))]+2n^2t_4^e\},
\end{aligned}
$$

$$dW_{C^2}^e=A_{SD}cc^e\,d\Gamma(2t_2^e),\quad dW_C^e=A_{INT}c^e\frac{d\Gamma}{k^2}(2t_3^e),$$

$$dW_{AC}^e=A_{SD}ac^e\frac{d\Gamma}{k^2}(2t_4^e),\quad dW_{BC}^e=A_{SD}bc^e\frac{d\Gamma}{k^2}(-2t_1^e-4k^2t_2^e),$$

$$dW_{H^2}^e=A_{SD}hh^e\,d\Gamma(m^2t_5^e),\quad dW_H^e=A_{INT}h^e\frac{d\Gamma}{k^2}(t_6^e),$$

$$dW_{AH}^e=A_{SD}ah^e\frac{d\Gamma}{k^2}(2m^2t_7^e),\quad dW_{BH}^e=A_{SD}bh^e\frac{d\Gamma}{k^2}(2m^2t_8^e),$$

$$dW_{CH}^e=A_{SD}ch^e\,d\Gamma(2m^2t_9^e),\quad dW_{D^2}^e=A_{IB}dd^e\,d\Gamma(2xx^et_5^e),$$

$$dW_D^e=A_{IB}d^e\frac{d\Gamma}{k^2}(-2x^et_6^e),\quad dW_{AD}^e=A_{INT}ad^e\frac{d\Gamma}{k^2}(2x^et_7^e),$$

$$dW_{BD}^e=A_{INT}bd^e\frac{d\Gamma}{k^2}(-2x^et_8^e),\quad dW_{CD}^e=A_{INT}cd^e\,d\Gamma(-2x^et_9^e),$$

$$
\begin{aligned}
dW_{HD}^e = {} & A_{INT}hd^e\,d\Gamma\,x^e\{(p_3q)[(pq)(2(kn)-k^2-n^2)-2(p_1q)(p_2p)-\\
& -2(p_1p)(p_2q)]-\tfrac{1}{2}m_k^2[k^2(pn)+n^2(pk)-2(kn)(p_3p)]\}m_k^{-4},
\end{aligned}
$$

где $n=p_1+p_3$, $x^e=(2(qn)-n^2)^{-1}$, $a^e=a[p_1\rightleftarrows p_2]$ и т.д., $s=p_1-p_3$,

$Y_{p_3}=y(p_1p_3)-x(p_3q)$, $Y_{p_3}^e=y(p_2p_3)-x^e(p_3q)$, $Y_k=y(p_1k)-x(qk)$,

$Y_k^e=y\frac{k^2}{2}-x^e(qk)$, $Y_n=y\frac{n^2}{2}-x(qn)$, $Y_n^e=y(p_2n)-x^e(qn)$,

$Y_q=y(p_1q)+xm_k^2$, $Y_q^e=y(p_2q)+x^em_k^2$, $Y_p=y(p_1p)-x(pq)$,

$Y_p^e=y(p_2p)-x^e(pq)$,

$$
\begin{aligned}
t_1^e = {} & 2(qk)[(p_3p)(n^2-(kn))+m^2(p_1p)]-(p_3q)[(pk)(n^2-2m^2)-2(kn)(p_2p)]-\\
& -k^2[(p_1p_2)(pq)+(p_3q)(pr)+(p_3p)((qn)-(qk))],
\end{aligned}
$$

$$t_2^e=-m^2(pq)+2(p_3p)(m^2+(p_1p_2)),$$

$$
\begin{aligned}
t_3^e = {} & -Y_{p_3}[(pk)+2(p_3p)-4(pn)]-Y_k[2(pn)-(p_3p)]+\tfrac{1}{2}Y_pk^2+\\
& +y[n^2(pk)-2(kn)(p_3p)+m^2(pk)+2k^2(p_3p)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_4^e = {} & [2(p_3q)(pk)-k^2(pq)]((p_1p_2)+m^2)-k^2(p_3p)(2(p_3q)-(qn))+\\
& +(p_3p)[k^2(qk)-2(kn)(p_2q)]-2m^2[(qn)(pk)-(pq)(kn)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_5^e = {} & \{(p_3q)[-2(p_3q)(p_1p)+(qn)(pr)+(pq)(n^2-(kn))+(pn)(qk)]+\\
& +\tfrac{1}{2}m_k^2[k^2(pn)-(kn)(p_3p)]\}m_k^{-4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_6^e = {} & \{Y_{p_3}[2(p_3q)((p_1p)+(p_2p))-(qn)(pr)+(pq)((kn)-n^2)-(pn)(qk)]-Y_k(p_3q)(ps)+\\
& +Y_p(p_3q)((kn)-k^2)-Y_n(p_3q)(pk)+\tfrac{1}{2}Y_q[k^2(pn)+n^2(pk)-2(kn)(p_3p)]+\\
& +y[2(p_3q)(p_2p)((kn)-k^2)+(qn)(\tfrac{1}{2}k^2(p_1p)-(p_3p)(p_1k)+k^2(p_2p))+\tfrac{1}{2}n^2((pq)(p_1k)-\\
& -(ps)(qk)-2(qk)(p_2p)-\tfrac{1}{2}k^2(pq))+m^2((pn)(qk)-(pk)(qs)-(kn)(pq))]\}m_k^{-2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_7^e = {} & \{(qs)[k^2(pq)-(pk)(qk)]+(p_3q)[(pq)(kn)-(pk)(qn)]-(p_2p)[(qk)(qn)+(kn)m_k^2]-\\
& -\tfrac{1}{2}n^2[m_k^2(pk)+(pq)(qk)]\}m_k^{-2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_8^e = {} & \{(qs)[(qk)(p_2p)+(p_3q)(pk)+k^2((p_3p)-2(pk))]+(pq)(p_3q)((kn)-k^2)+\\
& +(pk)[(qk)(qn)+m_k^2(kn)]+\tfrac{1}{2}(pq)n^2(k^2-(qk))-k^2(pn)(\tfrac{1}{2}m_k^2+(p_3q))\}m_k^{-2},
\end{aligned}
$$

$$t_9^e=\{(qs)(2(pk)-(p_3p))+(p_3q)(pn)-\tfrac{1}{2}n^2(pq)\}m_k^{-2}.$$