СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7311

В.Б.Крапчев, В.А.Ризов,
И.Т.Тодоров

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМ СКАЛЯРНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7311

В.Б.Крапчев*, В.А.Ризов*,
И.Т.Тодоров*

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМ СКАЛЯРНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

* Постоянный адрес: ИЯИЯЭ Болгарской Академии наук, София, Болгария

О Г Л А В Л Е Н И Е

§ I. Введение

В работах[1,2] предложено релятивистское уравнение Липпмана-Швингера

$$T_w(\underline{p},\underline{q})+V_w(\underline{p},\underline{q})+\int V_w(\underline{p},\underline{k})G_w(\underline{k})T_w(\underline{k},\underline{q})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=0, \tag{I.I}$$

которое при $V_w(\underline{p},\underline{q})=V_w(\underline{p}-\underline{q})$ соответствует локальному уравнению Шредингера для связанных состояний:

$$[2w(\ell^2+\Delta)-\mathcal{V}_w(\underline{r})]\varphi_w(\underline{r})=0,\quad \mathcal{V}_w(\underline{r})=\int V_w(\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{r}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{I.2}$$

Уравнение Липпмана-Швингера написано в системе центра двух частиц; $\underline{q}$ и $\underline{p}$ – относительные импульсы в начале и в конце процесса, w – внешний параметр полной энергии, ℓ^2 – величина квадрата импульса на энергетической (и массовой) поверхности:

$$4w^2\ell^2(w^2)=\Delta(w^2,m_1^2,m_2^2)=w^4-2w^2(m_1^2+m_2^2)+(m_1^2-m_2^2)^2, \tag{I.3}$$

где

$$\Delta(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac.$$

Уравнение (I.I) отличается от первоначального квазипотенциального уравнения Логунова и Тавхелидзе[3,4] тем, что зависящий от p^2 множитель $\left(\sqrt{m_1^2+p^2}+\sqrt{m_2^2+p^2}\right)^{-1}$ перед интегралом заменён в (I.I) на внешний параметр w^{-1}, чем обеспечивается локальность уравнения (I.2).

В случае электромагнитного взаимодействия скалярных заряженных частиц в[1,2] было предложено также уравнение типа уравнения Клейна-Гордона с "минимальным" взаимодействием:

$$[(E-V_0)^2-(\underline{p}-\underline{V})^2-m_w^2]\varphi_w=0,\quad (\underline{p}=-i\underline{\nabla}), \tag{I.4}$$

где m_w – релятивистская приведённая масса,

$$m_w = \frac{m_1 m_2}{w}, \tag{I.5}$$

а E – энергия фиктивной частицы с массой m_w и импульсом $b(w^2)$:

$$E = \sqrt{m_w^2 + b^2(w^2)} = \frac{w^2 - m_1^2 - m_2^2}{2w}. \tag{I.6}$$

Согласно общей идеологии квазипотенциального подхода /3,4/ ряд теории возмущений для потенциала $V_w(\underline{p}, \underline{q})$ в уравнении (I.1) (или (I.2)) восстанавливается по ряду теории возмущений для амплитуды рассеяния. Если

$$T = T_1 + T_2 + \ldots, \text{ то } V = V_1 + V_2 + \ldots, \; V_1 = -T_1, \; V_2 = -T_2 + T_1 G T_1. \tag{I.7}$$

Уравнение (I.4) может быть записано в форме (I.2) с

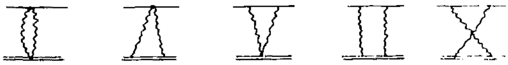
$$\frac{1}{2w} \vartheta_w(\underline{r}) = 2E\vartheta_0 - \{\underline{p}, \underline{\vartheta}\} - \vartheta_0^2 + \underline{\vartheta}^2. \tag{I.8}$$

Рецепт восстановления потенциала по амплитуде на массовой поверхности в случае уравнения (I.4), однако, отличается от общего рецепта (I.7). Чтобы получить борновское приближение для 4-потенциала мы приравниваем борновскому приближению амплитуды (взятому со знаком минус) не всю правую часть (I.8), а лишь линейный член

$$2E\vartheta_0 - \{\underline{p}, \underline{\vartheta}\},$$

требуя при этом, чтобы ϑ_0 совпало с кулоновским потенциалом $-\frac{\alpha}{r}$. Таким образом, уравнение (I.4) учитывает члены высшего порядка $\vartheta_0^2 - \underline{\vartheta}^2$, несмотря на то, что потенциал определяется лишь из борновского приближения для амплитуды рассеяния. Заранее не очевидно, что квадратичный член по потенциалам соответствует высшим приближением в разложении для амплитуды.

Цель настоящей работы двояка. Во-первых, мы покажем, что вклад V_0^2 в тонкую структуру спектральных линий воспроизводится вкладом от диаграмм четвёртого порядка, изображённых на рис. Iа)-д) (Во-вторых, мы подсчитаем главный член (порядка



а) б) в) г) д)

Рис. 1.

$\alpha^5 \ln \alpha^{-1}$) в лэмбовском смещении энергетических уровней. Результат этого расчёта согласуется с известным выражением для лэмбовского сдвига (см., например,/5,6/), причём массы обеих частиц входят симметрично в окончательный формуле (обычный расчёт/5,6/ проводится в виде разложения по отношению малой к большой массе и проделан лишь при значении главного квантового числа $n=2$).

Эти результаты изложены в § 3 и 4. Сначала (§ 2) мы воспроизводим выражения для 4-потенциала в первом порядке по α. Из этих выражений в/I,2/ найдена (на основе уравнения (I.4)) тонкая структура спектральных линий и эффекты отдачи.

§ 2. Определение эффективного 4-потенциала в первом порядке по α. Релятивистская формула Бальмера

Мы рассматриваем взаимодействие противоположно заряженных бесспиновых частиц с массами m_1 и m_2, описываемых комплексными псевдоскалярными полями ψ_1 и ψ_2. Лагранжиан электромагнитного взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = ie\left[:\psi_1^*(x)\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi_1(x): - :\psi_2^*(x)\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi_2(x):\right]A^\mu(x) + e^2\left[\psi_1^*(x)\psi_1(x) + \psi_2^*(x)\psi_2(x)\right]A^\mu(x)A_\mu(x), \tag{2.I}$$

где

$$\psi^{*}(x)\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi(x)=\psi^{*}(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\psi^{*}(x)}{\partial x^\mu}\psi(x),$$

(знак в правой части (2.1) соответствует метрике в пространстве Минковского с сигнатурой + − − −).

Два слова относительно выбора нормировки x). Мы пользуемся следующей инвариантной нормировкой одночастичных состояний:

$$\langle p_i|q_i\rangle=(2\pi)^3\,2\sqrt{w_i^2+\underline{p}_i^2}\;\delta(\underline{p}_i-\underline{q}_i)\qquad i=1,2. \tag{2.2}$$

Инвариантная амплитуда T связана с элементами матрицы рассеяния формулой

$$\langle p_1p_2|S|q_1q_2\rangle=\langle p_1|q_1\rangle\langle p_2|q_2\rangle+i(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,T(p_1,p_2;q_1,q_2). \tag{2.3}$$

Амплитуда $T_w(\underline{p},\underline{q})$ в переменных центра инерции $(\underline{p}_1=-\underline{p}_2=\underline{p},\ \underline{q}_1=-\underline{q}_2=\underline{q},\ p_1^0+p_2^0=q_1^0+q_2^0=w)$ получается из $T(p_1,p_2;q_1,q_2)$ продолжением вне массовой поверхности с сохранением равенства $p_1^2-p_2^2=q_1^2-q_2^2=w_1^2-w_2^2$. При этом

$$p_1^0=q_1^0=E_1=\frac{1}{2w}\left(w^2+w_1^2-w_2^2\right),\quad p_2^0=q_2^0=E_2=\frac{1}{2w}\left(w^2-w_1^2+w_2^2\right). \tag{2.4}$$

Потенциал V_μ определяется в порядке $e^2=4\pi\alpha$ равенством

$$T_1(\underline{p},\underline{q})=e^2\frac{4E_1E_2+(\underline{p}+\underline{q})^2}{(\underline{p}-\underline{q})^2}=2w\left[(\underline{p}+\underline{q})\underline{V}(\underline{p},\underline{q})-2E\,V_0(\underline{p},\underline{q})\right] \tag{2.5}$$

и калибровочным условием

$$V_0(\underline{p},\underline{q})=-\frac{e^2}{(\underline{p}-\underline{q})^2}. \tag{2.6}$$

---

x) Мы отошли от нормировки, принятой в /2/. Наша амплитуда T связана с амплитудой $T^{[2]}$ работы /2/ равенством $T=(2\pi)^3T^{[2]}$.
При новом выборе нормировки любое интегрирование в импульсном пространстве сопровождается делением на соответствующую степень 2π (см., например, (I.1) и (I.2)).

Используя равенство $E_1E_2+\ell^2/w^2 = EW$ и переходя на массовую поверхность, где $\ell^2 = p^2 = q^2$, находим

$$(\underline{p}+\underline{q})\,\underline{V}(\underline{p},\underline{q}) = -\frac{e^2}{2W}.$$

За счёт выбора трехмерной калибровки можно добиться, чтобы

$$\underline{V}(\underline{p},\underline{q}) = -\frac{e^2}{2W}\,\frac{1}{(\underline{p}+\underline{q})^2}\,(\underline{p}+\underline{q}). \tag{2.7}$$

Мы будем экстраполировать выражения (2.6) и (2.7) и вне массовой поверхности. В координатном пространстве они соответствуют псевдолокальному потенциалу

$$\vartheta_0(\underline{r}) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \underline{\vartheta}(\underline{r}) = -i\,\frac{\alpha}{2W}\,\frac{\underline{r}}{r^3}\,I_s, \tag{2.8}$$

где I_s – оператор пространственного отражения: $(I_s f)(\underline{r}) = f(-\underline{r})$. Эффективный потенциал оказывается при этом локальным оператором:

$$\{\underline{p}, \underline{\vartheta}\} = -\frac{2\pi\alpha}{W}\,\delta(\underline{r}), \quad \underline{\vartheta}^2(r) = \frac{\alpha^2}{4W^2}\,\frac{1}{r^4}. \tag{2.9}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (I.4), мы получаем выражение для собственных значений энергии с точностью до α^4:

$$W_{n\ell} = M - \frac{m\alpha^2}{2n^2} + \frac{3}{8}\,\frac{m\alpha^4}{n^4} - \frac{m\alpha^4}{n^3(2\ell+1)} - \frac{m^2\alpha^4}{8Mn^4} + \frac{m^2}{M}\,\frac{\alpha^4}{n^3}\,\delta_{\ell 0}, \tag{2.10}$$

где $M = m_1 + m_2$, $Mm = m_1 m_2$. Не представляет большого труда найти и собственные функции с той же точностью α^4. Однако при расчёте радиационных поправок порядка меньше α^6 нам будет достаточно знать волновые функции нерелятивистской кулоновой задачи $\varphi_{n\ell s}(\underline{r})$, которые удовлетворяют уравнению (I.4) с точностью до членов порядка α^2. Преимущество использования нерелятивистских волновых функций заключается в том, что они ортонормированы относительно скалярного произведения

$$\langle nl5 | n'l'5' \rangle = \int \bar{\varphi}_{nl5}(\underline{r}) \varphi_{n'l'5'}(\underline{r}) d\underline{r}^3 = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{55'}. \qquad (2.11)$$

Поскольку значения W_{nl}, получаемые из уравнения (1.4), не являются собственными значениями эрмитова оператора в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, то в общем случае соответствующие собственные функции не ортогональны относительно этого скалярного произведения.

Отметим, что член $\underline{\vartheta}^2(\underline{r})$ (2.9) не даёт вклада в (2.10), так как его среднее значение по нерелятивистским функциям пропорционально α^6:

$$\langle nl5 | \underline{\vartheta}^2(\underline{r}) | nl5 \rangle = \frac{\alpha^2}{4W_{nl}^2} \langle nl5 | r^{-4} | nl5 \rangle =$$

$$= \frac{\alpha^6}{4M^2} \frac{3n^2 - l(l+1)}{2n^5 (l+\frac{3}{2})(l+1)(l+\frac{1}{2}) l (l-\frac{1}{2})} + O(\alpha^8). \qquad (2.12)$$

Мы увидим в следующем пункте, что сингулярность $\vartheta^2(\underline{r})$ при $r \to 0$, ответственная за особенность при $l = 0$, сокращается с линейной расходимостью итерации квазипотенциала. Будем предполагать, что и (регуляризованный каким-то образом) вклад в S - волновые уровни энергии является величиной более высокого порядка чем α^5 и не будем его учитывать.

Использование нерелятивистских кулоновых функций в качестве исходного приближения делает целесообразным введение кулоновых единиц [7], что позволяет сразу оценивать порядок по α различных поправочных членов (см. Дополнение Б). В этих единицах расстояние r и импульс p заменяются безразмерными величинами r_c и p_c по формулам

$$\underline{r} = \frac{1}{\alpha E} \underline{r}_c, \quad \underline{p} = \alpha E \underline{p}_c, \quad \ell^2 = \alpha^2 E^2 \ell_c^2. \qquad (2.13)$$

В этих единицах невозмущённая волновая функция φ_{nl5} удовлетворяет не зависящему от α уравнению

$$(\underline{p}_c^2-\ell_c^2-\frac{2}{r_c})\varphi_{nl5}(\underline{r})=0\,,\ \underline{p}_c=-i\ \partial/\partial\underline{r}_c \qquad (2.14)$$

с собственными значениями $(\ell_c^2)_n=-1/n^2$,а возмущенная функция $\psi(\underline{p}_c)$ - уравнению

$$(\underline{p}_c^2-\ell_c^2-\frac{2}{r_c})\psi(\underline{p}_c)+\frac{\alpha E}{2W}\int V_w'(\underline{p}_c,\underline{q}_c)\psi(\underline{q}_c)\frac{d^3q_c}{(2\pi)^3}=0 \qquad (2.15)$$

Здесь $-\frac{1}{r_c}$-интегральный оператор с ядром, пропорциональным (2.6),а

$$V_w'(\underline{p}_c,\underline{q}_c)=V_w(\alpha E\underline{p}_c,\alpha E\underline{q}_c)+\frac{2}{r_c}\frac{2W}{\alpha E} \qquad (2.16)$$

есть поправка к кулоновскому потенциалу $(-\frac{2}{r_c})$. Мы рассматриваем член $\frac{\alpha E}{2W}\int V_w'(\ldots)$ как возмущение. Поправка к невозмущенным собственным значениям $(\ell_c^2)_n$ в первом порядке теории возмущений даётся средним значением

$$\frac{\alpha E}{2W}\langle nl5|V_w'|nl5\rangle \qquad (2.17)$$

по кулоновским функциям $\varphi_{nl5}(\underline{p}_c)$. Поскольку $\ell^2=\alpha^2E^2\ell_c^2$, то сдвиг собственных значений величины ℓ^2 в первом порядке равен

$$\alpha^2E^2\frac{\alpha E}{2W}\langle nl5|V_w'|nl5\rangle=\alpha^3\frac{E^3}{2W}\langle nl5|V_w'|nl5\rangle. \qquad (2.18)$$

Дальше нетрудно найти и поправку ΔW к уровням энергии.

Отсюда следует правило для нахождения <u>порядка величины</u> (по α) среднего значения некоторой поправки в V_w' : α^3 следует умножить на порядок (по α) данной поправки, взятой в единицах (2.13).

Для примера рассмотрим интеграл

$$I=4\alpha^2(t-t_0)\int_0^\infty\frac{dx}{(x-t)(x-t_0)}=4\alpha^2\ln\left|\frac{t_0}{t}\right|=4\alpha^2\ln\left[\frac{p_c^2+q_c^2-2\ell_c^2}{(\underline{p}_c-\underline{q}_c)^2}\right], \qquad (2.19)$$

где

$$t_0=-2\lambda^2=\frac{1}{2}(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2)-m_1^2-m_2^2,$$

(см. равенство (3.7) в следующем пункте). Последнее из преобразований интеграла I состоит в ведении безразмерных единиц (2.13). Порядок I равен α^2. Порядок его вклада в среднее значение (2.18) будет α^5.

§ 3. Эффект отдачи и тонкая структура в четвёртом порядке теории возмущений

В этом разделе мы покажем, что сумма вкладов $T_{2\gamma}$ диаграмм с двухфотонными промежуточными состояниями в t - канале, изображённых на рис. I, за вычетом итерации квазипотенциала (2.5), воспроизводит член $V_1^2(r) = \frac{\alpha^2}{r^2}$ в уравнении (I.4).

Для этого мы рассмотрим поправку порядка α^2 в потенциал $V_w(\underline{p},\underline{q})$ (I.8) от двухфотонных диаграмм:

$$V_w^{(2\gamma)}(\underline{p},\underline{q}) = T_1 G T_1 - T_{2\gamma} + 2w\,\mathcal{F}\left(\frac{\alpha^2}{r^2}\right) - 2w\int \underline{V}(\underline{p},\underline{k})\,\underline{V}(\underline{k},\underline{q})\,\frac{d\underline{k}}{(2\pi)^3}, \quad (3.1)$$

где

$$T_1 G T_1 = \int T_1(\underline{p},\underline{k})\,G_w(\underline{k})\,T_1(\underline{k},\underline{q})\,\frac{d\underline{k}}{(2\pi)^3}, \quad T_1(\underline{l},\underline{k}) = e^2\left[\frac{4Ew}{(\underline{l}-\underline{k})^2} - 1\right],$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\alpha^2}{r^2}\right) = \int \frac{\alpha^2}{r^2}\,e^{-i(\underline{p}-\underline{q})\underline{r}}\,d^3r = \frac{2\pi^2\alpha^2}{|\underline{p}-\underline{q}|}, \quad G = G_w(\underline{k}) = \frac{1}{2w}\,\frac{1}{\underline{k}^2 - \underline{b}^2 - i0}. \quad (3.2)$$

Тогда наше утверждение явится следствием равенства

$$\langle n(s|V_w^{(2\gamma)}|n(s\rangle = \iint \bar{\varphi}_{n(s}(\underline{p})\,V_w^{(2\gamma)}(\underline{p},\underline{q})\,\varphi_{n(s}(\underline{q})\,\frac{d\underline{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{d\underline{q}}{(2\pi)^3} = O(\alpha^5). \quad (3.3)$$

Остальные диаграммы четвёртого порядка дают вклад выше α^4 в поправку к энергии, как будет показано в § 4.

При определении $T_{2\gamma}$ возникает некоторая неоднозначность, связанная с сингулярным характером взаимодействия с производной в скалярной электродинамике. Прежде всего, мы видим, что интеграл, определяющий $T_1 G T_1$, линейно расходится. Однако расходящийся член сокращается с линейной расходимостью в последнем члене в правой части (3.I) (в этом можно убедиться, подставляя в интеграл V из (2.7)) Таким образом, сумма первого и последнего членов в правой части (3.I) даётся сходящимся интегралом. С другой стороны, суммы вкладов в $T_{2\mu}^{-}$ диаграмм рисунка I расходятся логарифмически. Для устранения этой расходимости приходится вводить новую вершину, в которую сходятся четыре заряженных линий/8/. Эта расходимость приводит к одной неопределённой константе вычитания в дисперсионном соотношении для части амплитуды $T_{2\mu}$.

Сначала мы запишем $T_{2\mu}$ в виде дисперсионного интеграла по s при фиксированных $t<0$ и

$$\Sigma \equiv \sum_{i=1}^{2}(p_i^2+q_i^2) = s+t+u < 2(m_1^2+m_2^2). \tag{3.4}$$

Полагая

$$T_{2\mu}(s+i0,t,u+i0)-T_{2\mu}(s-i0,t,u-i0)=2i\begin{cases} A_s(s,t), & \text{при } s>M^2, \\ A_u(u,t), & \text{при } u\geq M^2, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $M=m_1+m_2$, мы можем записать дисперсионное соотношение при фиксированных t и Σ в виде

$$T_{2\mu}(s,t,u)=f_0(t)+\frac{s-s_0}{\pi}\int_{M^2}^{\infty}\left\{\frac{A_s(x,t)}{(x-s_0)(x-s-i0)}+\frac{A_u(x,t)}{(\Sigma-s_0-t-x)(x-u-i0)}\right\}dx, \tag{3.6}$$

где

$$s_0=\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2)+\frac{1}{4}\Sigma=m_1^2+m_2^2-\lambda^2,\quad \lambda^2=\frac{1}{2}\left(m_1^2+m_2^2-\frac{1}{2}\Sigma\right)>0, \tag{3.7}$$

$$f_0(t)=T_{2\mu}(s_0,t,\Sigma-s_0-t). \tag{3.8}$$

Величина λ^2 есть симметричная мера отклонения от массовой поверхности.

Скачки на разрезах $2iA_s$ и $2iA_u$ проще всего подсчитать при помощи правил Куткоского/9/. Они оказываются равными между собой:

$$A_s(x,t) = A_u(x,t) \equiv A(x,t) =$$
$$= 2\pi\alpha^2 \left\{ \frac{\ell(x)}{\sqrt{x}} + 2\cdot\frac{x-s_0}{\sqrt{x\,\ell'(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,-\lambda^2)}\,\ln\frac{\sigma(x,-\lambda^2)-1}{\sigma(x,-\lambda^2)+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{(x-s_0)^2}{t\sqrt{x\,\ell'(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,t)}\,\ln\left[\frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1}\right]^2 \right\}, \quad x > M^2. \qquad (3.9)$$

где, по определению,

$$\sigma(x,y) = \sqrt{1 - \frac{\lambda^4}{\ell'(x)\,y}} \; . \qquad (3.9a)$$

Учитывая равенство спектральных функций (3.9) в дисперсионном соотношении (3.6), мы видим, что интеграл в правой части сходится, несмотря на рост (типа $x\ln x$) абсорбтивной части $A(x,t)$.

Функция $f_0(t)$ может быть представлена, в свою очередь, в виде дисперсионного интеграла по t при фиксированных $s=s_0$ и Σ :

$$f_0(t) = f_0 + \frac{t-t_0}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{A_t(x,s_0)\,dx}{(x-t_0)(x-t-i0)} + \int_{M^2}^\infty \frac{\widetilde{A}_u(x,s_0)\,dx}{(u_0-x)(x-u-i0)}\right\}, \quad M = m_1+m_2, \qquad (3.10)$$

где

$$u_0 = s_0 = m_1^2 + m_2^2 - \lambda^2, \; t_0 = -2\lambda^2, \; s_0 + t_0 + u_0 = \Sigma, \qquad (3.11)$$

$$2i\,A_t(t,s) = T_{2\beta}(s, t+i0, u+i0) - T_{2\beta}(s, t-i0, u-i0) = 2i\,\widetilde{A}_u(u,s), \qquad (3.12)$$

$$f_0 = T_{2\beta}(s_0, t_0, u_0);$$

(3.12)

(первое из равенств (3.I2) справедливо при $t \geq 0$, второе – при $u \geq M^2$).

Величина $A_t(t,s)$ рассчитана в Дополнении А. При $s = s_0$ результат (А.II) принимает вид

$$A_t(t,s_0) = 4\pi\alpha^2 \Big\{1 - \sum_{i=1}^{2}\left[2(t-2w_i^2)+5\lambda^2\right]F(t,w_i^2,\lambda^2) + $$

$$+ (t-t_0)^2 H(\Sigma - s_0 - t, t), \qquad t > 0, \tag{3.I4}$$

где

$$F(t,w_i^2,\lambda^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{t(t-4w_i^2+4\lambda^2)}} \ln \dfrac{t+2\lambda^2+\sqrt{t(t-4w_i^2+4\lambda^2)}}{t+2\lambda^2-\sqrt{t(t-4w_i^2+4\lambda^2)}}, & \text{при } t \geq 4(w_i^2-\lambda^2), \\ \dfrac{1}{\sqrt{t(4w_i^2-4\lambda^2-t)}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{t(4w_i^2-4\lambda^2-t)}}{t+2\lambda^2}, & \text{при } 0 \leq t \leq 4(w_i^2-\lambda^2). \end{cases} \tag{3.15a}$$

$$H(z,t) = \int_{M^2}^{\infty} \frac{\theta(t\ell^4(x)-\lambda^4)}{[xt(t\ell^4(x)-\lambda^4)]^{1/2}} \frac{dx}{x-z} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[zt(t\ell^4(z)-\lambda^4)\right]^{-1/2} \ln \left| \frac{(w_1^2+w_2^2-z)t+2\lambda^4+2\sqrt{zt(t\ell^4(z)-\lambda^4)}}{(w_1^2+w_2^2-z)t+2\lambda^4-2\sqrt{zt(t\ell^4(z)-\lambda^4)}} \right|, \tag{3.I5б}$$

$z < M^2$.

В дисперсионном интеграле (3.I0) скачок на левом разрезе (при $t \leq \Sigma - M^2 - s$, т.е. при $u \geq M^2$) равен абсорбтивной части $A_u(u,t)$ (3.9) в u – канале:

$$\widetilde{A}_u(u,s_0) = A_u(u, \Sigma - s_0 - u). \tag{3.I6}$$

Дисперсионное соотношение (3.6) для $T_{\gamma p}(s,t,u)$, в котором $j_0(t)$ дается равенством (3.I0), можно привести к виду, более удобному для исследования. Для этой цели мы воспользуемся тождествами

$$\int_{a^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y(y-a^2)}} \frac{dy}{y-t} = \frac{1}{\sqrt{t(t-a^2)}} \ln \frac{\sqrt{1-(a^2/t)}+1}{\sqrt{1-(a^2/t)}-1}, \tag{3.I7}$$

$$\frac{1}{t}\int_{M^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x\ell^4(x)}} \frac{1}{\sigma(x,t)} \ln\left|\frac{\sigma(x,t)+1}{\sigma(x,t)-1}\right| \frac{dx}{x-z} = -\int_0^{\infty} \frac{H(z,x)}{x-t}\,dx. \tag{3.I8}$$

Здесь $t<0$, a^2 – положительная постоянная, $\sigma(x,t)$ определено равенством (3.9а), а $\ell^{11}(z,x)$ даётся (3.15б). При помощи (3.17) и (3.18) отдельные дисперсионные интегралы можно записать в виде:

$$\frac{s-s_0}{\pi}\int_{M^2}^{\infty}\frac{A_s(x,t)\,dx}{(x-s_0)(x-s-i0)} = g(s,s_0)+h(s,s_0)+k(s,t,s_0)-$$
$$-4\lambda^2(s-s_0)\int_{M^2}^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{x\,b^4(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,t)}\,\ln\left|\frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1}\right|dx, \tag{3.19}$$

$$\frac{s-s_0}{\pi}\int_{M^2}^{\infty}\frac{A_u(x,t)\,dx}{(\Sigma-s_0-t-x)(x-u-i0)} = g(u,\Sigma-s_0-t)+h(u,u_0)-h(\Sigma-s_0-t,u_0)+$$
$$+k(u,t,u_0)-k(\Sigma-s_0-t,t,u_0)+4\lambda^2(s-s_0)\int_{M^2}^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{x\,b^4(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,t)}\,\ln\left|\frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1}\right|dx, \tag{3.20}$$

где функции g, h и k определены равенствами

$$g(z,z_0)=2\lambda^2\int_{M^2}^{\infty}\frac{b(x)}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x-z-i0}-\frac{1}{x-z_0}\right)dx, \tag{3.21}$$

$$h(z,z_0)=4\lambda^2(z-z_0)\int_{M^2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x\,b^4(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,-\lambda^2)}\,\ln\left|\frac{\sigma(x,-\lambda^2)-1}{\sigma(x,-\lambda^2)+1}\right|\frac{dx}{x-z-i0}, \tag{3.22}$$

$$k(z,t,z_0)=4\lambda^2(z-z_0)^2\int_{M^2}^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{x\,b^4(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,t)}\,\ln\left|\frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1}\right|\frac{dx}{x-z-i0}. \tag{3.23}$$

Далее, для дисперсионных интегралов в правой части (3.10) имеем

$$\frac{t-t_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{A_t(x,s_0)\,dx}{(x-t_0)(x-t-i0)} = 4\lambda^2(t-t_0)\sum_{i=1}^{2}\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}(x-2m_i^2)+5\lambda^2\right]F(x,m_i^2,\lambda^2)\right\}\frac{dx}{(x-t_0)(x-t-i0)}+$$
$$+4\lambda^2(t-t_0)\int_0^{\infty}H(\Sigma-s_0-x,x)\,dx+4\lambda^2(t-t_0)^2\int_0^{\infty}\frac{H(\Sigma-s_0-x,x)}{x-t-i0}\,dx, \tag{3.24}$$

$$\frac{t-t_0}{\pi}\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{A_u(x,\Sigma-s_0-x)dx}{(u_0-x)(x-u-i0)}=g(\Sigma-s_0-t,u_0)+k(\Sigma-s_0-t,t,u_0)+h(\Sigma-s_0-t,u_0)-$$

$$-4\lambda^2(t-t_0)\int_0^{\infty}H(\Sigma-s_0-x,x)\,dx-4\lambda^2(t-t_0)^2\int_0^{\infty}\frac{H(\Sigma-s_0-x,x)}{x-t-i0}dx\,. \qquad (3.25)$$

Подставляя равенства (3.19),(3.20),(3.24),(3.25) в (3.10) и (3.6), получим амплитуду $T_{\lambda\mu}(s,t,u)$ в виде

$$T_{\lambda\mu}(s,t,u)=f_0+\sum_{i=1}^{2}f_i(t)+g(s,s_0)+g(u,u_0)+h(s,s_0)+h(u,u_0)+$$

$$+k(s,t,s_0)+k(u,t,u_0)\,, \qquad (3.26)$$

где

$$f_i(t)=4\lambda^2\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2}-[2(x-2w_i^2)+5\lambda^2]F(x,w_i^2,\lambda^2)\right\}\left(\frac{1}{x-t-i0}-\frac{1}{x-t_0}\right)dx$$

$$i=1,2. \qquad (3.27)$$

До сих пор константа вычитания $f_0=T_{\lambda\mu}(s_0,t_0,u_0)$ оставалась неопределённой. Теперь мы потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$f_0=4\lambda^2\sum_{i=1}^{2}\int_0^{4\tau_i}\left\{\frac{1}{9}-[2(x-2w_i^2)+5\lambda^2]F(x,w_i^2,\lambda^2)\right\}\frac{dx}{x-t_0}\,, \qquad (3.28)$$

где

$$\tau_i=w_i^2-\lambda^2 \quad (i=1,2)$$

В Дополнении Б дан способ вычисления интегралов, встречающихся в определении f_0, f_i, g, h и k. Прежде чем привести полученный ответ, мы остановимся на вклад итерации T_1GT_1. Записывая T_1 в виде

$$T_1(p,k)=e^2\left[\frac{2(s-s_0)}{(p-k)^2}-1\right], \qquad (3.29)$$

нетрудно вывести

$$I_w(p,q) = (T_1 G T_1)(p,q) =$$

$$= \frac{e^4}{2w}\, 4(s-s_0)^2 \int \frac{1}{(p-k)^2(k-q)^2}\, \frac{1}{k^2-\ell^2-i0}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3} - \frac{e^4}{2w}\, 4(s-s_0) \int \frac{1}{(p-k)^2(k^2-\ell^2-i0)}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3} +$$

$$+ \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D} = \frac{e^4}{2w} \int \frac{1}{k^2-\ell^2-i0}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{3.30}$$

Первый интеграл в правой части равенства (3.30) берётся, применяя обычную фейнмановскую параметризацию для $[(p-k)^2(k-q)^2]^{-1}$ и теорему о вычетах. Второй интеграл считается аналогично. Результат для этих двух членов имеет вид

$$\frac{4\pi\alpha^4(s-s_0)^2}{t\sqrt{s\,(\ell^2(s))}}\, \frac{1}{\sigma(s,t)}\, \ln\frac{\sigma(s,t)-1}{\sigma(s,t)+1} - \frac{8\pi\alpha^2(s-s_0)}{\sqrt{s\,(\ell^2(s)+\lambda^2)}}\, \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\ell^2(s)+\lambda^2}{-\ell^2(s)}}\,, \tag{3.31}$$

(для $\sigma(s,t)$ см. определение (3.9а)). Последнее слагаемое в правой части (3.30) рассмотрим при вычислении $V_w^{(4p)}$.

Прежде чем перейти к выражению для $V_w^{(4p)}$ (равенство (3.1)), мы построим входящую туда разность $V_{2p} = T_1 G T_1 - T_{2p}$. Используя (3.30), (3.31) и (Б.63), получим

$$V_{2p}(p,q) = -\frac{4\pi^2\alpha^2}{|p-q|}\, M - \frac{8}{3}\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^2 \alpha^2 \ln\alpha^{-2} + 4\alpha^2\ln\alpha^{-2} - 16\alpha^2\frac{t_0}{t}\ln\alpha^{-2} + \mathcal{D},$$

$$t = -(p-q)^2$$

При переходе на массовую поверхность $t_0 = -2\lambda^2 \to 0$ мы видим, что в выражении для V_{2p} исчезают члены вида $\frac{t_0}{t}\ln\alpha^{-2}$, и в результате этого перехода имеем:

$$V_{2p}(p,q) = -\frac{4\pi^2\alpha^2 M}{|p-q|} + \frac{4}{3}\alpha^2\ln\alpha^{-2} + \mathcal{D}. \tag{3.32}$$

Это означает, что для $V_w^{(4p)}$ имеет место равенство:

$$V_w^{(2p)}(p,q) = -\frac{4\pi^2\alpha^2(w-M)}{|p-q|} + \frac{4}{3}\alpha^2\ln\alpha^{-2} + \frac{e^4}{2w}\int \frac{1}{k^2-\ell^2-i0}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3} -$$

$$- 2w \int \underline{V}(p,k)\, \underline{V}(k,q)\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + O(\alpha^2). \tag{3.33}$$

Среднее первого члена в правой части (3.33) порядка α^6. Как было указано в начале этого параграфа, последние два интеграла в (3.33) при подстановке явного выражения для $V(p, k)$ (см. (2.7)) сокращают существующую до сих пор расходимость в итерации за счёт особенности $\mathcal{V}^{(4)}(r)$ при $r=0$ и в итоге дают конечный вклад порядка α^6. Только в оставшемся втором члене

$$\frac{4}{3}\alpha^2 \ln \alpha^{-2} \tag{3.34}$$

порядок среднего значения ниже α^5 (точнее он $\alpha^5 \ln \alpha^{-2}$). Этот член мы будем иметь в виду в следующем разделе при нахождении лэмбовского сдвига. Он сложится вместе с вкладом от вершинных и поляризационных диаграмм четвёртого порядка.

Итак, утверждение, сформулированное в начале этого раздела, установлено. Среднее значение поправки $V^{(4)}_{W}$ оказалось величиной порядка выше α^4 и мы убедились, что эффективный 4-потенциал V_μ, определённый равенствами (2.6) и (2.7), даёт правильную тонкую структуру энергетических уровней вплоть до α^4. Но этот явный вид V_μ не годится, если речь пойдёт о высших поправках ($\alpha^5 \ln \alpha^{-2}$ и т.д.) в уровни энергии. Для их вычисления необходимо привлечь остальные диаграммы четвёртого порядка, которым посвящён следующий раздел.

§ 4. Главная часть лэмбовского сдвига

Рассмотрим теперь диаграммы четвёртого порядка (рис. 2), в которых однофотонный обмен сопровождается радиационными поправками вершинной части и собственной энергии фотона. Покажем, что эти диаграммы не дают вклада в тонкую структуру (до α^4) и вычислим вклад в уровни энергии, пропорциональный $\alpha^5 \ln \alpha^{-2}$ (так называемая главная часть лэмбовского сдвига).

Начнём с рассмотрения двух диаграмм а) и б) рис. 2 , в которых замкнутые петли соответствуют двум заряженным частицам типа I и 2. Обозначим их сумму через $\mathcal{P}(s,t)$. Удобно, как это часто делается, определить поляризационный тензор $\Pi_{\mu\nu}(Q)$, $Q=q_1-p_1=p_2-q_2$, при помощи равенства:

$$\mathcal{P}(s,t) = -\alpha \frac{(p_1+q_1)^\mu (p_2+q_2)^\nu}{(Q^2)^2} \Pi_{\mu\nu}(Q) \tag{4.1}$$

и связать с ним скалярную функцию $P(Q^2)$ следующим образом:

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = (g_{\mu\nu} Q^2 - Q_\mu Q_\nu) P(Q^2). \tag{4.2}$$

Запишем $P(Q^2)$ в виде суммы

$$P(Q^2) = \sum_{i=1}^{2} P_i(Q^2), \tag{4.3}$$

соответствующей вкладам диаграмм а) и б) рис. 2. Наша задача – сперва найти $P_i(Q^2)$ и затем вычислить вклад от $\mathcal{P}(s,t)$.

Функции $P_i(t)$ аналитичны в комплексной плоскости $t=Q^2$ с разрезом вдоль положительной полуоси от $4m_i^2$ до ∞. Для них имеет место дисперсионное соотношение по t с одним вычитанием, поскольку мнимая часть $P_i(t)$ (пропорциональная скачку на разрезе):

$$\operatorname{Im} P_i(t) = \frac{\pi\alpha}{3}\left(\frac{t-4m_i^2}{t}\right)^{3/2}, \quad t \geq 4m_i^2, \tag{4.4}$$

стремится к постоянной $\pi\alpha/3$ при $t\to\infty$. Равенство (4.4) получается из правила Куткоского. Учитывая требование $P_i(0)=0$ запишем дисперсионное соотношение для $P_i(t)$ в виде

$$P_i(t) = \frac{\alpha t}{3}\int_{4m_i^2}^{\infty}\left(\frac{x-4m_i^2}{x}\right)^{3/2}\frac{dx}{x-t-i\varepsilon}. \tag{4.5}$$

Нам нужно приближённо вычислить интеграл в правой части равенства (4.5) при отрицательных t порядка α^2. Сделав замену переменной интегрирования

$$y=\sqrt{\frac{x-4m_i^2}{x}}\ ,\quad 0<y<1,$$

получим

$$\rho_i(t)=\frac{\alpha t}{3}\int_0^1\frac{2y^4dy}{4m_i^2-t(1-y^2)}=\frac{\alpha}{6m_i^2}\left[\frac{t}{5}+\frac{1}{70}\frac{t^2}{m_i^2}+o(t^3)\right],\ i=1,2 \tag{4.6}$$

Возвращаясь обратно к $\Pi_{\mu\nu}(Q)$ и к $P(s,t)$ (см. (4.I)), легко найти, что

$$P(s,t)=-\alpha^2\frac{2(s-s_0)+t-t_0}{30}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{m_i^2}\left[1+\frac{2}{7}\frac{t}{4m_i^2}+o(\alpha^2)\right]. \tag{4.7}$$

Это означает, что вклад диаграмы а) и б) рис. 2. в квазипотенциал будет порядка α^2 и поэтому, согласно замечанию в конце § 2, их вклад в собственные значения энергии - порядка α^5. Следовательно, этими диаграммами в дальнейшем можно пренебречь.

Нам осталось рассмотреть вершинные диаграмы в)-з) рис. 2. При их исследовании мы вновь воспользуемся методом дисперсионных соотношений.

Указанные диаграммы аналитичны в комплексной плоскости t с разрезом вдоль вещественной оси от $4m_i^2$ до ∞ $(i=1,2)$. Это позволяет получить единое для всех их представление в виде дисперсионного интеграла по t. Нахождение явного вида абсорбтивных частей подробно проведено в Дополнении В, поэтому мы напишем только окончательный результат для вершинных диаграмм $T_r(s,t)$:

$$T_r(s,t)=\frac{\alpha^2}{\pi}[2(s-s_0)+(t-t_0)]\sum_{i=1}^{2}\int_{4m_i^2}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,V_i(x)}{x(x-t-i0)}dx\ ,\quad t<0, \tag{4.8}$$

где $\mathrm{Im}\,V_i(x)$ даётся равенством (В.10). Результат, полученный в том же Дополнении В, для $T_r(s,t)$ при t порядка α^2, имеет вид:

$$T_r(s,t)=\frac{16\alpha^2}{3}m_1m_2\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{m_i^2}\ln\left(\frac{\lambda^2}{4m_i^2}\right)+o(\alpha^2). \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что вся интересующая нас поправка квазипотенциала из диаграмм однофотонного обмена на рис. 2 равна

$$V_\Gamma=\frac{16\alpha^2}{3}m_1m_2\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\ln\alpha^{-2}+o(\alpha^2). \tag{4.10}$$

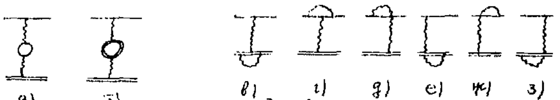


Рис 2.

Теперь нужно добавить к V_Γ вклад (3.34) от диаграмм двухфотонного обмена и взять среднее значение по невозмущенным волновым функциям. Окончательно, для сдвига уровней энергии (главная часть лэмбовского сдвига) находим

$$\Delta W_{nl}^{lamb}=\frac{4\alpha^5}{3\pi n^3}m^3\delta_{l0}\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\ln\alpha^{-2}+\frac{\alpha^5}{3\pi n^3}\frac{m^2}{M}\delta_{l0}\ln\alpha^{-2}. \tag{4.11}$$

Первый член в правой части (4.11) происходит из вершинных частей, второй – из двухфотонных диаграмм. Оба члена при $n=2$ совпадают с результатами Фултона и Мартина /11/ для главной части лэмбовского сдвига в случае двух частиц со спином 1/2. Они, кроме того, переходят в известное выражение (см., например /5/), полученное при разложении по степеням малой к большой массе (когда, например, $\frac{m_1}{m_2}\to\infty$).

Мы считаем своим приятным долгом поблагодарить Р. Фаустова за многочисленные консультации по существующим расчётам лэмбовского смещения и за плодотворные дискуссии. Мы благодарим также К. Николсона за полезное обсуждение.

ДОПОЛНЕНИЕ А

Вычисление суммарного вклада t - канальных спектральных функций для диаграмм с двухфотонным обменом

В этом дополнении мы вычислим скачок A_t на разрезе в t-канале для диаграмм, изображённых на рис. I. Поскольку это - совокупность всех диаграмм четвёртого порядка с двухфотонным промежуточным состоянием, их суммарный вклад в абсорбтивную часть проще всего получается из условия унитарности в t - канале[x)]:

$$T(p_1,-q_1;-p_2,q_2)-\overline{T}(-p_2,q_2;p_1,-q_1)=$$

$$=i(2\pi)^4\sum_n \delta\Big(p_1-q_1-\sum_{j=1}^{n}k_j\Big)\overline{T}(k_1,\dots,k_n;p_1,-q_1)\,T(k_1,\dots,k_n;-p_2,q_2). \qquad (A.I)$$

Здесь $\sum\limits_n$ включает, как обычно, интегрирование по импульсам $k_1,\dots,k_n$ промежуточных частиц; предполагается, что $-q_1^0>0,\ p_1^0>0,-p_2^0>0,\ q_2^0>0$. Чтобы вычислить вклад в правую часть (А.I) от двухфотонных промежуточных состояний, мы должны заменить n на $(k_1\sigma_1;k_2\sigma_2)$, где k_i,σ_i - импульс и поляризация i - ого фотона, $k_i^0=|\underline{k}_i|\ (i=1,2)$. Определяя инвариантный элемент объёма на конусе равенством

$$(dk)_0=\frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3\underline{k}}{2|\underline{k}|}, \qquad (A.2)$$

мы можем расшифровать символ суммы $\sum\limits_n$ (по двухфотонным состояниям) формулой

$$\sum_n \to \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\int (dk_1)_0(dk_2)_0(-g^{\sigma_1\sigma_1})(-g^{\sigma_2\sigma_2}) \qquad (A.3)$$

(множитель I/2 идёт за счёт тождественности фотонов,$-g^{\sigma\sigma}$ выступает здесь как метрический тензор в пространстве с индефинитной метрикой

---

x) Заметим, что этим путём удалось, в частности, устранить ошибку в знаке в правилах Фейнмана скалярной электродинамики, изложенных в /IO/ (гл. I4,§ 3, с. 459).

в рамках которого фотонные состояния описываются явно ковариантным образом). Остаётся подставить в (A.I) градиентно-инвариантное борновское приближение для амплитуды двухфотонной аннигиляции

$$T(k_1\sigma_1, k_2\sigma_2; p_1, -q_1) = e^2\Big[2\,\varepsilon_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(2q_1+k_1)\cdot\varepsilon_{\sigma_2}(p_1+q_1+k_1)}{m_1^2-(k_1+q_1)^2-i0} + \frac{\varepsilon_{\sigma_2}(2q_1+k_2)\,\varepsilon_{\sigma_1}(p_1+q_1+k_2)}{m_1^2-(k_2+q_1)^2-i0}\Big], \qquad (A.4)$$

где ε_{σ_i} $(i=1,2)$ – 4-вектор поляризации фотона i; набор четырех ортогональных векторов поляризации ε_σ $(\sigma=0,1,2,3)$ удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{\sigma=0}^{3} g^{\sigma\sigma}(\varepsilon_\sigma)^\lambda(\varepsilon_\sigma)^\mu = g^{\lambda\mu}. \qquad (A.5)$$

В полученном интеграле в правой части (A.I) сделаем замену переменных

$$k_1+k_2=K, \quad k_1-k_2=2k \qquad (A.6)$$

и снимем интегрирование по K за счёт δ- функции. В итоге получим

$$A_t = A_t^{(2\gamma)} = \alpha^2\sum_{\sigma_1,\sigma_2} g^{\sigma_1\sigma_1}g^{\sigma_2\sigma_2}\int d^4k\,\delta\big((p_1-q_1)k\big)\,\delta\Big(k^2+\frac{t}{4}\Big)\times$$
$$\times\Big[2\varepsilon_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(3q_1+p_1+2k)\cdot\varepsilon_{\sigma_2}(q_1+3p_1+2k)}{4m_1^2-(p_1+q_1+2k)^2+i0} + \frac{\varepsilon_{\sigma_2}(3q_1+p_1-2k)\,\varepsilon_{\sigma_1}(3p_1+q_1-2k)}{4m_1^2-(p_1+q_1-2k)^2+i0}\Big]\times$$
$$\times\Big[2\varepsilon_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(p_2+3q_2-2k)\cdot\varepsilon_{\sigma_2}(3p_2+q_2-2k)}{4m_2^2-(p_2+q_2-2k)^2-i0} + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(3p_2+q_2+2k)\cdot\varepsilon_{\sigma_2}(p_2+3q_2+2k)}{4m_2^2-(p_2+q_2+2k)^2-i0}\Big], \qquad (A.7)$$

где $t=(p_1-q_1)^2$. Для вычисления интеграла (A.7) проще всего перейти в систему покоя в t - канале. В этой системе

$$p_1-q_1=q_2-p_2=(\sqrt{t},\underline{0}), \quad (t>0),$$
$$p_1+q_1=\Big(\frac{q^2-p^2}{\sqrt{t}},\,2\big[m_1^2+\frac{1}{4t}\Delta(t,-\underline{p}^2,-\underline{q}^2)-\ell^2(w^2)\big]\underline{n}_1\Big),$$
$$p_2+q_2=\Big(\frac{p^2-q^2}{\sqrt{t}},\,2\big[m_2^2+\frac{1}{4t}\Delta(t,-\underline{p}^2,-\underline{q}^2)-\ell^2(w^2)\big]\underline{n}_2\Big), \qquad (A.8)$$

где $\Delta(a,b,c)$ даётся равенством (I.3), а $\underline{n}_1, \underline{n}_2$ –трехмерные единичные векторы. Здесь $\underline{p}^2$ и $\underline{q}^2$ определяются значениями инвариантов

$$\underline{p}^2 = -\frac{1}{W^2}(E_2 p_1 - E_1 p_2)^2, \quad \underline{q}^2 = -\frac{1}{W^2}(E_2 q_1 - E_1 q_2)^2 \tag{A.9}$$

в t – канале (где они, вообще говоря, отрицательны). Полагая далее

$$\varkappa = (\varkappa_0, \varkappa \underline{n}) \quad (\underline{n}^2 = 1), \quad d^3\varkappa = \varkappa^2 d\varkappa\, d\Omega_{\underline{n}}, \quad (\varepsilon_\sigma)^\mu = \delta^\mu_\sigma, \tag{A.10}$$

получим окончательно

$$A_f(t,s) = \alpha^2 \int d\Omega_{\underline{n}} \left[\delta^{\sigma_1}_{\sigma_2} + \frac{1}{2}\frac{(3q_1+p_1+\sqrt{t}\,\underline{n})^{\sigma_1}(q_1+3p_1+\sqrt{t}\,\underline{n})_{\sigma_2}}{4m_1^2-(p_1+q_1+\sqrt{t}\,\underline{n})^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{(3p_1+q_1-\sqrt{t}\,\underline{n})^{\sigma_1}(p_1+3q_1-\sqrt{t}\,\underline{n})_{\sigma_2}}{4m_1^2-(p_1+q_1-\sqrt{t}\,\underline{n})^2}\right]\left[\delta^{\sigma_2}_{\sigma_1} + \frac{1}{2}\frac{(p_2+3q_2-\sqrt{t}\,\underline{n})^{\sigma_2}(3p_2+q_2-\sqrt{t}\,\underline{n})_{\sigma_1}}{4m_2^2-(p_2+q_2-\sqrt{t}\,\underline{n})^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{(3p_2+q_2+\sqrt{t}\,\underline{n})_{\sigma_1}(p_2+3q_2+\sqrt{t}\,\underline{n})_{\sigma}^{\sigma_2}}{4m_2^2-(p_2+q_2+\sqrt{t}\,\underline{n})^2}\right] =$$

$$= 4\pi\alpha^2\left\{1 - \sum_{i=1}^{2}\left[\lambda(t-2m_i^2)+5\lambda^2\right]F(t,m_i^2,\lambda^2) + (s-s_0)^2 H(s,t) + (u-u_0)^2 H(u,t)\right\}, \tag{A.11}$$

где функции F и H даются равенства (3.15а) и (3.15б), соответственно, а

$$2\lambda^2 = \lambda_p^2 + \lambda_q^2, \quad \lambda_p^2 = m_1^2 - p_1^2 = m_2^2 - p_2^2 = \underline{p}^2 - b^2(s),$$

$$\lambda_q^2 = m_1^2 - q_1^2 = m_2^2 - q_2^2 = \underline{q}^2 - b^2(s). \tag{A.12}$$

ДОПОЛНЕНИЕ Б.

Приближенное вычисление интегралов в выражении для $T_{if}(s,t,u)$

При подсчёте функций f_i, g, h и k мы будем оценивать вклад отдельных членов, имея в виду замечания в конце § 2 относительно кулоновских единиц (2.13):

I. Функции $f_i(t)$ $(i=1,2)$. Согласно (3.27), имеем

$$f_i(t)=2\lambda^2\ln\frac{t_0}{t}-$$
$$-4\lambda^2\int_0^\infty\left[2(x-2m_i^2)+5\lambda^2\right]F(x,m_i^2,\lambda^2)\left(\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x-t_0}\right)dx,\quad t<0, \tag{Б.1.}$$

или

$$f_i(t)=\frac{2(t-2m_i^2)+5\lambda^2}{4\tau_i}\varphi_i(t)-\frac{\lambda^2-4m_i^2}{4\tau_i}\varphi_i(-2\lambda^2)+$$
$$+2\lambda^2\ln\frac{t_0}{t}, \tag{Б.2}$$

где

$$\tau_i=m_i^2-\lambda^2\quad(i=1,2), \tag{Б.3}$$

$$\varphi_i(t)=-16\lambda^2\tau_i\int_0^\infty\frac{F(x,m_i^2,\lambda^2)}{x-t}dx\quad(i=1,2). \tag{Б.4}$$

Каждый из интегралов (Б.4) разобьём на две части: интеграл от 0 до $4\tau_i$ и от $4\tau_i$ до ∞ . Рассмотрим сначала интеграл вида

$$\varphi^I(t)=-16\lambda^2\tau\int_0^{4\tau}\frac{F(x,m^2,\lambda^2)}{x-t}dx=$$
$$=-4\lambda^2\int_0^{4\tau}\frac{4\tau}{\sqrt{x(4\tau-x)}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x(4\tau-x)}}{x+2\lambda^2}\right)\frac{dx}{x-t}, \tag{Б.5}$$

где $\tau=m^2-\lambda^2$. При помощи замены переменной

$$x=\frac{4\tau}{1+y^2},\quad 0\le y\le\infty,$$

$\varphi^I(t)$ преобразуется к виду

$$\varphi^I(t)=-\frac{8\lambda^2}{z}\left[Q(p)-Q_1(p,z_0)\right], \tag{Б.6}$$

где

$$\rho=\sqrt{\frac{1+z}{z}}\,,\quad z=-\frac{t}{4\tau}\,,\quad z_0=\frac{\lambda^2}{2\tau}\,, \tag{Б.7}$$

а функции Q и Q_1 определены равенствами

$$Q(\rho)=\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}y}{\rho^2+y^2}\,dy\,, \tag{Б.8}$$

$$Q_1(\rho,z_0)=\frac{\gamma}{\rho}\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}y}{\gamma^2+y^2}\,dy\,, \tag{Б.9}$$

где

$$\gamma=\frac{z_0\rho}{1+z_0}\,. \tag{Б.10}$$

При выводе (Б.6) мы воспользовались тождеством

$$\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+(1+x^2)y}+\operatorname{arctg}\frac{xy}{1+y}\,.$$

В силу того, что $-t_0=2\lambda^2$ и $-t$ являются величинами порядка α^2 (в кулоновых единицах):

$$2\lambda^2=\underline{p}^2+\underline{q}^2-2\ell^2=\alpha^2E^2(\underline{p}_c^2+\underline{q}_c^2-2\ell_c^2),$$
$$-t=(\underline{p}-\underline{q})^2=\alpha^2E^2(\underline{p}_c-\underline{q}_c)^2, \tag{Б.11}$$

то параметр ρ, согласно (Б.7), имеет порядок α^{-1}, а γ –порядок α. Итак, нам требуются значения $Q(\rho)$ при $\rho\gg1$ и значения интеграла в правой части (Б.9) при $\gamma\ll1$.

Для $Q(\rho)$ интегрированием по частям находим

$$Q(\rho)=\frac{1}{\rho}\int_0^\infty\operatorname{arctg}y\,d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\pi^2}{4}-\int_0^\infty\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\rho}\right)\frac{dy}{1+y^2}\right]. \tag{Б.12}$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$I(\xi)=\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}(\xi y)}{1+y^2}\,dy, \tag{Б.13}$$

где $\xi = \rho^{-1}$ – величина порядка α. Для нахождения $I(\xi)$ при малых ξ сначала продифференцируем обе части (Б.13):

$$I'(\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)(1+\xi^2 y^2)} = -\frac{\ln\xi}{1-\xi^2}. \tag{Б.14}$$

Интегрируя это равенство в окрестности нуля с учётом условия $I(0)=0$, находим

$$I(\xi) = \int\limits_0^{\xi} \frac{\ln x\,dx}{1-x^2} = \xi(1-\ln\xi)+o(\xi^2). \tag{Б.15}$$

Возвратимся к выражению (Б.12) для $Q(\rho)$, имея в виду определение (Б.13) интеграла $I(\xi)$ и формулу (Б.15):

$$Q(\rho)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\pi^2}{4}-\frac{1+\ln\rho}{\rho}+o(\rho^{-2})\right]. \tag{Б.16}$$

Таким же образом мы находим приближённое выражение и для $Q_1(\rho, z_0)$, когда параметр γ в интеграле (Б.9) лежит в окрестности нуля. Интегрирование по частям даёт:

$$Q_1(\rho, z_0)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\pi^2}{4}-\int\limits_0^\infty \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{\gamma}\right)\frac{dy}{1+y^2}\right]. \tag{Б.17}$$

Далее нам нужно знать поведение функции $I(\xi)$, где $\xi=\gamma^{-1}$, при больших значениях аргумента. Для этой цели проинтегрируем (Б.15) при больших ξ с учётом равенства $I(\infty)=\frac{\pi^2}{4}$. В результате получим:

$$I(\xi) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1+\ln\xi}{\xi} + o(\xi^{-2}). \tag{Б.18}$$

Для $Q_1(\rho, z_0)$ это даст

$$Q_1(\rho, z_0) = \frac{1}{\rho}\left[\gamma(1-\ln\gamma) + o(\gamma^2)\right]. \tag{Б.19}$$

В полученных выражениях для Q и Q_1 мы заменим переменные ρ и γ через z и z_0 согласно (Б.7) и(Б.10). Подставляя результат в правую часть (Б.6), находим:

$$\varphi^{I}(t) = -\frac{2\pi^2\alpha^2}{\sqrt{z}} - 4\alpha^2\left(1-\frac{z_0}{z}\right)\ln z - 8\alpha^2\frac{z_0}{z}\ln z_0 + 8\alpha^2\left(1+\frac{z_0}{z}\right) + o(\alpha^3),$$
$$z = -\frac{t}{4\tau}, \quad z_0 = \frac{\lambda^2}{2\tau}. \tag{Б.20}$$

В частности, при $t = -2\lambda^2$, имеем

$$\varphi^{I}(-2\lambda^2) = -\frac{2\pi^2\alpha^2}{\sqrt{\lambda^2/2\tau}} - 8\alpha^2\ln\frac{\lambda^2}{2\tau} + 16\alpha^2 + o(\alpha^3). \tag{Б.21}$$

Подставим (Б.20) и (Б.21) (используя τ_i вместо τ) в правую часть (Б.2). Поскольку t и λ^2 – порядка α^2, то для вклада $f_i^{I}(t)$ интегралов от 0 до $4\tau_i$ в $f_i(t)$ получим

$$f_i^{I}(t) = 4\pi^2\alpha^2 m_i\left(\frac{1}{\sqrt{-t}} - \frac{1}{\sqrt{-t_0}}\right) + 4\alpha^2\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\ln\frac{-t}{4m_i^2} -$$
$$-8\alpha^2\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\ln\frac{-t_0}{4m_i^2} + 8\alpha^2\left(1-\frac{t_0}{t}\right) + o(\alpha^3), \quad (i=1,2), \tag{Б.22}$$

где $t_0 = -2\lambda^2$. Сумма $f_1^{I} + f_2^{I}$ даётся равенством

$$\sum_{i=1}^{2} f_i^{I}(t) = 4\pi^2\alpha^2 M\left(\frac{1}{\sqrt{-t}} - \frac{1}{\sqrt{-t_0}}\right) + 4\alpha^2\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(\ln\frac{-t}{4m_i^2} - 2\ln\frac{-t_0}{4m_i^2}\alpha\right) +$$
$$+ o(\alpha^3). \tag{Б.23}$$

Оценим теперь оставшийся интеграл от 4τ до ∞ в выражении для $\varphi(t)$:

$$\varphi^{II}(t) = -16\alpha^2\tau\int_{4\tau}^{\infty}\frac{F(x, m_i^2, \lambda^2)}{x-t}\,dx =$$
$$= -4\alpha^2\int_{4\tau}^{\infty}\frac{2\tau}{\sqrt{x(x-4\tau)}}\ln\left|\frac{x+2\lambda^2+\sqrt{x(x-4\tau)}}{x+2\lambda^2-\sqrt{x(x-4\tau)}}\right|\frac{dx}{x-t}, \tag{Б.24}$$

$\tau = m^2 - \lambda^2$. Используя замену переменной

$$y = \sqrt{\frac{x-4\tau}{x}}, \quad 0 \le y \le 1,$$

получаем

$$\varphi^{\mathrm{II}}(t) = -2\alpha^2 \int_0^1 \ln\left[\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z_0(1-y)}{1+z_0(1+y)}\right]\frac{dy}{1+z(1-y^2)}, \qquad (\text{Б.25})$$

где $z = -\frac{t}{4\tau}$, $z_0 = -\frac{t_0}{4\tau} = \frac{\lambda^2}{2\tau}$ – параметры порядка α^2. Разложим знаменатель $1+z(1-y^2)$ в ряд по степеням $z(1-y^2)$ и

$$\ln\frac{1+z_0(1-y)}{1+z_0(1+y)} -$$

по степеням $z_0(1+y)$. В результате (Б.25) приводится к виду

$$\varphi^{\mathrm{II}}(t) = -2\alpha^2 \int_0^1 \ln\frac{1+y}{1-y}\,dy + o(\alpha^3). \qquad (\text{Б.26})$$

Переходя к вкладу φ_i^{II} в f_i, мы устанавливаем, что

$$f_i^{\mathrm{I}}(t) = o(\alpha^3). \qquad (\text{Б.27})$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(t) = 4\alpha^2 \ln\frac{t_0}{t} + \sum_{i=1}^{2} f_i^{\mathrm{I}}(t) + o(\alpha^3). \qquad (\text{Б.28})$$

2. <u>Функция $g(z, z_0)$</u>. В интеграле (3.21)

$$g(z,z_0) = 2\alpha^2 \int_{M^2}^{\infty} \frac{b(x)}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x-z-i0} - \frac{1}{x-z_0}\right)dx = \alpha^2 \int_{M^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\Delta(x, m_1^2, m_2^2)}}{x}\left(\frac{1}{x-z-i0} - \frac{1}{x-z_0}\right)dx \qquad (\text{Б.29})$$

делаем замену переменной

$$y = \sqrt{\frac{x-M^2}{x-(m_1-m_2)^2}}, \quad 0 \le y \le 1,$$

которая приводит его к виду

$$g(z,z_0) = 8\alpha^2 m_1 m_2 \int_0^1 \frac{y^2}{M^2 - y^2(m_1-m_2)^2}\left[\frac{z-(m_1-m_2)^2}{M^2 - z + y^2(z-(m_1-m_2)^2)} - \frac{z_0-(m_1-m_2)^2}{M^2 - z_0 + y^2(z_0-(m_1-m_2)^2)}\right]dy$$

После несложных преобразований получаем

$$q(z,z_0) = -4\alpha^2\left\{\frac{\sqrt{-\Delta(z,w_1^2,w_2^2)}}{z}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z-(w_1-w_2)^2}{\mu^2-z}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{-\Delta(z_0,w_1^2,w_2^2)}}{z_0}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z_0-(w_1-w_2)^2}{\mu^2-z_0}}+\frac{|w_1-w_2|}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right)\ln\frac{\mu+|w_1-w_2|}{\mu-|w_1-w_2|}\right\}. \tag{Б.30}$$

т.е. $q(s,s_0)$ и $q(u,u_0)$ – величины порядка α^2 и ими можно пренебречь.

3. <u>Функции $h(s,s_0)$ и $k(s,t,s_0)$</u>. Функции h и k можно выразить через одну функцию r:

$$h(z,z_0) = -\lambda^2 r(z,-\lambda^2,z_0), \tag{Б.31}$$

$$k(z,t,z_0) = (z-z_0)\,r(z,t,z_0). \tag{Б.32}$$

где, по определению:

$$r(z,t,z_0) = 4\alpha^2(z-z_0)\int_{\mu^2}^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{x\ell^2(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,t)}\ln\frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1}\,\frac{dx}{x-z}\equiv 4\alpha^2(z-z_0)r_1(z,t), \tag{Б.33}$$

а $\sigma(x,t)$ определена равенством (3.9а). Начнём с исследования функции

$$r_1(s,t) = \int_{\mu^2}^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{x\ell^2(x)}}\,\frac{1}{\sigma(x,t)}\ln\left[\frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1}\right]\frac{dx}{x-s}. \tag{Б.34}$$

Используя (3.18) и представление (3.15б) для $H(z,t)$, мы получим последовательно

$$r_1(s,t) = \int_0^{\infty}\frac{H(s,x)}{x-t}dx = \int_0^{\infty}4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{s-s_2(x)}{s_1(x)-s}}\,\frac{1}{\sqrt{(s_1(x)-s)(s-s_2(x))}}\,\frac{dx}{x(x-t)} =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{(s_1(x)-s)(s-s_2(x))}}\,\frac{dx}{x(x-t)} - \int_0^{\infty}4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{s_1(x)-s}{s-s_2(x)}}\,\frac{1}{\sqrt{(s_1(x)-s)(s-s_2(x))}}\,\frac{dx}{x(x-t)}, \tag{Б.35}$$

где

$$s_{1,2}(x) = \left[\sqrt{w_1^2+\frac{\lambda^4}{x}} \pm \sqrt{w_2^2+\frac{\lambda^4}{x}}\right]^2.$$

Первый интеграл легко считается:

$$\Gamma_{11}(s,t) \equiv \int_0^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{(s_1(x)-s)(s-s_2(x))}} \frac{dx}{x(x-t)} = \frac{-\pi}{t\sqrt{s|t^2(s)|}} \frac{1}{\sigma(s,t)} \ln \frac{\sigma(s,t)+1}{\sigma(s,t)-1} . \quad (\text{Б.36})$$

Второй интеграл мы запишем в виде

$$\Gamma_{12}(s,t) \equiv \int_0^{\infty} \frac{4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{s_1(x)-s}{s-s_2(x)}}}{\sqrt{(s_1(x)-s)(s-s_2(x))}} \frac{dx}{x(x-t)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(\lambda^4+w_1^2x)(\lambda^4+w_2^2x)}} \left[\frac{x(w_1^2+w_2^2-s)+2\lambda^4+2\sqrt{(\lambda^4+w_1^2x)(\lambda^4+w_2^2x)}}{4\sqrt{(\lambda^4+w_1^2x)(\lambda^4+w_2^2x)}}\right]^n \frac{dx}{x+z}, \quad (\text{Б.37})$$

где $z=-t$ и было использовано разложение

$$\mathrm{arctg}\, x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n . \quad (\text{Б.38})$$

Сделаем замену интеграционной переменной в (Б.37)

$$y = \sqrt{\frac{\lambda^4+w_1^2x}{\lambda^4+w_2^2x}} \quad (\text{считая, что } w_1 > w_2), \quad 1 \le y \le \frac{w_1}{w_2} . \quad (\text{Б.39})$$

Для Γ_{12} получим

$$\Gamma_{12}(s,t) = \frac{1}{2w_2^2\cdot\lambda^4} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_1^{w_1/w_2} \frac{2}{a^2-x^2}\left[\frac{y+1}{y}(a-y+q)\right]^n dy, \quad z=-t, \quad (\text{Б.40})$$

где

$$C_n = (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left[\frac{w_1^2-w_2^2-s}{4(w_1^2-w_2^2)}\right]^n , \quad (\text{Б.41})$$

$$a = \sqrt{\frac{2w_1^2-\lambda^4}{2w_2^2-\lambda^4}} , \quad (\text{Б.42})$$

$$q = \frac{s+w_1^2-w_2^2}{s-w_1^2+w_2^2} - a . \quad (\text{Б.43})$$

Нетрудно проверить, что q – параметр порядка α^2. Рассмотрим теперь r_{12} как функцию аргумента q и возьмём её разложение в окрестности нуля:

$$r_{12}(q) = r_{12}(0) + q\, r_{12}'(0) + \ldots$$

Нас интересуют не точные значения $r_{12}(0)$ и $r_{12}'(0)$, а лишь части, пропорциональные $\ln\alpha$. Так, для $r_{12}(0)$ имеем:

$$r_{12}(0) = \frac{1}{2 m_2^2 - \lambda^4} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_1^{m_1/m_2} \frac{2}{a^2 - y^2} \left[\frac{y+1}{y}(a-y) \right]^n dy .$$

Необходимо учесть лишь слагаемое с $n = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{(2 m_1^2 - \lambda^4)(2 m_2^2 - \lambda^4)}} \ln \left| \frac{2 m_1 m_2 + \lambda^4 + \sqrt{(2 m_1^2 - \lambda^4)(2 m_2^2 - \lambda^4)}}{2 m_1 m_2 + \lambda^4 - \sqrt{(2 m_1^2 - \lambda^4)(2 m_2^2 - \lambda^4)}} \right| . \tag{Б.44}$$

Вычисляя $r_{12}'(0)$:

$$r_{12}'(0) = \frac{1}{2 m_2^2 - \lambda^4} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \int_1^{m_1/m_2} \frac{2}{a^2 - y^2} \left(\frac{y+1}{y} \right)^n (a-y)^{n-1} dy ,$$

мы оставим член с $n = 1$. После интегрирования и умножения на q получим:

$$q\, r_{12}'(0) = -\frac{1}{6 \tau m_1 m_2} \left(\frac{s - M^2}{M} + \frac{\lambda^4}{2m} \right) \left[\frac{1}{m_2} \ln\left(\frac{4 \tau m^2}{\lambda^4} \right) + \frac{1}{m_1} \ln\left(\frac{m_1^2 \tau}{\lambda^4} \right) \right] + O(1). \tag{Б.45}$$

Окончательно:

$$r_{12}(s,t) = -\frac{1}{t m_1 m_2} \ln \left| \frac{4 t m^2}{\lambda^4} \right| + \frac{1}{6 t m_1 m_2} \left(\frac{s - M^2}{M} - \frac{\lambda^4}{t m} \right) \left[\frac{1}{m_1} \ln \left| \frac{t m_1^2}{\lambda^4} \right| + \frac{1}{m_2} \ln \left| \frac{4 t m_2^2}{\lambda^4} \right| \right] +$$
$$+ O(1). \tag{Б.46}$$

Возвращаясь к $h(s, s_0), k(s, t, s_0)$ и имея в виду определение (Б.34) функции r_1, находим

$$h(s, s_0) = -\frac{16 \pi \alpha^2 (s - s_0)}{\sqrt{\Delta(s, m_1^2, m_2^2) + 4 s \lambda^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Delta(s, m_1^2, m_2^2) + 4 s \lambda^2}{-\Delta(s, m_1^2, m_2^2)}} + 4\alpha^2 \frac{s - s_0}{m_1 m_2} \ln\left(\frac{4 m^2}{\lambda^2} \right) + O(\alpha^2) =$$

$$= -\frac{16 \pi \alpha^2 (s - s_0)}{\sqrt{\Delta(s, m_1^2, m_2^2) + 4 s \lambda^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Delta(s, m_1^2, m_2^2) + 4 s \lambda^2}{-\Delta(s, m_1^2, m_2^2)}} + 8 \alpha^2 \ln \alpha^{-2} + O(\alpha^2). \tag{Б.47}$$

$$k(s,t,s_0) = -\frac{4\pi\alpha^2(s-s_0)^2}{t\sqrt{s|b^2(s)|}}\frac{1}{\sigma(s,t)}\ln\frac{\sigma(s,t)+1}{\sigma(s,t)-1} + \frac{4\alpha^2(s-s_0)^2}{t\,m_1 m_2}\Big\{\ln\left|\frac{4tm^2}{\lambda^4}\right| -$$

$$-\frac{1}{t\,m}\left(\frac{s-M^2}{\lambda t} - \frac{\lambda^4}{tm}\right)\ln\left|\frac{4tm^2}{\lambda^4}\right|\Big\} + O(\alpha^2) \qquad (Б.48)$$

4. <u>Функции $h(u,u_0)$ и $k(u,t,u_0)$</u>. Способ вычислении этих функций по существу не отличается от использованного в предыщем пункте. Начиная с интеграла (Б.34) от аргументов $u, t, u=(m_1-m_2)^2+a_1$ мы приходим к

$$r_1(u,t) = \int_0^\infty 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{u-s_2(x)}{s_1(x)-u}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(s_1(x)-u)(u-s_2(x))}}\,\frac{dx}{x(x-t)}\,. \qquad (Б.49)$$

Далее подставляем разложение (Б.38) и делаем замену (Б.39):

$$r_1(u,t) = \frac{1}{2m_2^2\lambda^4}\sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_1^{m_1/m_2}\frac{2}{a^2 y^2}\left[\frac{y-1}{y}(a\,y+q)\right]^n,\quad z=-t>0, \qquad (Б.50)$$

где a даётся (Б.42) и, кроме того:

$$d_n = (-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left[\frac{u-m_1^2+m_2^2}{4(m_1^2-m_2^2)}\right]^n, \qquad (Б.51)$$

$$q = -\left(a + \frac{u+m_1^2-m_2^2}{u-m_1^2+m_2^2}\right). \qquad (Б.52)$$

Последнее выражение для q может быть преобразовано к виду

$$q = \frac{1}{2m}\frac{m_1}{m_2}\frac{1}{m_1-m_2}\left[\delta u - \frac{\lambda^4}{2}\frac{(m_1-m_2)^2}{2m_1m_2}\right] + o(\alpha^3),\quad \delta u = u-(m_1-m_2)^2, \qquad (Б.53)$$

т.е. q имеет порядок α^2. Мы опять рассмотрим r_1 как функции q в окрестности нуля и запишем разложение

$$r_1(q) = r_1(0) + q\,r_1'(0) + \ldots$$

Сохраняя лишь члены, пропорциональные $\ln\alpha$, мы найдём, что их вклад в $\Gamma_1(0)$ — это

$$\frac{1}{\sqrt{(2m_1^2-\lambda^2)(2m_2^2-\lambda^2)}}\ln\frac{2m_1m_2+\lambda^2+\sqrt{(2m_1^2-\lambda^2)(2m_2^2-\lambda^2)}}{2m_1m_2+\lambda^2-\sqrt{(2m_1^2-\lambda^2)(2m_2^2-\lambda^2)}}\,,\quad z=-t, \tag{Б.54}$$

а вклад в $\Gamma_1'(0)$ равен

$$\frac{1}{6zm_1m_2}\frac{1}{Mm}\left[\delta u-\frac{\lambda^2}{2}\frac{(m_1-m_2)^2}{m_1m_2}\right]\ln\left(\frac{4zm^2}{\lambda^2}\right)+O(1),\ z=-t. \tag{Б.55}$$

Складывая (Б.54) и (Б.55) и возвращаясь к $h(u,u_0)$ и $k(u,t,u_0)$, находим:

$$h(u,u_0)=-\frac{4\alpha^2(u-u_0)}{m_1m_2}\ln\left(\frac{4m^2}{\lambda^2}\right)+O(\alpha^2)=8\alpha^2\ln\alpha^{-2}+O(\alpha^2), \tag{Б.56}$$

$$k(u,t,u_0)=-\frac{4\alpha^2(u-u_0)}{t\,m_1m_2}\left\{1+\frac{1}{6m}\left[\frac{u-(m_1-m_2)^2}{M}+\frac{\lambda^2}{tm}\frac{(m_1-m_2)^2}{M^2}\right]\ln\left(\frac{4tm^2}{\lambda^2}\right)+\right.$$
$$\left.+O(\alpha^2)\right. . \tag{Б.57}$$

<u>5. Постоянная $f_0=T_{2\gamma}(s_0,t_0,u_0)$</u>. Согласно равенству (3.28) нужно подсчитать интеграл

$$f_0=4\alpha^2\sum_{i=1}^{2}\int_0^{4\tau_i}\left\{\frac{1}{2}-\left[2(x-2m_i^2)+5\lambda^2\right]F(x,m_i^2,\lambda^2)\right\}\frac{dx}{x-t_0}\,, \tag{Б.58}$$

где $t_0=-2\lambda^2$, $\tau_i=m_i^2-\lambda^2$. Подставляя сюда явный вид $F(x,m_i^2,\lambda^2)$ из (3.15а), мы приходим к выражению

$$f_0=2\alpha^2\sum_{i=1}^{2}\ln\left(\frac{4\tau_i}{-t_0}\right)+\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda^2-4m_i^2}{4\tau_i}\varphi_i^{I}(-2\lambda^2)-$$
$$-8\alpha^2\sum_{i=1}^{2}\int_0^{4\tau_i}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x(4\tau_i-x)}}{x+2\lambda^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{x(4\tau_i-x)}}\,. \tag{Б.59}$$

где $\varphi_i^{I}(-2\lambda^2)$ даётся формулой (Б.2I) (в переменных τ_i вместо τ). Рассмотрим отдельно интеграл

$$Y = \int_0^{4\tau} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x(4\tau - x)}}{x + 2\lambda^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{x(4\tau - x)}} . \tag{Б.60}$$

Подстановкой

$$x = \frac{4\tau}{1 + y^2}, \quad 0 \le y \le \infty$$

мы получим

$$Y = 2\int_0^{\infty} \operatorname{arctg} y \frac{dy}{1+y^2} - 2\int_0^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{z_0 y}{1+z_0}\right)\frac{dy}{1+y^2} = \tag{Б.6I}$$
$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\, I\left(\frac{z_0}{1+z_0}\right),$$

где $z_0 = \frac{\lambda^2}{2\tau}$, а $I(\xi)$ определено равенством (Б.I3). Используя, далее, приближение (Б.I5) для I при малых значениях аргумента и подставляя в правую часть (Б.59), находим:

$$f_0 = \frac{4\pi^2\alpha^2\lambda_1}{\sqrt{-t_0}} - 6\sum_{i=1}^{2} \ln\left(\frac{4m_i^2}{-t_0}\right) + O(\alpha^2). \tag{Б.62}$$

Теперь, складывая вместе (Б.28), (Б.30), (Б.47),(Б.48) и (Б.62), мы получим следующее выражение для $T_{2\gamma}(s,t,u)$:

$$T_{2\gamma}(s,t,u) = \frac{4\pi^2\alpha^2\lambda_1}{\sqrt{-t}} + \frac{8}{3}\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)^2 \alpha^2 \ln \alpha^{-2} - 4\alpha^2 \ln \alpha^{-2} + 16\alpha^2 \frac{t_0}{t} \ln \alpha^{-2} +$$
$$+ \frac{4\pi\alpha^2(s-s_0)^2}{t\sqrt{s|\sigma^2(s)|}} \frac{1}{\sigma(s,t)} \ln\frac{\sigma(s,t)-1}{\sigma(s,t)+1} - \frac{8\pi\alpha^2(s-s_0)}{\sqrt{s(\sigma^2(s)+\lambda^2)}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\sigma^2(s)+\lambda^2}{-\sigma^2(s)}} + O(\alpha^4) \tag{Б.63}$$

$t = -(p-q)^2$. Здесь мы явно учли то обстоятельство, что согласно замечанию в конце § 2, члены типа $\ln\left(\frac{4m_i^2}{-t_0}\right)$ имеют порядок $\ln \alpha^{-2} + O(1)$.

ДОПОЛНЕНИЕ В.

Мнимая часть вершинных диаграмм. Вычисление дисперсионного интеграла

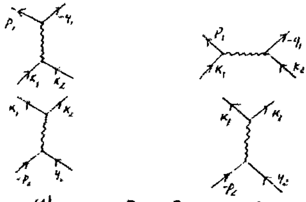
Для нахождения скачка вершинной части T_Γ (4.8) на разрезах от $4m_i^2$ до ∞ мы снова будем исходить из условия унитарности (А.I) в t- канале. При этом в сумме $\sum\limits_n$ по промежуточным состояниям теперь мы будем удерживать двухчастичные состояния частиц типа I и 2 (с импульсами k_1 , k_2). Это сводит суммирование в правой части (А.I) к операции

$$\sum_n \to \sum_{i=1}^{2} \int (dk_1)_{m_i} (dk_2)_{m_i} ,$$

где (В.I)

$$(dk)_{m_i} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{2\sqrt{k^2+m_i^2}} \qquad (i=1,2)$$

Когда в промежуточном состоянии находятся две частицы с массами m_i допустимые амплитуды $T(k_1,k_2,\dots)$ при фиксированном t во втором порядке по e – это борновские амплитуды рассеяния (см. рис. 3).



(а) Рис. 3. (б)

Подставляя их в правую часть условия унитарности (А.I), в котором суммирование проводится согласно (В.I), мы получим

$$i(2\pi)^4 e^4 \sum_{i=1}^{2} \int (dk_1)_{m_i} (dk_2)_{m_i}\, \delta(p_1-q_1-k_1-k_2)\Big[\frac{(q_1-p_1+2k_1)(p_1+q_1)}{t}\,\frac{(q_1-p_1+2k_2)(p_1+q_1)}{t} +$$

$$+\frac{(k_1+p_1\;\; q_1+q_1)(k_1+p_1)}{(p_1-k_1)^2}\,\frac{(p_1+q_1)(2k_1+q_1-p_1)}{t}\Big]. \qquad (\text{В}.2)$$

В левой же части условия унитарности запишем амплитуду однофотонного обмена в общем виде

$$T(p_1,-q_1;-p_2,q_2)=\Gamma_\mu^{(1)}(p_1,-q_1)\Gamma_\nu^{(2)}(-p_2,q_2)\frac{g^{\mu\nu}}{t}[\mathcal{D}_1(t)+\mathcal{D}_2(t)]. \quad (B.3)$$

Здесь вершинная функция $\Gamma_\mu^{(i)}$ i - ой частицы даётся выражением

$$\Gamma_\mu^{(i)}(p,q)=e_i(p-q)_\mu F_i(t). \quad (B.4)$$

Наша задача - нахождение скачка на разрезе от $4m_i^2$ до ∞ формфактора $F_i(t)$ $(i=1,2)$. Функции $\mathcal{D}_i(t)$ связаны с формфакторами $P_i(t)$ (см. (4.2) и (4.3)) соотношением

$$\mathcal{D}_i(t)=1+P_i(t) \quad (i=1,2). \quad (B.5)$$

(см., например,/I2/ § 100 и § 101) . Мы увидим как знание мнимой части $P_i(t)$ облегчит нахождение мнимой части $F_i(t)$. Для этой цели сперва удобно представить F_i в виде

$$F_i(t)=1+\alpha V_i(t) \quad (i=1,2). \quad (B.6)$$

В последнем равенстве мы учли, что при $\alpha\to 0$ $F_i(t)$ переходит в обычный, "голый", вертекс скалярной частицы и что низшие радиационные поправки пропорциональны α . Тогда

$$T(p_1,-q_1;-p_2,q_2)-\overline{T}(-p_2,q_2;p_1,-q_1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\frac{e^2}{t}(p_1+q_1)(p_2+q_2)[F_i(t)\mathcal{D}_i(t)-\overline{F}_i(t)\overline{\mathcal{D}}_i(t)]. \quad (B.7)$$

Поэтому левая часть условия унитарности с точностью до e^4 имеет вид

$$\frac{2i}{t}e^2(p_1+q_1)(p_2+q_2)\sum_{i=1}^{2}[\alpha\,\mathrm{Im}\,V_i(t)+\mathrm{Im}\,P_i(t)] \quad (B.8)$$

Приравнивая (B.8) и (B.2) при фиксированном i находим

$$\operatorname{Im} P_i(t) + \alpha \operatorname{Im} V_i(t) = \frac{\pi\alpha}{3}\left(\frac{t-4m_i^2}{t}\right)^{3/2} - \pi\alpha\,\frac{t-2m_i^2+\lambda^2}{t-4(m_i^2-\lambda^2)}\sqrt{\frac{t-4m_i^2}{t}}\,\times$$

$$\times\left\{1+\frac{4m_i^2-(t+2\lambda^2)}{2\sqrt{(t-4m_i^2)[t-4(m_i^2-\lambda^2)]}}\ln\frac{t-4m_i^2+2\lambda^2+\sqrt{(t-4m_i^2)[t-4(m_i^2-\lambda^2)]}}{t-4m_i^2+2\lambda^2-\sqrt{(t-4m_i^2)[t-4(m_i^2-\lambda^2)]}}\right\}. \tag{B.9}$$

В первом члене в правой части (B.9) мы узнаем мнимую часть функции $P_i(t)$. Следовательно, в низшем приближении по α мнимая часть вершинной функции $V_i(t)$ имеет вид

$$\operatorname{Im} V_i(t) = -\pi\,\frac{t-2m_i^2+\lambda^2}{t-4\tau_i}\sqrt{\frac{t-4m_i^2}{t}}\,\times$$

$$\times\left\{1+\frac{4m_i^2-(t+2\lambda^2)}{2\sqrt{(t-4m_i^2)(t-4\tau_i)}}\ln\frac{t-4m_i^2+2\lambda^2+\sqrt{(t-4m_i^2)(t-4\tau_i)}}{t-4m_i^2+2\lambda^2-\sqrt{(t-4m_i^2)(t-4\tau_i)}}\right\}, \tag{B.10}$$

где $\tau_i = m_i^2-\lambda^2$ $(i=1,2)$. Отсюда и из (B.6) получаем для $F_i(t)$ следующее дисперсионное соотношение с одним вычитанием

$$F_i(t) = 1+\frac{\alpha t}{\pi}\int\limits_{4m_i^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} V_i(x)\,dx}{x(x-t-i0)} \qquad (i=1,2). \tag{B.11}$$

Пользуясь (B.4), (B.11) и (B.5), можно представить амплитуду (B.3) в виде суммы двух поляризационных диаграмм на рис. 2а) и б) и суммы двух вершинных диаграмм в) и г) рис. 2. Уже было установлено, что вклад поляризации вакуума в поправку уровней энергии порядка α^5. Поэтому мы оставим в выражении (B.3) для амплитуды с однофотонным обменом лишь поправку к борновскому члену, связанную с вершинными диаграммами в) и г). Обозначая эту поправку через $T_r(s,t)$, мы имеем:

$$T_r(s,t) = \alpha\frac{2(s-s_0)+t-t_0}{t}\frac{\alpha t}{\pi}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{4m_i^2}^{\infty}\frac{\Im_{m}V_i(x)}{x(x-t)}dx,\quad t<0, \tag{B.12}$$

где $\Im_m V_i(x)$ даётся равенством (B.10). Правая часть (B.12) со знаком минус даёт вклад в квазипотенциал.

Перейдём к приближенному вычислению (при $t\sim\lambda^2$ в единицах (2.13)) $T_r(s,t)$. Сначала рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}_1(t,m_i^2,\tau) = \int\limits_{4m_i^2}^{\infty}\frac{x-(2m_i^2-\lambda^2)}{x-4\tau}\sqrt{\frac{x-4m_i^2}{x}}\,\frac{dx}{x(x-t)}, \tag{B.13}$$

где $\tau = m_i^2-\lambda^2$. Подстановкой

$$y=\sqrt{\frac{x-4m_i^2}{x}},\quad 0\le y\le 1,$$

можно привести $\mathcal{J}_1$ к виду

$$\mathcal{J}_1(t,m_i^2,\tau) = 2\int\limits_0^1 y^2\frac{2m_i^2+\lambda^2+y^2(2m_i^2-\lambda^2)}{(4\lambda^2+4\tau y^2)(4m_i^2-t+ty^2)}dy$$

и после несложных преобразований получить

$$\mathcal{J}_1(t,m_i^2,\tau) = \frac{2m_i^2-\lambda^2}{2m_i^2(t-4\tau)}\left[\frac{m_i^2}{\tau}\frac{t-4\tau}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{2m_i^2+\lambda^2}{2m_i^2-\lambda^2} - \frac{4m_i^2-t}{t}\right)\sqrt{\frac{4m_i^2-t}{t}}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\left|\frac{\sqrt{4m_i^2-t}+\sqrt{-t}}{\sqrt{4m_i^2-t}-\sqrt{-t}}\right| + \sqrt{\frac{\lambda^2}{\tau}}\left(\frac{2m_i^2+\lambda^2}{2m_i^2-\lambda^2} - \frac{\lambda^2}{\tau}\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\tau}{\lambda^2}}\ \right]. \tag{B.14}$$

При малых α правая часть ведёт себя как

$$\mathcal{J}_1(t,m_i^2,\tau) = \frac{1}{3m_i^2}+o(\alpha) \tag{B.15}$$

и на основании (B.12) следует, что $\sum_{i=1}^{2}\mathcal{J}_1(t,m_i^2,\tau_i)$ даст в T_r вклад порядка α^2, т.е. поправка в уровни энергии – порядка α^5.

Нужно ещё вычислить интеграл вида

$$f_2(t,m^2,\tau)=\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{x-(2m^2-\lambda^2)}{x-4\tau}\sqrt{\frac{x-4\tau}{x}}\cdot\frac{4m^2-2\lambda^2-x}{2\sqrt{(x-4m^2)(x-4\tau)}}\ln\left(\frac{\sqrt{x-4m^2}+\sqrt{x-4\tau}}{\sqrt{x-4m^2}-\sqrt{x-4\tau}}\right)^2\frac{dx}{x(x-t)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{x-(2m^2-\lambda^2)}{x-4\tau}\,\frac{x-4\tau-2\lambda^2}{\sqrt{x(4\tau-x)}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x-4\tau}{x-4m^2}}}{1-\sqrt{\frac{x-4\tau}{x-4m^2}}}\right)^2\frac{dx}{x(x-t)}. \qquad (В.16)$$

Аргумент логарифма в правой части (В.16) получается простым алгебраическим преобразованием из аргумента логарифма в правой части (В.10) (m_i^2 и τ_i заменяются на m^2 и τ). В интеграле, задающем f_2, делаем подстановку

$$y=\sqrt{\frac{x-4\tau}{x}}\,,\qquad \varepsilon\le y\le 1,$$

где, по определению

$$\varepsilon=\frac{\lambda}{m} \qquad (В.17)$$

– величина порядка α. После некоторых преобразований получаем

$$f_2(t,m^2,\tau)=-\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{1-\frac{2m^2-\lambda^2}{4\tau}(1-y^2)}{4\tau-t(1-y^2)}\left[y^2-\frac{\lambda^2}{2\tau}(1-y^2)\right]\times$$

$$\times\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\tau}}{m}\frac{y}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}}{1-\frac{\sqrt{\tau}}{m}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}}\right)^2\frac{dy}{y^2}. \qquad (В.18)$$

Логарифм в последнем равенстве преобразуем следующим образом:

$$\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\tau}}{m}\frac{y}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}}{1-\frac{\sqrt{\tau}}{m}\frac{y}{\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}}\right)^2=4\ln\left(\frac{y}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{y^2}{\varepsilon^2}-1}\right)+2\ln\left(1-\frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{y}{y-\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}\right)-$$

$$-2\ln\left[1-\frac{1}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,y\left(y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}\right)\right]=$$

$$=4\left[\ln\frac{2y}{\varepsilon}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^{2n}\right]-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n\left(\frac{y}{y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}\right)^n- \qquad (В.19)$$

$$-2\ln\left(1-y\,\frac{y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right).$$

Отметим, кроме того, что множитель

$$\frac{1}{4\tau - t(1-y^2)}\left[1-\frac{2m^2\lambda^2}{4\pi}(1-y^2)\right]\left[y^2-\frac{\lambda^2}{2\tau}(1-y^2)\right]$$

в подинтегральной функции в (В.18) при $t \sim \alpha^2$ представляется в виде

$$P_3(y^2)+o(\alpha^2),$$

где $P_3(z)$ - многочлен третьей степени.

Оставляя пока в стороне член $4\ln\left(\frac{2y}{\varepsilon}\right)$ в разложении (В.19), рассмотрим вклад следующего члена в интеграл (В.18):

$$-4\int_{\varepsilon}^{1}\left[P_3(y^2)+o(\alpha^2)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\frac{\varepsilon^{2n}}{y^{2n}}\frac{dy}{y^2}. \tag{В.20}$$

Здесь мы встречаем интегралы вида

$$I_n=\int_{\varepsilon}^{1}\left[P_3(y^2)+o(\alpha^2)\right]\frac{\varepsilon^{2n}}{y^{2n}}\frac{dy}{y^2}, \quad n\geq 1. \tag{В.21}$$

Запишем P_3 как

$$P_3(y^2)=a_0y^6+a_1y^4+a_2y^2+a_3, \tag{В.22}$$

где, в частности, $a_3=-\frac{\lambda^2}{2\tau}\left(1-\frac{2m^2\lambda^2}{4\tau}\right)$, т.е. a_3 порядка α^2. Подставляя (В.22) в (В.21), находим:

$$I_n=\frac{a_2}{2n-1}\varepsilon+\frac{a_3}{2n+1}\frac{1}{\varepsilon}+o(\alpha)$$

Поскольку $\varepsilon \sim \alpha$ и $a_3 \sim \alpha^2$, то I_n порядка α и его вклад в T_r будет порядка α^3. Поэтому мы отбрасываем член (В.20).

Третье слагаемое в правой части равенства (В.19) после подстановки в β_2 даёт

$$2\int_{\varepsilon}^{1}\left[P_3(y^2)+o(\alpha^2)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n\left(\frac{y}{y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}\right)^n\frac{dy}{y^2}. \tag{В.23}$$

Подставляя $\wp_3$ из (B.22) в выражение для подинтегральной функции, находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n\left(\frac{y}{y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}\right)^n\left[\frac{a_3}{y^2}+a_2+a_1y^2+a_0y^4+c(\lambda^2)\right]$$

При $\lambda\to 0$ имеем $\varepsilon\to 0$, нижний предел интегрирования стремится к 0 и единственный сингулярный член есть $\frac{a_3}{y^2}$. Оценим его вклад в интеграл (B.23):

Подстановкой

$$x=\sqrt{\frac{y-\varepsilon}{y+\varepsilon}},\quad 0\le x\le x_1,$$

где

$$x_1=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}<1, \tag{B.24}$$

мы приходим к

$$\frac{8a_3}{\varepsilon}\int_0^{x_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{2n}}{n(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^n}\,\frac{(1+x^2)^n}{(1+x)^{2n}}\,\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{8a_3}{\varepsilon}x_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n\int_0^1\frac{(1+x_1^2)^n}{(1+x)^{2n}}\,\frac{x\,dx}{(1+x_1^2x^2)^2}.$$

Полученный интеграл не имеет особенностей в пределе $\varepsilon\to 0\ (\lambda\to 0)$. Поскольку фактор $\frac{8a_3}{\varepsilon}x_1^2$ – величина порядка α, как в предыдущем случае, мы получим отсюда вклад порядка α^k в собственные значения. Поэтому мы опустим этот член в дальнейшем.

Оставшиеся первый и последний члены в разложении логарифма (B.19) мы группируем в сумму:

$$2\ln\left(\frac{y^2}{1-y\,\frac{y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}}\right)+2\ln\frac{4}{\varepsilon^2}. \tag{B.25}$$

Первое слагаемое даёт вклад в $f_2(t,m^2,\tau)$, равный

$$2\int_{\varepsilon}^{1}[P_3(y^2)+c(\alpha^2)]\ln\left[\frac{1}{y^2}\left(1-y\frac{y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)\right]\frac{dy}{y^2}.$$

Опять рассматриваем часть подинтегральной функции с особенностью при $\varepsilon\to 0$:

$$2a_1\int_{\varepsilon}^{1}\ln\left[\frac{1}{y^2}\left(1-y\,\frac{y+\sqrt{y^2-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)\right]\frac{dy}{y^2}. \tag{B.26}$$

После замены

$$y=\varepsilon\,\frac{1+x^2}{1-x^2},\quad 0<x<x_1,$$

где x_1 определено через (B.24), для интеграла (B.26) получается выражение:

$$\frac{8a_1}{\varepsilon}\int_0^{x_1}\ln\left[\frac{(1-x^2)^2-\varepsilon^2(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{-1}(1+x^2)(1+x)^2}{(1+x^2)^2}\right]\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}-\frac{8a_1}{\varepsilon}\ln\varepsilon^2\int_0^{x_1}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

Первый член здесь порядка α, второй – порядка $\alpha\ln\alpha$ и вклад обоих в поправку к уровням энергии – величина порядка α^6, т.е. он несущественен в нашем приближении.

Нам осталось рассмотреть вклад второго члена в (B.25) в интеграл $f_2(t,m^2,\tau)$:

$$2\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{\varepsilon}^{1}\left[1-\frac{2m^2-\lambda^2}{4\tau}(1-y^2)\right]\left[y^2-\frac{\lambda^2}{2\tau}(1-y^2)\right]\frac{dy}{y^2[4\tau-t(1-y^2)]}=$$

$$=2\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{4\tau-t(1-y^2)}\left[1-\frac{2m^2-\lambda^2}{4\tau}(1-y^2)\right]dy- \tag{B.27}$$

$$-\frac{\lambda^2}{\tau}\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{\varepsilon}^{1}\left[1-\frac{2m^2-\lambda^2}{4\tau}(1-y^2)\right]\frac{1-y^2}{4\tau-t(1-y^2)}\,\frac{dy}{y^2}.$$

Для первого интеграла в правой части (В.27) имеем (при $t, \lambda^2 \sim \alpha^2$):

$$2\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left[\frac{2m^2-3\lambda^2}{4\tau}\,\frac{1-\varepsilon}{4\tau}+\frac{1}{3}\,\frac{1-\varepsilon^3}{4\tau}\,\frac{2m^2\lambda^2}{4\tau}\right]+$$

$$+\frac{2t}{(4\tau)^2}\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{\varepsilon}^{1}(1-y^2)\left(\frac{4\tau-2m^2+\lambda^2}{4\tau}+y^2\,\frac{2m^2-\lambda^2}{4\tau}\right)dy+o(\alpha).$$

Для нашей точности необходим лишь член

$$2\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left[\frac{2m^2-3\lambda^2}{4\tau}\,\frac{1-\varepsilon}{4\tau}+\frac{1}{3}\,\frac{1-\varepsilon^3}{4\tau}\,\frac{2m^2\lambda^2}{4\tau}\right]=\frac{1}{3m^2}\ln\left(\frac{\lambda^2}{4m^2}\right)+\Delta \qquad (В.28)$$

где Δ - величина, пропорциональная $\alpha\ln\alpha$, т.е. дающая вклад $\sim \alpha^3\ln\alpha$ в T_r', так, что ей можно пренебречь. У второго интеграла в правой части (В.27) тоже нет вклада в собственные значения до порядка α^5. Действительно, при малых $t\sim\alpha^2$ мы представляем его в виде

$$-\frac{\lambda^2}{\tau}\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{\varepsilon}^{1}\left[Q_2(y^2)+o(\alpha^2)\right](1-y^2)\frac{dy}{y^2}=$$

$$=-\frac{\lambda^2}{\tau}\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{\varepsilon}^{1}\left[Q_2(y^2)+o(\alpha^2)\right]\frac{dy}{y^2}+\frac{\lambda^2}{\tau}\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int_{\varepsilon}^{1}\left[Q_2(y^2)+o(\alpha^2)\right]dy, \qquad (В.29)$$

где $Q_2(z)$ - многочлен второй степени:

$$Q_2(z)=b_0z^2+b_1z+b_2.$$

Только первое слагаемое в правой части (В.29) имеет особенность при $\varepsilon\to 0$:

$$-\frac{\lambda^2}{\tau}b_2\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\cdot\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dy}{y^2}=\frac{\lambda^2}{\tau}b_2\cdot\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\ln\frac{\varepsilon^2}{4},$$

а это величина порядка $\alpha\ln\alpha$, и мы её опустим.

Имея в виду определения (В.13) и (В.16) интегралов J_1 и J_2 и явный вид (В.10) для $\operatorname{Im}V_i(x)$, находим для $T_r'(s,t)$:

$$T_r(s,t) = -\alpha^2\left[2(s-s_0)+t-t_0\right]\sum_{i=1}^{2}\left[\beta_1(t,m_i^2,\tau_i)+\beta_2(t,m_i^2,\tau_i)\right]. \qquad (B.30)$$

Отбрасывая ненужные члены в β_1 и β_2 получаем:

$$T_r(s,t) = \frac{16\alpha^2}{3} m_1 m_2 \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{m_i^2}\ln\left(\frac{\lambda^2}{4m_i^2}\right) + o(\alpha^2) \qquad (B.31)$$

Рукопись поступила в издательский отдел
II июля 1973 года.

Литература

1. I.T.Todorov. Quasipotential equation corresponding to the relativistic eikonal approximation, Phys.Rev., D3, 2351 (1971).
2. I.T.Todorov. Quasipotential approach to the two-body problem in quantum field theory. Lecture presented at the International School of Subnuclear Physics " Etore Majorana", Erice, Sicily, July 1971. International Centre for Theoretical Physics, preprint IC/71/75, Miramare-Trieste (1971).
3. A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze, Quasioptical approach in quantum field theory, Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
4. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov and O.A.Khrustalev, Quasipotential character of the scattering amplitude, Nuovo Cim., 30, 134 (1963).

5. G.W.Erickson and D.R.Yennie. Radiative level shifts, Ann. Phys. (N.Y.) 35, 271 (1965).
6. Р.Н.Фаустов. Уровни энергии и электромагнитные свойства водородоподобных атомов, ЭЧАЯ 3, 238 (1972).

7. Г.Бете и Э.Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, Москва, Физматгиз, 1960.

8. F.Rohrlich. Quantum electrodynamics of charged particles without spin, Phys.Rev., 80, 666 (1950).
9. R.E.Cutkosky. Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes, J.Math.Phys., 1, 429 (1960).
10. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Москва, Изд-во иностр.лит., 1963.
11. T.Fulton and P.C.Martin. Two-body system in quantum electrodynamics. Energy levels of positronium. Phys.Rev., 95, 811 (1954).
H.Grotch and D.R.Yennie. Effective potential model for calculating nuclear corrections to the levels of hydrogen, Rev.Mod.Phys., 41, 350 (1969).
12. Е.М.Лифшиц и Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, часть 2, Москва, "Наука", 1971.