СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7271

В.Б.Семикоз, Я.А.Смородинский, Г.Н.Шепелев

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7271

В.Б.Семикоз, Я.А.Смородинский, Г.Н.Шепелев

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

I. Введение

Релятивистский газ заряженных частиц с кулоновским взаимодействием рассматривался многими авторами (см.,например[1,2]). В этих работах соответствующие кинетические уравнения линеаризуются обычно в предположении близости функций распределения к равновесным максвелловским.

Здесь рассматривается случай произвольных функций распределения, пригодный для рассмотрения нестационарных неравновесных процессов в разреженном газе с произвольным числом столкновений. Система считается при этом незамкнутой (наличие внешних полей). При этих предположеньях для решения кинетических уравнений нельзя использовать метод Чепмена-Энскога[3], так как для конечных промежутков времени число столкновений может теперь быть малым. В этом случае в кинетике газов используют метод разложения кинетического уравнения по некоторому полному набору ортонормированных функций.

При выборе полной системы базисных функций естественно учитывать инвариантные свойства кинетического уравнения. Рассмотрим релятивистское кинетическое уравнение (Р.К.У)$^{x)}$

$$\frac{\partial f(x,\vec{p})}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial f(x,\vec{p})}{\partial \vec{x}} + e\left[\vec{E} + (\vec{v}\times\vec{H})\right]\frac{\partial f(x,\vec{p})}{\partial \vec{p}} = \frac{J_{coll}(x,\vec{p})}{p_0}, \qquad (1)$$

где $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p_0}$, e – заряд частицы, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – электрическое и магнитное поля соответственно,

$$J_{coll}(x,\vec{p}) = \int \frac{d^3q}{q_0}\left[(pq)^2 - m^2M^2\right]^{\frac{1}{2}} d\sigma \left\{ f(\vec{p}\,')f'(\vec{q}\,') - f(\vec{p})f'(\vec{q}) \right\} \qquad (2)$$

$^{x)}$Используется система единиц $c = 1$ (c – скорость света в вакууме).

– ковариантный интеграл произвольных упругих столкновений [4/] рассматриваемых частиц с массой покоя m_0 с частицами массы M_0, распределение которых $f'(\vec{q})$ удовлетворяет уравнению типа (I), $pq = p_0 q_0 - \vec{p}\vec{q}$, $d\sigma$ - сечение рассеяния. Так как уравнение (I) инвариантно относительно группы 3-мерных вращений $O(3)$, функцию распределения удобно раскладывать по шаровым функциям $Y_{\ell m}$ [/5/], просто связанным с матричными элементами неприводимых представлений $O(3)$:

$$f(x,\vec{p}) = \sum_{\ell m} f_{\ell m}(p_0, x)\, Y_{\ell m}(\vec{p}/|\vec{p}|) \;. \tag{3}$$

Кинетическое уравнение (I) можно переписать в ковариантном в плоской метрике виде

$$p_\mu \frac{\partial f(x,\vec{p})}{\partial x_\mu} + e\left[E_k + (\vec{v}\times\vec{H})_k\right] p_0 \frac{\partial f}{\partial p_k} = J_{coll}(x,\vec{p}) \,. \tag{I^{1}}$$

Теперь можно заметить, что часть силового члена в (I^1), связанная с магнитным полем, при выборе поля, например, вдоль оси Z, может быть представлена в виде $eH_z M_z f(\vec{p})$, где M_z -генератор порождающий вращения вокруг оси Z. Результат действия M_z на $Y_{\ell m}$ хорошо известен, что позволяет легко отделить полный набор функций. В случае электрического поля это уже не так, и необходимо вычислить ещё производные по импульсной переменной $|\vec{p}|$. Таким образом, в случае использования разложения (3) возникает цепочка зацепляющихся ($\ell = 0, 1, ..$) уравнений, которую обрывают, используя приближённую изотропию распределения[x)], при этом гармоника $f_{00}(p_0, x)$

---

x) Так называемое гидродинамическое приближение. Отметим, что изотропия устанавливается раньше достижения многокомпонентной системой локального равновесия. Например, для двухкомпонентного газа с локальными максвелловскими анизотропными распределениями ($\vec{V}_{отн}(x) \neq 0$, температуры $\Theta_1(x) \neq \Theta_2(x)$) сначала происходит релаксация макроимпульса относительного движения (изотропизация) и лишь затем выравнивание температур.

необязательно является максвелловской. Однако из-за трудности учёта в процессе решения уравнений отдачи при столкновениях и изменения энергии в электрическом поле, как правило, рассматривают систему в удалённый момент времени /6/, когда в результате большого числа столкновений вслед за изотропизацией происходит максвеллизация газа, т.е.:

$$f_{00}(p_0,x)\Big/_{t\to\infty} \longrightarrow f_{\text{максвелл}} = A(\theta)n(x)e^{-p_0/\theta(x)} . \quad (4)$$

Здесь

$$A(\theta) = \frac{1}{4\pi m_0^2 \theta K_2(m_0/\theta)}$$ –нормировочный множитель,

$\theta(x) = \kappa T(x)$ – температура газа, $K_2(m_0/\theta)$ – функция Макдональда, $n(x)$ – плотность частиц. В этом случае, однако, метод решения совпадает с подходом Чепмена–Энскога, в котором ищут отклонение от функции (4).

Ниже предлагается другой способ решения кинетических уравнений, использующий инвариантность Р.К.У. (1^I) относительно специальной группы Лоренца $O(3,1)$. Метод основан на том факте, что дифференциальные операторы $p_0\frac{\partial}{\partial p_k}$ просто выражаются через генераторы $O(3,1)$ $\hat{K}_k$ на гиперболоиде $p_\mu p^\mu/m_0^2 = 1$, порождающие чисто лоренцевы преобразования – "бусты" :

$$i\hat{K}_k = p_0\frac{\partial}{\partial p_k} , \quad p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = m_0^2 .$$

Вместе с генераторами M_k группы $O(3)$ $\hat{K}_k$ образуют алгебру Ли $O(3,1)$. Таким образом, если разложить распределение $f(x,\vec{p})$ по образующим полную систему функций матричным элементам неприводимых представлений $O(3,1)$, результат действия на которые генераторами группы известен /7/, просто производится отделение в уравнении базисных функций с устранением трудностей вычисления производных по $|\vec{p}|$, причём электрическое и магнитное поля, в отличие от разложения (3), становятся теперь с этой точки зрения "равноправными".

При разложении распределений $f(x,\vec{p})$, рассматриваемых как функции на верхней полости двуполостного гиперболоида $p^2/m_0^2=1$, существенны условия их интегрируемости. По-видимому, все физические распределения удовлетворяют условию квадратичной интегрируемости относительно $O(3,1)$- инвариантной меры, т.е.

$$\int \frac{d^3p}{p_0} |f(x,\vec{p})|^2 < \infty . \qquad (5)$$

Так, например, для максвелловского распределения, записанного в системе покоя газа как целого (4), $f \sim exp(-p_0/\theta)$, и

$$\int \frac{d^3p}{p_0} exp\left(-\frac{2p_0}{\theta}\right) = 2\pi\theta m_0 K_1\left(\frac{2m_0}{\theta}\right) .$$

В отличие от разложения по матричным элементам неприводимых представлений $O(3)$, когда в разложение квадратично-интегрируемой функции входят все унитарные представления, $O(3,1)$- квадратично-интегрируемая функция разлагается не по всем унитарным представлениям $O(3,1)$, а лишь по представлениям основной серии[7].
В простейшем[x)] случае базис разложения имеет тогда вид[8]:

$$f_{\ell m \rho}(a,\theta,\varphi) = N(\ell,\rho)\, \frac{\mathcal{P}^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(ch\, a)}{\sqrt{sh\, a}}\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \qquad (6)$$

где нормировочный множитель

$$N(\ell,\rho) = \left|\frac{\Gamma(\ell-i\rho+1)}{\Gamma(1-i\rho)}\right| ,$$

x) Без учёта спина.

$$u_0 = \operatorname{ch} a,\ u_1 = \operatorname{sh} a \sin\theta\cos\varphi,\ u_2 = \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi,$$
$$u_3 = -\operatorname{sh} a \cos\theta,\quad 0 \leq \theta < \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq a < \infty,$$
$$u_r = p_r/m_0\ .$$

$$f(x,\vec{u}) = \sum_{lm} \frac{(-)^l}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho\, \Gamma(i\rho)\, a_{lm}(\rho,x)}{\Gamma(i\rho - l)\, N(l,\rho)}\, f_{lm\rho}(a,\theta,\varphi)\ .$$

Отметим, что формула (8) отличается от (3) дополнительным разложением коэффициентов $f_{lm}(p_0,x)$ по присоединенным функциям Лежандра, выделяющим зависимость распределения от энергии. Соотношение (8) является, таким образом, обобщением разложения (3), позволяющим точно учесть изменение энергии частиц. Переход к новой системе отсчёта можно выполнить с помощью теоремы сложения для функций (6)[9].

Если разложение левой части Р.К.У (I^{I}) (без столкновений) по базисным функциям (6) (см. раздел II работы) не требует никаких предположений о свойствах функции распределения, кроме общего требования (5), то разложение интеграла кулоновских столкновений в рассматриваемом ниже случае кулоновских взаимодействий частиц достигается при дополнительном условии сильной неравновесности системы, когда можно пренебречь наличием тепловых частиц или, эквивалентно, трением при столкновениях. При этих предположениях интеграл столкновений пропорционален оператору Лапласа на гиперболоиде, собственными функциями которого являются функции (6) (см. ниже формулу (I9)). Этому разложению посвящён раздел III данной работы. Там же рассмотрен альтернативный случай системы, содержащей равновесную часть, описываемую максвелловским распределением, и показано, что соответствующий вклад в интеграле столкновений разлагается только по парным функциям.

Такое различие в симметрии Р.К.У связано с тем, что максвелловский газ характеризуется 4-вектором Синджа $\xi_\mu(x)$ (см. ниже (16)), выделяющим систему отсчёта, связанную с "термостатом", что нарушает лоренц-инвариантность правой части Р.К.У – -интеграла столкновений рассматриваемых частиц с тепловыми частицами газа- "термостата".

В разделе IУ данной работы обсуждается вопрос о применимости гидродинамического приближения, позволяющего оборвать возникающую систему бесконечного числа зацепляющихся уравнений на первых моментах $\ell=0,1$. Там же показано преимущество способа разложения (8) в интерпретации изотропии распределения медленных частиц при малом числе столкновений.

В разделе У обсуждается техника решения возникающих конечно-разностных уравнений и сделаны некоторые выводы о применимости предлагаемого способа решения Р.К.У.

Наконец, в приложении даются основные формулы для функций (6).

П. Разложение бесстолкновительного Р.К.У. по базисным функциям $f_{\ell m p}(a,\theta,\varphi)$

Разложение левой части лоренц-инвариантного уравнения по функциям (6) осуществляется прямой подстановкой (8) в уравнение (I^{I}) .

При этом мы пользуемся известным результатом [7] действия операторов $p_0\frac{\partial}{\partial p_\kappa}$ на базисные функции (6). Приведём здесь окончательный результат:

$$\sum_{lm}\frac{(-)^l}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty\frac{\Gamma(i\rho)\rho^2 d\rho}{\Gamma(i\rho-l)N(l,\rho)}f_{lm\rho}(a,\theta,\varphi)\Big\{\Big\{\frac{A_{\rho+i,lm}(x)}{2}+\frac{B_{\rho-i,lm}(x)}{2}-$$

$$-\frac{iem}{m_0}H_z a_{lm}(\rho,x)+\frac{e}{m_0}\Big\{\frac{(i\rho-l-1)}{\sqrt{4(l+1)^2-1}}\Big[\frac{E_-}{2}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,a_{l+1\,m-1}(\rho,x)-$$

$$-\frac{E_+}{2}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,a_{l+1\,m+1}(\rho,x)+E_z\sqrt{(l+1)^2-m^2}\,a_{l+1\,m}(\rho,x)\Big]-$$

$$-\frac{(i\rho+l)}{\sqrt{4l^2-1}}\Big[\frac{E_-}{2}\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,a_{l-1\,m-1}(\rho,x)-\frac{E_+}{2}\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,a_{l-1\,m+1}(\rho,x)-$$

$$-E_z\sqrt{l^2-m^2}\,a_{l-1\,m}(\rho,x)\Big]\Big\}\quad\Big\}\Big\}=J_{coll}(x,\vec{p}), \qquad (9)$$

где однородное внешнее магнитное поле $\vec{H}=(0,0,H_z)$; $\vec{E}$ — электрическое поле и $E_\pm=E_x\pm iE_y$.

Неоднородный вклад (от члена $p_\nu\frac{\partial f(x,\vec{p})}{\partial x_\nu}$ в (I[I])):

$$A_{\rho+i,lm}(x)=\frac{(i\rho+l)}{\rho^2}\Big\{-(i\rho-l-1)\frac{\partial a_{lm}(\rho+i,x)}{\partial x_0}-\frac{(i\rho+l-1)}{\sqrt{4l^2-1}}\Big[\sqrt{l^2-m^2}\frac{\partial a_{l-1m}}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l-1\,m+1}(\rho+i,x)-\frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-$$

$$-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l-1\,m-1}(\rho+i,x)\Big]\Big\}-\frac{(i\rho-l-1)(i\rho-l-2)}{\rho^2\sqrt{4(l+1)^2-1}}\Big\{\sqrt{(l+1)^2-m^2}\frac{\partial a_{l+1m}(\rho+i,x)}{\partial z}+ \qquad (10)$$

$$+\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l+1\,m-1}(\rho+i,x)-\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l+1\,m+1}\Big\},$$

$$B_{\rho-i,lm}(x)=\frac{(\rho-i)}{\rho}\Big\{\frac{\partial a_{lm}}{\partial x_0}(\rho-i,x)-\sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}\frac{\partial a_{l-1m}}{\partial z}(\rho-i,x)-\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}\times$$

$$\times\frac{\partial a_{l+1m}(\rho-i,x)}{\partial z}+\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{4(l+1)^2-1}}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l+1\,m+1}(\rho-i,x)-$$

$$-\sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{4l^2-1}}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l-1\,m+1}(\rho-i,x)+\sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{4l^2-1}}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l-1\,m-1}(\rho-i,x) \qquad (11)$$

$$-\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{4(l+1)^2-1}}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)a_{l+1\,m-1}(\rho-i,x)\Big\}.$$

Легко видеть, что вклад магнитного поля x) ничем не отличается от получаемого в разложении (3) при фиксированной энергии (см., например, /10/), потому что магнитное поле не меняет энергии частицы.

Наоборот, вклад электрического поля в (9) не имеет аналога в обычно используемом подходе кинетической теории плазмы. Здесь уже существенно сказывается преимущество разложения (8), когда дифференцирование по импульсу $\frac{\partial}{\partial p_k}$ выполняется прямым образом для любой лоренц-инвариантной функции распределения.

Наконец, неоднородный вклад (10) и (11) отличается от того, который получается с помощью (3) /10/, наличием конечно-разностных сдвигов (на $\pm i$) по лоренц-инвариантному параметру ρ .

Отметим для сравнения, что в релятивистском уравнении Шредингера /11/ в разложении по функциям $\mathcal{P}^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(ch\,a)$ тоже появляются уравнения в конечных разностях по тому же параметру ρ .

Ш. Разложение интеграла кулоновских столкновений по базисным функциям

Рассмотрим систему двух ковариантных самосогласованных кинетических уравнений вида (1) для двухкомпонентного газа, состоящего из электронов с зарядом e и ионов с зарядом $-Z_i e$, распределение которых описывается лоренц-инвариантными функциями распределения $f(x,\vec{p})$ и $f'(x,\vec{q})$ соответственно.

Мы умышленно не называем этот газ плазмой, так как здесь мы для простоты ограничимся случаем внешних полей, не учитывая

---

x) Если обозначить $\frac{(-)^\ell}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_0^\infty \frac{\rho^2\Gamma(i\rho)\,d\rho}{\Gamma(i\rho-\ell)}\,a_{\ell m}(\rho,x)\,\frac{\mathcal{P}^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(ch\,a)}{\sqrt{sh\,a}} = f_{\ell m}(p_0,x)$

(сравни (3) и (8)).

самосогласованного электромагнитного поля[x]

В таком случае нелинейным в ... будет только вклад от поля кулоновских столкновений[2], который в приближении малых переданных импульсов может быть представлен в классической форме:

$$J_{coll}(x,\vec{p}) = p_0 \frac{\partial}{\partial p_k} \mathcal{D}_{kn} \frac{\partial f(x,\vec{p})}{\partial p_n} + p_0 \frac{\partial}{\partial p_k} \ldots (x,\vec{p})$$

---

[x] Если затухание плазменных волн незначительно, то предлагаемый здесь метод решения может быть применён в известном ... подходе, в котором самосогласованное электромагнитное поле ... вается ещё одним ковариантным кинетическим уравнением так называемых плазмонов с интегралом столкновений ... здесь частиц с плазмонами.

Существуют другие элементарные процессы, не учитываемые в данной работе. Как показано в[1], тормозным излучением и рождением пар можно пренебречь, если энергия электронов умеренно релятивистские

$$E \lesssim \sqrt{137 L}\, m_0 \qquad (\lesssim 20\text{-}30 \text{ МэВ})$$

Легко можно подобрать реальные значения параметров, при которых отношение ионизационных потерь, связанных с учтёнными здесь кулоновскими столкновениями, к магнитотормозным[1]:

$$\frac{(dE/dt)_i}{(dE/dt)_m} = \frac{2{,}3\cdot 10^{-5} Z_i^2 n_i (\ln P^0/m_0 + 6{,}3)}{H_\perp^2 (P^0/m_0)^2}$$

будет порядка ~ 1, поэтому учёт силы торможения излучением в левой части (1) важен. Разложение по функциям (5) соответствующего вклада нетрудно выполнить, но за неимением места мы не приводим здесь этот результат.

где тензор диффузии :

$$\mathcal{D}_{kn} = \frac{2\pi e^4 Z_i^2 L}{p_0}\int \frac{d^3q}{q_0} W_{kn} f'(x,\vec{q}) \quad ; \tag{I3}$$

коэффициент трения

$$A_k = -\frac{2\pi e^4 Z_i^2 L}{p_0}\int \frac{d^3q}{q_0} W_{kn}\frac{\partial f'(x,\vec{q})}{\partial q_n} \quad ; \tag{I4}$$

тензор

$$W_{kn} = \frac{(pq)^2}{[(pq)^2 - m_0^2 M_0^2]^{3/2}}\left\{\left((pq)^2 - m_0^2 M_0^2\right)\delta_{kn} - M_0^2 p_k p_n - m_0^2 q_k q_n + (pq)(p_k q_n + q_k p_n)\right\} \tag{I5}$$

$$k, n = 1, 2, 3 ,$$

L -кулоновский логарифм. Далее можно рассмотреть два случая.

Ша) Система далека от равновесия. Тогда можно пренебречь наличием тепловых частиц, т.е. полагать, что функции распределения электронов $f(x,\vec{p})$ и ионов $f'(x,\vec{q})$ не должны зависеть от температур или иначе от 4-векторов Синджа /I3/, имеющих компоненты:

$$\xi_\mu(x) = \left(\frac{1}{\theta(x)\sqrt{1-V^2}} ; \frac{\vec{V}(x)}{\theta(x)\sqrt{1-V^2}}\right) ,$$

аналогично ξ'_μ . Здесь макроскорость

$$\vec{V}(x) = \frac{\int \vec{p}\, f(x,\vec{p})\, d^3p/p_0}{\int p_0\, f(x,\vec{p})\, d^3p/p_0} . \tag{I6}$$

Нетрудно показать, что пренебрежение тепловым движением означает отсутствие трения ,т.е. коэффициент A_k в формуле (I4) равен нулю [ж)]

[ж)] Интегрированием по частям интеграл сводится к :

$$A_k = -\frac{2\pi e^4 Z_i^2 L}{p_0}\left[2m^2\int\frac{d^3q}{q_0}\frac{(pq)^2 f'(x,\vec{q})}{[(pq)^2 - m_0^2 M_0^2]^{3/2}}\, q_k - 2p_k\int\frac{d^3q}{q_0}\frac{(pq)^3 f'(x,\vec{q})}{[(pq)^2 - m_0^2 M_0^2]^{3/2}}\right].$$

I-ое слагаемое в квадратных скобках является 3-векторной частью 4-вектора : $2m^2\int\frac{d^3q}{q_0}\frac{(pq)^2 f'(x,\vec{q})}{[(pq)^2 - m_0^2 M_0^2]^{3/2}}\, q_\mu$ который благодаря независимости функции $f'(x,\vec{q})$ от 4-вектора Синджа $\xi'_\mu(x)$, равен $2p_\mu\int\frac{d^3q\,(pq)^3 f'(x,\vec{q})}{q_0[(pq)^2 - m_0^2 M_0^2]^{3/2}}$. В итоге $A_k \equiv 0$.

Тогда легко свести остающийся в (12) вклад диффузии к следующему лоренц-инвариантному выражению :

$$J_{coll}(x,\vec{p}) = \frac{4}{3}\pi Z_i^2 r_0^2 L\, A(x)\, \Delta_L\, f(x,\vec{p}), \qquad (17)$$

где $r_0 = \frac{e^2}{m_0}$ - классический радиус электрона; лоренц-инвариантная величина $A(x) = \int \frac{d^3q}{q_0} (pq)^2 f'(x,\vec{q}) / [(pq)^2 - m_0^2 M_0^2]^{1/2}$ может зависеть только от x - координат и несущественного инварианта $p^2 = m_0^2$ [ж]; Δ_L -оператор Лапласа на гиперболоиде $u^2 = 1$:

$$\Delta_L = sh^{-2}a \frac{\partial}{\partial a} sh^2 a \frac{\partial}{\partial a} + sh^{-2}a\, \Delta_{\theta,\varphi}\,, \qquad (18)$$

где параметры a, θ, φ определены в (7).

Так как функции (6) являются собственными функциями оператора (18), т.е.

$$\Delta_L f_{lmp}(a,\theta,\varphi) = -(1+\rho^2) f_{lmp}(a,\theta,\varphi)\,, \qquad (19)$$

то разложение интеграла столкновений по указанным функциям легко выполняется прямой подстановкой формулы (8) в выражение (17).

Таким образом, в рассматриваемом сильно неравновесном случае все уравнение (I[1]) , включая интеграл столкновений вида (17), раскладывается по базисным функциям (6).

Шб) Рассмотрим другую возможность. Пусть каждая из компонент газа содержит как равновесную [жж], так и неравновесные части, т.е. функции распределения имеют вид:

[ж] Независимость лоренц-инвариантной функции распределения от температуры (или от $\xi_\mu(x)$) означает отсутствие в качестве аргументов у функции $A(x)$ инвариантов $p_\mu\xi^\mu$, ξ^2; инвариант $px = p_0 x_0 - \vec{p}\vec{x}$ исключается, если переменные в функции распределения разделяются, что во всяком случае всегда осуществляется в отсутствие внешних полей.

[жж] Например, за счет ион-ионных и электрон-электронных столкновений с большей передачей импульса в каждом акте рассеяния, чем в рассматриваемом здесь случае электрон-ионных столкновений.

$$f(x,\vec{p}) = A(\theta)\, n(x) \exp\{-p_\mu \xi^\mu(x)\} + f_H(x,\vec{p})$$

$$f'(x,\vec{q}) = A(\theta')\, n'(x) \exp\{-q_\mu \xi'^\mu(x)\} + f'_H(x,\vec{q}), \tag{20}$$

где $A(\theta), A(\theta'), n(x), n'(x)$ определены в (4), ξ_μ и ξ'_μ определяются формулой (I6), $f_H(x,\vec{p})$ и $f'_H(x,\vec{q})$ неравновесные вклады, снова, как и выше в пункте IIIа, не зависящие от температур. Однако уже нельзя считать эти вклады много больше первых слагаемых в формулах (20), т.е. пренебречь тепловым движением.

Так как неравновесные слагаемые (20) приведут к результату вида (I7), допускающему разложение по шаровым функциям с помощью подстановки (3) x), то здесь мы представим только результат подстановки максвелловской функции распределения частиц-рассеивателей (например электронов) в интеграл столкновений $J_{coll}(x,\vec{q})$ вида (I2) и покажем, что в этом случае допустимо только разложение (3) для неизвестной функции распределения рассеиваемых частиц (например, ионов).

В локальной системе покоя электронного газа $\vec{V}(x)=0$ (см. (I6)) имеем из (I2) с заменой $\vec{p} \rightleftarrows \vec{q}$:

$$\begin{aligned}
J_{coll}(x,\vec{q}) = {} & \frac{\pi Z_1^2 Z_0^2 n(x) L m_0^2 z}{K_2(z) M_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 b} \Big\{\Big\{ \frac{K_0(z)}{z} \operatorname{ch}^2 b\, \Delta_{\vartheta,\phi} f'(x,\vec{q}) + \\
& + \frac{M_0}{m_0} \frac{K_1(z)}{z} \Big[4 \operatorname{ch} b \operatorname{sh}^2 b + 2 \operatorname{ch}^2 b \operatorname{sh} b \frac{\partial}{\partial b} \Big] f'(x,\vec{q}) - \frac{M_0}{m_0} \frac{K_0(z)}{z} \times \\
& \times 2 \operatorname{sh} b \frac{\partial}{\partial b} f'(x,\vec{q}) + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 b} \Big\{ \frac{K_1(z)}{z^2} \Big[2 \operatorname{ch}^2 b \operatorname{sh}^2 b \frac{\partial^2}{\partial b^2} + (\operatorname{ch}^2 b - 2) \times \\
& \times \operatorname{sh} 2b \frac{\partial}{\partial b} - (2 \operatorname{sh}^4 b - 1) \Delta_{\vartheta,\phi} \Big] f'(x,\vec{q}) - \frac{K_0(z)}{z^3} \Big[2 \operatorname{sh}^2 b \frac{\partial^2}{\partial b^2} - \operatorname{sh} 2b \frac{\partial}{\partial b} - \\
& - \Delta_{\vartheta,\phi} \Big] f'(x,\vec{q}) \Big\} \Big\}\Big\} .
\end{aligned} \tag{2I}$$

---

x) $O(3)$ есть подгруппа группы $O(3,1)$, т.е. разложение (3) заведомо справедливо.

Здесь $K_0(z)$, $K_1(z)$, $K_2(z)$ – функции Макдональда от инвариантного аргумента $z = \frac{m_e}{\theta}$, θ –произвольная температура электронов, параметры β, ϑ, ϕ определяют 4-вектор $\omega_\mu = \frac{\ell_\mu}{M_0}$ (сравни (7)).

Легко видеть, что разложение (3) выполняется для (2I), так как:

$$\Delta_{\vartheta,\phi} Y_{\ell m}(\vartheta,\phi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\vartheta,\phi). \qquad (22)$$

Большего, т.е. разложения (2I) по базисным функциям (6), в данном случае достичь нельзя. Формально этому мешает наличие нечётной степени импульса в знаменателе $\left(J_{\omega\ell\ell} \sim \frac{1}{p^3} = \frac{1}{m_0^3\, sh^3 6}\right)$, что не позволяет применить известные рекуррентные формулы (см. Приложение).

IУ. О применимости гидродинамического приближения

С использованием формул (8) и (I9) в интеграле столкновений (I7) и в левой части Р.К.У. (9) можно отделить полный набор ортонормированных базисных функций (см. Приложение, формулу (П.6)), в результате чего получаем систему (при разных ℓ и m) бесконечного числа зацепляющихся уравнений. В однородном случае и в отсутствие электрического поля эти уравнения расцепляются на независимые для различных амплитуд $a_{\ell m}(p,t)$, т.е. никакого приближения не требуется – степень анизотропии произвольна и определяется начальным условием.

В неоднородном случае, если применимо гидродинамическое приближение, в котором изотропная гармоника a_{00} много больше остальных, упомянутую бесконечную цепочку можно оборвать на моментах $\ell = 0$ и $\ell = 1$ (анизотропная поправка).

Возможность применить такое изотропное приближение в обычном подходе с использованием (3) видна из зависимости анизотропных поправок от числа столкновений $\nu_\ell(v)$ x)

$$f_{1m}(p_0) \sim \frac{1}{i\omega_z + \nu_1(v)}, \tag{23}$$

где $\omega_z = \frac{eH_z\sqrt{1-\beta^2}}{m_0}$ циклотронная частота во внешнем поле $\vec{H} = (0, 0, H_z)$. Число столкновений пропорционально плотности рассеивателей и сечению взаимодействия с ними.

Поэтому для медленных частиц, сечение рассеяния которых больше xx), чем для быстрых при той же плотности рассеивателей, частота столкновений будет больше и изотропизация наступает значительно раньше.

Однако могут быть случаи, когда в результате всего нескольких и даже одного соударения распределение медленных частиц становится изотропным xxx), что не отражается в зависимости (23)

x) $\nu_\ell = \nu_1$ в приближении первых моментов $\ell = 0, 1$.

xx) Для медленных частиц и любого убывающего (при $z \to \infty$) потенциала взаимодействия $U(z) = z^{-n}$, сечение ведёт себя как $\sigma \sim (v)^{-4/n}$, т.е. растёт с уменьшением скорости.

xxx) Как известно из квантовой механики, для короткодействующих потенциалов $n > 3$ в потенциале $U(z) = z^{-n}$, например, для столкновений в нижних слоях ионосферы с нейтральными молекулами, рассеяние медленных части даже в одном акте соударения происходит в S-состоянии, т.е. изотропно. Поэтому обычное условие применимости гидродинамики:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \ll L,$$

где n – плотность рассеивателей, L – характерный размер системы, λ – длина свободного пробега, может быть ослаблено представлением в виде:

$$\lambda \lesssim L.$$

при использовании стандартной техники решения кинетических уравнений с помощью (3)[6].

В предлагаемом нами разложении функции распределения по базисным функциям неприводимых унитарных представлений группы Лоренца (6) полностью используется кинематика импульсного пространства.

Функции Лежандра (П.I), зависящие от энергии (скорости) частиц, имеют следующую явную зависимость от энергетических переменных[9]:

$$\frac{\mathcal{P}^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)}{\sqrt{\mathrm{sh}\,a}} \sim (\mathrm{ch}\,a)^{-1+i\rho}(\mathrm{th}\,a)^{\ell}\,\mathcal{F}(\alpha,\beta;\gamma;\mathrm{th}^2 a), \tag{24}$$

где $\mathcal{F}(\alpha,\beta;\gamma;\mathrm{th}^2 a)$ – гипергеометрическая функция, которая стремится к I, когда скорость частиц $v=\frac{|\vec{p}|}{p_0}=\mathrm{th}\,a \to 0$.

Таким образом, для медленных частиц $(v\to 0)$ остаётся лишь изотропный вклад гармоники с $\ell=0$:

$$\mathcal{P}^{-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)\Big/\sqrt{\mathrm{sh}\,a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\rho a}{\rho\,\mathrm{sh}\,a} \xrightarrow[a\to 0]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \tag{25}$$

Последний предельный переход к остановившимся частицам $\vec{p}=0$ даёт очевидный кинематический результат, когда нулевой вектор имеет произвольное (изотропное) направление.

Таким образом, даже при малом числе столкновений, когда коэффициенты разложения по функциям (6) будут одного порядка $a_{00}(\rho,x)\sim a_{lm}(\rho,x)$, переход к рассмотрению более медленных частиц позволяет пользоваться гидродинамическим описанием в отличие от подхода с использованием (3), где обязательным является большое число столкновений.

V. О некоторых решениях конечно-разностных уравнений

Выводы и рекомендации

Применяя гидродинамическое приближение в неоднородной задаче с $\vec{E}$, $\vec{H}$ - полями или получив замкнутое уравнение для амплитуды разложения (8) $a_{\ell m}(\rho, x)$ (ℓ, m - произвольны) в однородном случае (при отсутствии электрического поля), мы вынуждены решать конечно-разностные уравнения по лоренц-инвариантному параметру ρ.

Это было проделано в простейшем бесстолкновительном случае для нестационарного движения в магнитном поле только в целях проверки техники решения и самого разложения (9).

Наш результат в точности совпал с известным результатом кинетической теории /5,6,10/ в том же ограничении первыми гармониками $\ell = 0, 1$ при формальной подстановке числа столкновений $\nu_1 = 0$ в выражения для фурье-лапласовских образов (по $\vec{r}$, t) от амплитуд $f_{\ell m}(\rho_0, x)$. Ограничение бесстолкновительным случаем при такой проверке несущественно.

Нетрудно решить тем же способом (см. ниже (26),(27)) конечно-разностные уравнения с учётом интеграла столкновений (17) в нерелятивистском $\rho \gg 1$ и ультрарелятивистском $\rho \ll 1$ пределах.

Для слаборелятивистских частиц, где нельзя воспользоваться этими приближениями, задача требует дополнительного изучения.

При решении конечно-разностных уравнений использовались следующие преобразования:

1) вынесение Γ - функций из амплитуд разложения $a_{\ell m}(\rho, x)$ что сокращает число множителей, зависящих от ρ и ℓ, с по-

мощью следующей замены искомой амплитуды:

$$a_{\ell m}(\rho,x)=\frac{i\Gamma(-i\rho)\Gamma(i\rho-\ell)}{\Gamma(-i\rho-\ell)\Gamma(i\rho+\ell+1)}C_{\ell m}(\rho,x) \tag{26}$$

2) переход в амплитудах $C_{\ell m}(\rho,x)$ к фурье-лапласовским переменным $\vec{k}$, s от $\vec{x}$, t – координат и к фурье-переменной q от лоренц-инвариантной ρ.

Последняя замена:

$$g_{\ell m}(\vec{k},s,\rho)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iq\rho}G_{\ell m}(\vec{k},s,q)\,dq \tag{27}$$

позволяет свести конечно-разностные уравнения к дифференциальным, которые решались, в частности, в целях упомянутой выше проверки предлагаемого метода.

Иногда (стационарное бесстолкновительное движение в магнитном поле) конечно-разностные уравнения просто решаются без перехода к дифференциальным.

Уже полученные конкретные результаты будут представлены в другой работе. Нам представляется целесообразным применение предложенного здесь аппарата к задачам кинетики неравновесных процессов, причём наиболее важным в релятивистском случае является учёт взаимодействия с изучением, как с внешним при заданном распределении квантов, так и с самосогласованным излучением (см. выше примечание в разделе Ш).

Интеграл комптоновских столкновений в обычном приближении $k_1, k_2 \ll |\vec{p}|$, где k_1, k_2 – величины импульсов поперечных -квантов (коллективными свойствами разрежённой среды пренебрегается), раскладывается по базисным функциям (6), т.е. этот вид взаимодействия с излучением может быть учтён в предлагаемой схеме.

Наиболее труден учёт взаимодействия с плазмонами (для слабопоглощающей среды), что представляется нам первоочередной задачей в развитии данного метода.

В заключение авторы выражают благодарность А.А. Рухадзе за обсуждение работы, а двое из нас (В.С.) и (Г.Ш.) благодарны В.И. Телегину за обсуждение вопросов, связанных с решением конечно-разностных уравнений.

Приложение

Основные формулы для присоединённых функций Лежандра и базисных функций (6)

Вещественные присоединённые функции Лежандра[14] определяются формулой

$$\frac{\mathcal{P}^{-(l+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+ip}(\operatorname{ch} a)}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} = \frac{\Gamma(ip-l)\,ip}{\Gamma(ip+l+1)}(\operatorname{sh} a)^{l}\frac{d^{l}}{d(\operatorname{ch} a)^{l}}\,\frac{\mathcal{P}^{-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+ip}(\operatorname{ch} a)}{\sqrt{\operatorname{sh} a}}, \qquad (\text{П.1})$$

где

$$\frac{\mathcal{P}^{-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+ip}(\operatorname{ch} a)}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin pa}{p\operatorname{sh} a}\,. \qquad (\text{П.2})$$

Для функций (П.1) справедливы следующие рекуррентные формулы[13], используемые в разложении Р.К.У.:

$$\operatorname{cth} a\,\mathcal{P}^{-(l+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+ip}(\operatorname{ch} a) = \frac{1}{2l+1}\Big[\mathcal{P}^{-(l-\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+ip}(\operatorname{ch} a) +$$

$$+ \big((l+1)^2+p^2\big)\,\mathcal{P}^{-(l+\frac{3}{2})}_{-\frac{1}{2}+ip}(\operatorname{ch} a)\Big]\,; \qquad (\text{П.3})$$

$$\mathrm{ch}\,a\,\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac12+i\rho} = \frac12\left[\left(1-\frac{i(l+1)}{\rho}\right)\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{\frac12+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)+\left(1+\frac{i(l+1)}{\rho}\right)\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac32+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)\right], \quad (\text{П.4})$$

$$\mathrm{sh}\,a\,\mathcal{P}^{-(l+\frac32)}_{-\frac12+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)=\frac{i}{2\rho}\left[\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac32+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)-\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{\frac12+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)\right], \quad (\text{П.5})$$

где в правых частях (П.4) и (П.5) стоят функции, соответствующие неунитарным представлениям. Переход к унитарным представлениям, т.е. к функциям (П.1), осуществляется заменой в интеграле ρ на $(\rho\pm i)$ сразу после применения (П.4) и (П.5).

Это приводит к возникновению конечно-разностных уравнений в амплитудах разложения $a_{lm}(\rho,x)$ (см. (6) и (7)).

Для функций (П.1) выполняется соотношение полноты:

$$\int_0^\infty N^2(l,\rho)\,\frac{\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac12+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)}{\sqrt{\mathrm{sh}\,a}}\,\frac{\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac12+i\rho}(\mathrm{ch}\,a')}{\sqrt{\mathrm{sh}\,a'}}\,\rho^2 d\rho=\frac{\delta(a-a')}{\mathrm{sh}\,a\;\mathrm{sh}\,a'} \quad (\text{П.6})$$

и ортонормированности:

$$\int_0^\infty N(l,\rho')N(l,\rho)\,\frac{\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac12+i\rho}(\mathrm{ch}\,a)}{\sqrt{\mathrm{sh}\,a}}\,\frac{\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac12+i\rho'}(\mathrm{ch}\,a)}{\sqrt{\mathrm{sh}\,a}}\,\mathrm{sh}^2 a\,da=\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho\rho'}, \quad (\text{П.7})$$

где вещественная норма $N(l,\rho)$ определена в (6).

При решении конечно-разностных уравнений с помощью замены их дифференциальными (см. формулу (7)) Фурье-амплитуды $G_{lm}(q)$ оказываются пропорциональными функциям Лежандра $\mathcal{P}^{-(l+\frac12)}_{-\frac12+i\rho}(\mathrm{ch}\,q)$, что позволяет с помощью формулы (П.6) выполнить интегрирование по ρ в разложении (8) искомой функции $f(x,\vec{p})$, т.е. получить функции $\delta(a-q)$, с помощью которой тут же выполняется вспомогательное интегрирование (27).[ж)]

В результате дополнительное по сравнению с простой суммой (3) разложение функции $f(x,\vec{p})$ в интеграл $\int d\rho(\dots)$ не является усложнением в решении.

С учётом формул (П.6) и (П.7) нетрудно получить следующую формулу для обратного к (6) преобразования /8/ :

$$C_{lm}(\rho,x)=\frac{(2\pi)^{3/2}(-)^{l}}{2}\frac{\Gamma(-i\rho)}{\Gamma(-i\rho-l)}\int\frac{d^3u}{u_0}f(x,\vec{u})\,f^{*}_{lm\rho}(a,\theta,\varphi)\,. \qquad (\text{П.8})$$

Если, например, подставить в (П.8) изотропное максвелловское распределение (4), легко получим /15/ :

$$a_{lm}=\delta_{l0}\delta_{m0}(4\pi)^{3/2}A(z)\,n(x)\,\frac{K_{i\rho}(z)}{z}, \text{где} \qquad (\text{П.9})$$

$Z(x)=\frac{m_0}{\theta(x)}$, $K_{i\rho}(z)$-функция Макдональда с мнимым индексом $i\rho$, $A(z)$, $n(x)$ определены в (4).

ж)В такой процедуре существенным свойством функции $C_{lm}(\rho,x)$ является нечётность: $C_{lm}(-\rho,x)=-C_{lm}(\rho,x)$, которая сразу следует из формул (26) и (П.8). Тогда, как нетрудно видеть из (27), таким же свойством нечётности обладают амплитуды $G_{lm}(q)$, т.е.

$$G_{lm}(-q)=-G_{lm}(q)\,.$$

<u>Литература</u>:

I. С.Т. Беляев, Г.Н. Будкер. ДАН, <u>I07</u>, 807 (1956).
2. Ю.Л. Климонтович. ЖЭТФ, <u>38</u>, I2I2 (1960).
3. С. Чепмен, Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М., ИИЛ, I960.
4. Н.А. Черников. ДАН <u>I33</u>, 84 (1960)
5. В.И. Давыдов. ЖЭТФ, <u>7</u>, I069 (I937).
6. Сборник статей под ред. А. Хохштима "Кинетические процессы в газах и плазме" Атомиздат, I972 (§ 6.I2).
7. М.А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, I958.
8. Н.Я. Виленкин, Я. А. Смородинский. ЖЭТФ, <u>46</u>, I793 (1964).
9. Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, М., Наука, I965.
I0. И. Шкаровский, Т. Джонстон, М. Бачинский. Кинетика частиц плазмы, М., Атомиздат, I969.
II. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov, Nuovo Cim. 55A, 233 (1968).
I2. В.Л. Гинзбург, С.И. Сыроватский. Происхождение космических лучей, М., Из-во АН СССР, 1963.
I3. Синдж. Релятивистский газ, М., Атомиздат, I960.
I4. А. Кратцер, В. Франц. Трансцендентные функции. М., ИИЛ, 1963.
I5. И.М. Рыжик, И.С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, 1965г.

Рукопись поступила в издательский отдел
[illegible] июня [illegible] года.