ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Р2 - 7264



Г.Н.Афанасьев, С.М.Елисеев

# О ВОЗМОЖНОСТИ ЕДИНОГО ОПИСАНИЯ УРОВНЕЙ ЯДЕР И РАССЕЯНИЯ АЛЬФА-ЧАСТИЦ И ЭЛЕКТРОНОВ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 7261

Г.Н.Афанасьев, С.М.Елисеев

# О ВОЗМОЖНОСТИ ЕДИНОГО ОПИСАНИЯ УРОВНЕЙ ЯДЕР И РАССЕЯНИЯ АЛЬФА-ЧАСТИЦ И ЭЛЕКТРОНОВ

*Направлено в Acta Physica Polonica*

1. Цель данной работы состоит в том, чтобы единым образом описать, по крайней мере качественно, уровни ядер, упругое рассеяние электронов и $a$-частиц. До настоящего времени эти эксперименты описывались следующим образом. Одночастичные уровни ядра находятся как собственные частоты одночастичного гамильтониана с некоторым внешним средним полем. При изучении рассеяния электронов зарядовая плотность ядра параметризуется в том или ином виде, а параметры определяются из условия наилучшего совпадения с экспериментальными формфакторами. Наконец, рассеяние $a$-частиц рассматривается либо в рамках оптической модели, либо в рамках параметризованного фазового анализа.

2. Мы стартуем с некоторого сферического среднего поля /явный вид мы укажем позднее/. Одночастичные волновые функции $\Psi_a^{(p)}$, $\Psi_a^{(n)}$ определяют протонную $\rho_p(r)$ и нейтронную компоненты плотности $\rho_n(r)$

$$\rho_p(r) = \sum_a |\Psi_a^{(p)}|^2 ,$$

$$\rho_n(r) = \sum_a |\Psi_a^{(n)}|^2 .$$

Тогда в борновском приближении формфактор, описывающий рассеяние электронов на ядре, равен

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int \rho_p(r) \sin(qr) r\, dr .$$

Имея $\rho_p(r)$ и $\rho_n(r)$ и зная амплитуды рассеяния $a$-частиц на протонах и нейтронах ядра, можно, пользуясь теорией Глаубера [1,2], вычислить дифференциальное сечение упругого рассеяния $\alpha$-частиц на заданном ядре. Условия применения теории Глаубера определяются неравенствами [2]

$$V \ll E, \quad kd \gg 1,$$

где $d$ - размер области взаимодействия, $V$ - потенциал, $E$ - энергия. При упругом рассеянии ионов, когда происходит взаимодействие только на периферии сталкивающихся ядер, эти условия выполняются. Например, при рассеянии $\alpha$-частиц с энергией 40 Мэв на ядре $^{208}Pb$ $kd \sim 20$.

Имеем для амплитуды рассеяния $\alpha$-частицы на ядре:

$$F(\theta) = F_c(\theta) - \frac{i}{2k}\sum(2\ell+1)\exp(2i\delta_\ell^c)(S_\ell - 1)P_\ell(\cos\theta),$$

где $F_c(\theta)$, $\delta_\ell^c$ - кулоновские амплитуды и фаза, ... $\alpha$-частицы ... 

... глаубер... льная $S$-матрица равна [2]

$$S_\ell = \exp\{-\tfrac{1}{2}\sigma_p(1-i\beta_p)T_p(b) - \tfrac{1}{2}\sigma_n(1-i\beta_n)T_n(b)\},$$

где $\sigma_p$, $\sigma_n$ - полные сечения рассеяния $\alpha$-частиц на протонах и нейтронах мишени; $\beta_p$, $\beta_n$ - отношения реальных и мнимых частей амплитуды рассеяния $\alpha$-частиц под нулевым углом на протонах и нейтронах ядра,

$$T_p(b) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho_p(\sqrt{z^2+b^2})\,dz,$$

$$T_n(b) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho_p(\sqrt{z^2+b^2})\,dz.$$

$b$ - прицельный параметр; квазиклассически он следующим образом связан с орбитальным моментом $\ell$ и параметром Зоммерфельда $\eta$:

$$kb(kb - 2\eta) = \ell(\ell+1).$$

Таким образом, при таком подходе одночастичная плотность и параметры элементарной амплитуды определяют элементы $S$-матрицы и дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F|^2.$$

3. В данной работе мы использовали в качестве среднего поля три потенциала:

1/ потенциал сферического осциллятора с параметром длины $1.24 A^{1/3}$;

2/ потенциал Вудса-Саксона с параметрами, определенными в /3/;

3/ потенциал прямоугольной ямы, полученный из предыдущего стремлением параметра диффузности к нулю.

Поскольку работа носит на данном этапе качественный характер, мы ограничивались при описании рассеяния электронов борновским приближением и пренебрегали структурой протонов; при описании рассеяния $\alpha$-частиц не учитывали их структуры. Использовались параметры $\sigma$ и $\beta$ элементарной амплитуды, усредненные по протонам и нейтронам ядра. Сечение $\sigma$ принималось равным суммарной геометрической площади $\alpha$-частицы и нуклона $\sigma \approx 26{,}3$ ф$^2$, а $\beta \approx 4{,}5$. Никакой подгонки параметров $\sigma$ и $\beta$ пока не производилось. Все приводимые ниже результаты относятся к $^{208}Pb$.

4. На рис. 1-3 представлены плотности для осцилляторного потенциала, потенциала Вудса-Саксона и прямоугольной ямы. Кривые 1 и 2 соответствуют протонной и нейтронной компонентам плотности. На рис. 4 приведены результаты расчетов электронных формфакторов для одночастичного потенциала Вудса-Саксона. На рис.5 - аналогичные расчеты для прямоугольной /кривая 1/ и осцилляторной /кривая 2/ ям. На рис. 6 сплошной и пунктирной линиями изображены зависимости вещественной и мнимой частей $S$-матрицы от углового момента $\ell$ для потенциала Вудса-Саксона, а на рис. 7-8 - для потенциалов осциллятора и прямоугольной ямы. Заметим, что в отличие от широко используемых при обработке эксперимента параметризаций /см., например, /4/ / мнимая и вещественная части $S$-матрицы испытывают несколько характерных осцилляций при малых $\ell$. Однако неясно, имеют ли эти осцилляции физический смысл или являются следствием сделанных приближений. Наконец, на рис. 9-11 изображены дифференциальные сечения упругого рассеяния частиц с энергией 40 Мэв на ядре $^{208}Pb$ для

потенциала Вудса-Саксона /рис. 9/, осциллятора /рис. 10/ и прямоугольной ямы /рис. 11/. Для потенциала Вудса-Саксона и прямоугольной ямы заметен рост дифференциального сечения для больших углов. Для осцилляторной ямы при выбранных выше $\sigma, \beta$ такого роста нет.

Из-за упомянутых приближений и отсутствия подгонки $\sigma, \beta$ мы не сравниваем в данной работе наши расчеты с данными эксперимента. Тем не менее теоретические дифференциальные сечения для прямоугольной ямы и потенциала Вудса-Саксона /но не для осциллятора/ правильно воспроизводят особенности хода экспериментального дифференциального сечения [4].

5. Для обработки экспериментальных данных по рассеянию электронов широко используются феноменологические зарядовые распределения:

$$\rho\ (r) = \left[\ \frac{1}{1+\exp\left(\frac{r-r_0}{r_1}\right)}\ \right]^m$$

или же [5]

$$\rho_2\ (r) = \left[\ \frac{1}{ch\ \frac{r}{b} + ch\ \frac{R}{b}}\ \right]^n$$

/обычно выбирают $m=n=1$ /.

Во многих модельных расчетах фактически предполагается, что одночастичная зарядовая плотность не слишком сильно отличается от /5.1/ и /5.2/, т.е. допускают, что нуклон-нуклонные корреляции невелики. Если это так, то интересным является такой вопрос: какому одночастичному потенциалу отвечают распределения /5.1/ и /5.2/? На такой вопрос проще всего ответить для $\alpha$-частицы, радиальная часть одночастичной волновой функции для которой пропорциональна корню квадратному из /5.1/ или /5.2/. Подставляя $\rho$ в уравнение Шредингера и определяя собственное значение из условия обращения в нуль потенциала на бесконечно большом расстоянии, находим следующие выражения для одночастичных потенциалов, которые отвечают распределениям /5.1/ и /5.2/:

$$V_1(r) = -\frac{2m}{r\,r_1}\cdot\frac{1}{1+\exp\left(-\frac{r-r_0}{r_1}\right)} - m\,\frac{m+(2m+1)\exp\left(\frac{r-r_0}{r_1}\right)}{\left[1+\exp\left(\frac{r-r_0}{r_1}\right)\right]^2},$$

$$V_2(r) = -\frac{2n}{r\,b}\cdot\frac{sh\frac{r}{b}}{ch\frac{r}{b}+ch\frac{R}{b}} - n\,\frac{n\left(1+ch^2\frac{R}{b}\right)+ch\frac{r}{b}\,ch\frac{R}{b}(2n+1)}{\left(ch\frac{R}{b}+ch\frac{r}{b}\right)^2}.$$

Мы видим, что одночастичный потенциал состоит из короткодействующей части, убывающей экспоненциально, и длиннодействующей части, которая на больших расстояниях ведет себя, как $1/r$. К сожалению, знак длиннодействующей части оказывается неправильным, т.е. вместо кулоновского отталкивания получаем притяжение. Таким образом, несмотря на то, что распределения /5.1/ и /5.2/ неплохо описывают эксперименты по рассеянию электронов, налицо неувязка /если верно предположение о близости распределений /5.1/, /5.2/ к одночастичным/ между одночастичным потенциалом и соответствующей ему одночастичной плотностью. Легко видеть, что правильную асимптотику одночастичного потенциала, получаемого при подстановке в уравнение Шредингера пробной волновой функции, дают те волновые функции, асимптотика которых имеет вид

$$\approx \frac{e^{-kr}}{r^{1+\kappa/k}},$$

где

$$\kappa = \frac{2mze^2}{h^2}, \qquad k^2 = \frac{2m|E|}{h^2}.$$

6. Обычно нуклоны помещаются в феноменологическое среднее поле $V(r)$, в котором вычисляются одночастичные волновые функции ядра:

$$-\frac{h^2}{2m}\left(\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}F\right)+V(r)F = -|E|\,F.$$

Между тем ясно, что самим своим существованием это среднее поле обязано нуклонам, точнее, взаимодействию нуклонов друг с другом. Такое взаимодействие должно быть нелинейным. Простейшую нелинейность можно получить, если учесть, что в феноменологических моделях наблюдается примерная пропорциональность между потенциалом и одночастичной плотностью:

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Lambda^2\rho(r).$$

Опять-таки, ограничиваясь случаем $\alpha$-частицы, получаем следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{d^2F}{dr^2} = \frac{2}{r}\frac{dF}{dr} + \Lambda^2 F^3 - k^2 F = 0.$$

Оно напоминает уравнение, ранее изучавшееся в нелинейной теории элементарных частиц /6,7/ . Обычный метод состоит в том, что отбрасывают в этом выражении член с первой производной, но учитывают привносимое им граничное условие:

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=0} = 0,$$

Это аргументируется следующим образом /8/ . Во внутренней области тяжелого ядра производными от $F(r)$ можно пренебречь Вблизи поверхности член $(2/r)\,dF/dr$ мал по сравнению со второй производной, так как протяженность поверхностной области ядра мала по сравнению с радиусом ядра /см. формулы /2.16/ и /2.17/ в работе /8/ /. В этом случае получаем для собственного значения и волновой функции следующее выражение:

$$|E| = \frac{2}{9}\cdot\frac{\hbar^2}{m}\cdot\frac{\pi^4}{\Lambda^4},$$

$$F(r) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\pi^2}{\Lambda^3}\cdot\frac{1}{ch\left(\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{\Lambda^2}r\right)}.$$

Такая зависимость качественно правильно воспроизводит экспоненциальное убывание волновой функции $\alpha$-частицы. Применение этого метода к более тяжелым ядрам наталкивается на трудности, связанные с тем, что вместо одного нелинейного уравнения приходится решать систему нелинейных уравнений второго порядка.

Авторы благодарны проф. В.Г.Соловьеву за постоянный интерес к работе. Авторы признательны Ф.А.Гарееву за предоставление программы вычисления вудс-саксоновских волновых функций.

## *Литература*

1. *R.J.Glauber. High Energy Collision Theory. Lectures in Theoretical Phys., I, Intersc. Publ. (1969).*
2. *A.Dar, Z.Kirzon. Phys.Lett., 37B, No. 2, 166 (1970).*
3. *В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. Наука, Москва, 1971.*
4. *В.Ю.Гончар, К.С.Желпоног. ЯФ, 13, вып. 1 /1971/.*
5. *Ю.Н.Елдышев, В.К.Лукьянов, Ю.С.Поль. Препринт ОИЯИ, Р4-6310, Дубна, 1972.*
6. *R.Finkelstein, R.Le Levier, M.Ruderman. Phys.Rev., 83, 326 (1951).*
7. *R.Finkelstein, K.Fronsdal, P.Kaus. Phys.Rev., 103, 1571 (1956).*
8. *B.Malenka. Phys.Rev., 86, 68 (1952).*

*Рукопись поступила в издательский отдел 20 июня 1973 года.*

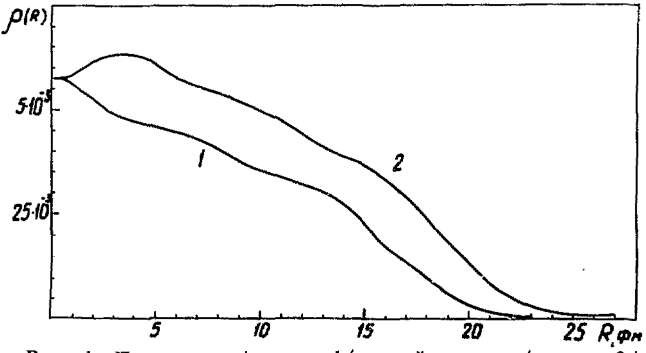
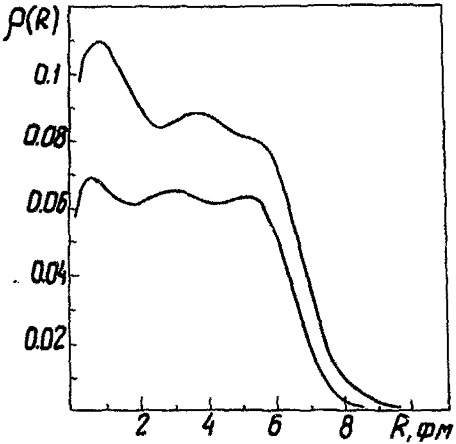



Рис. 1. Протонная /кривая 1/ и нейтронная /кривая 2/ компоненты плотности в осцилляторной яме для $^{208}Pb$.

Рис. 2. Протонная /нижняя кривая/ и нейтронная /верхняя/ компоненты плотности в яме Вудса-Саксона для $^{208}Pb$. Параметры ямы определены в тексте.



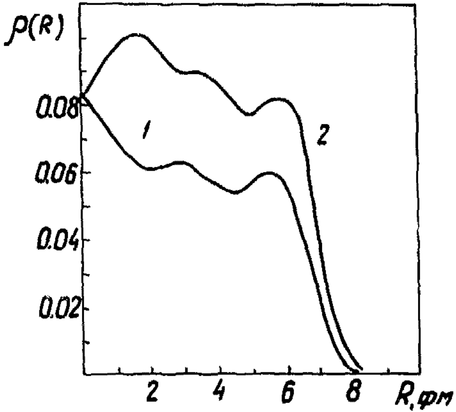




Рис. 3. Протонная /кривая 1/ и нейтронная /кривая 2/ компоненты плотности в прямоугольной яме для $^{208}Pb$. Параметры ямы даны в тексте.

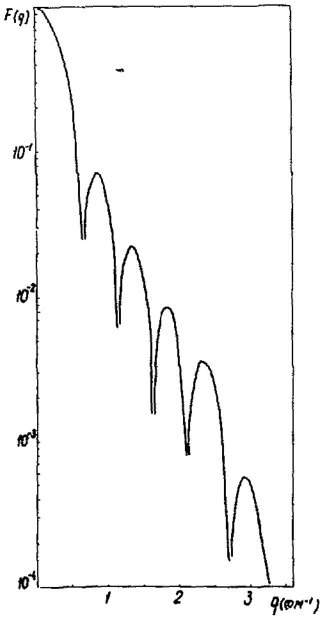



Рис. 4. Формфактор упругого рассеяния электронов на $^{208}Pb$. Одночастичные волновые функции - вудс-саксоновские.

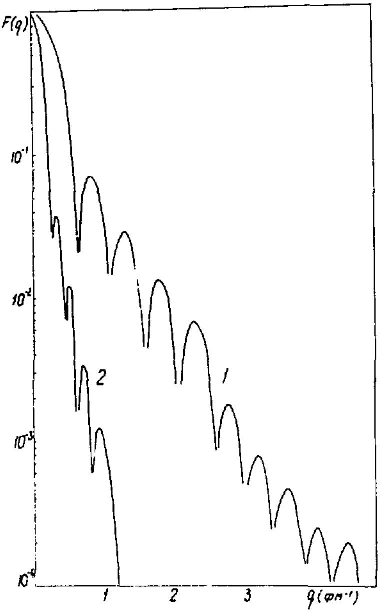



Рис. 5. Формфакторы упругого рассеяния электронов на $^{208}Pb$. Одночастичные волновые функции генерируются прямоугольной ямой /кривая 1/ и осцилляторной /кривая 2/.

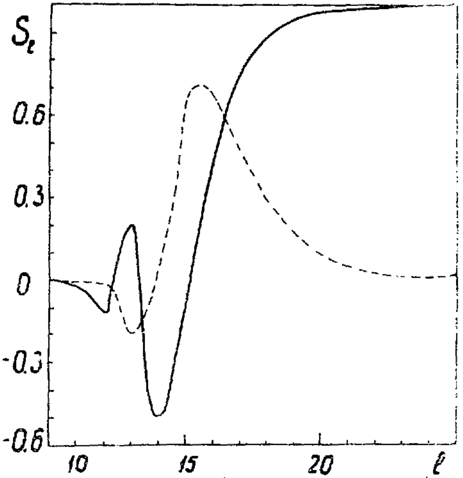



Рис. 6. Вещественная /сплошная кривая/ и мнимая /пунктирная/ части $S$-матрицы как функция углового момента $\ell$. Одночастичный потенциал - вудс-саксоновский.

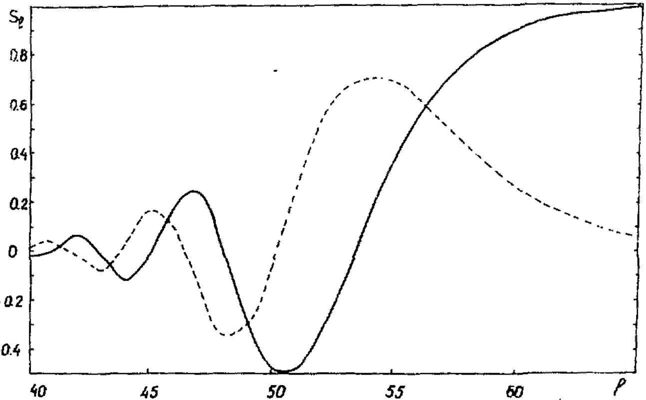



Рис. 7. Вещественная /сплошная кривая/ и мнимая /пунктирная/ части $S$-матрицы для осцилляторной ямы.

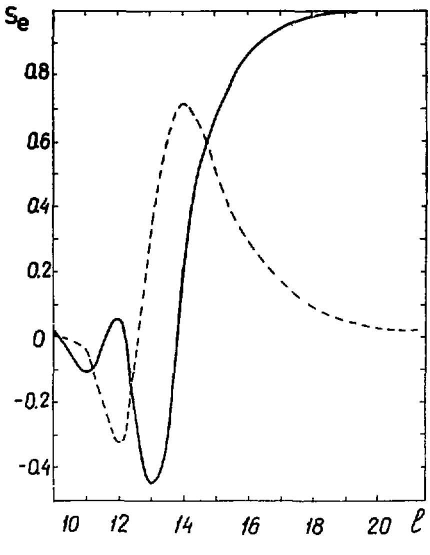



Рис. 8. Вещественная /сплошная кривая/ и мнимая /пунктирная/ части S -матрицы для прямоугольной ямы.

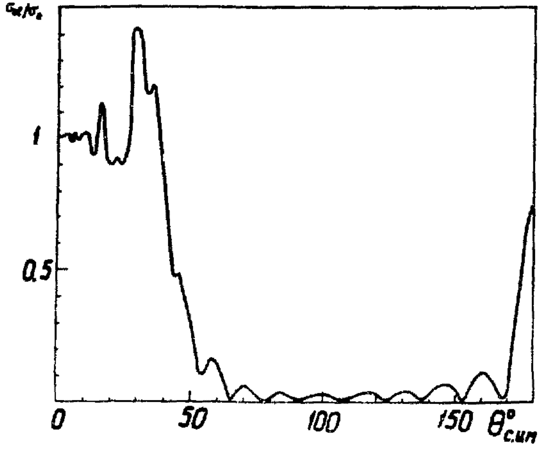



Рис. 9. Дифференциальное сечение упругого рассеяния 40 Мэв на $^{208}Pb$. Одночастичные волновые функции альфа-частиц - вудс-саксоновские.

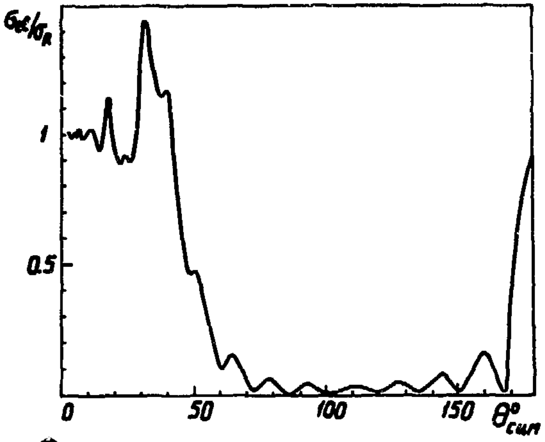



Рис. 10. Дифференциальное сечение упругого рассеяния 40 Мэв альфа-частиц на $^{208}Pb$. Одночастичные волновые функции - осцилляторные.

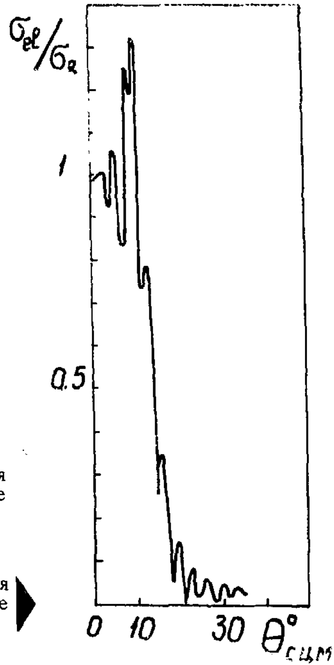



Рис. 11. Дифференциальное сечение упругого рассеяния 40 Мэв альфа-частиц на $^{208}Pb$. Одночастичные волновые функции генерируются прямоугольной ямой.