СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 7222

В.П. Гердт, В.А. Мещеряков

НОВЫЙ ВИД ПРАВИЛ СУММ ДЛЯ π N -РАССЕЯНИЯ В ПОДПОРОГОВОЙ ОБЛАСТИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7222

В.П. Гердт, В.А. Мещеряков

НОВЫЙ ВИД ПРАВИЛ СУММ ДЛЯ πN -РАССЕЯНИЯ В ПОДПОРОГОВОЙ ОБЛАСТИ

В.П. Гердт, В.А. Мещеряков

Р2 - 7222

Новый вид правил сумм для πN -рассеяния в подпороговой области

Получено зависящее от параметра семейство перекрестных правил сумм для πN -рассеяния. Показано, что наличие параметра в правилах сумм позволяет находить ограничения на энергетическую зависимость парциальных волн, следующие из условий кроссинг-симметрии.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Gerd V.P., Meshcheryakov V.A.

P2 - 7222

New Type of Sum Rules for πN -Scattering in Subthreshold Region

A series of the cross sum rules for πN -scattering, which depends on the parameter, is obtained. It is shown that the presence of the parameter in the sum rules allows one to find the constraints to the energy dependence of partial waves which follow from the crossing-symmetry conditions.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

§ I. Введение

В последние годы найдены ограничения на парциальные волны упругих двухчастичных реакций в подпороговой области, вытекающие из условий кроссинг-симметрии. Первые результаты в этом направлении получены Балачадраном и Ньюитсом /I/ для рассеяния нейтральных бесспиновых частиц. Затем Роскис /2/, используя идеи работы /I/, вывел интегральные соотношения (перекрестные правила сумм) для парциальных волн $\pi\pi$ -рассеяния. В дальнейшем результаты Роскиса были воспроизведены /3,4/ без использования техники Балачадрана и Ньюитса, а также обобщены /3/ на случаи πK - и πN -рассеяния.

В настоящей работе на примере πN -рассеяния показано, что упоминавшиеся выше правила сумм являются частным случаем более широкого, зависящего от параметра, класса правил сумм (§ 2), на основании которого получен общий вид статических перекрестных соотношений для парциальных волн с учетом членов $\sim 1/M$ (§ 3), и проведен анализ (§ 4) поведения парциальных волн вблизи порога перекрестной реакции (кроссинг-порога).

§ 2. Перекрестные правила сумм для πN -рассеяния

Здесь и далее мы будем рассматривать процесс упругого πN -рассеяния (рис. I).

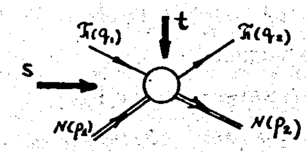

Рис. I.

Введем обычные мандельстамовские переменные

$$s=(p_1+q_1)^2=\left(\sqrt{M^2+q_s^2}+\sqrt{\mu^2+q_s^2}\right)^2$$

$$u=(p_1-q_2)^2=\left(\sqrt{M^2+q_s^2}-\sqrt{\mu^2+q_s^2}\right)^2-2q_s^2(1+\cos\theta_s) \quad (1)$$

$$t=(p_2-p_1)^2=-2q_s^2(1-\cos\theta_s),$$

где M – масса нуклона, μ – пиона, θ_s – угол рассеяния и q_s – импульс в с.ц.м. s канала

$$q_s^2=\frac{[s-(M+\mu)^2][s-(M-\mu)^2]}{4s}. \qquad (2)$$

Физические области на плоскости s,u ограничены кривыми (рис. 2)

$$s+u=2M^2+2\mu^2 \qquad (\cos\theta_s=1)$$
$$su=(M^2-\mu^2)^2 \qquad (\cos\theta_s=-1)$$

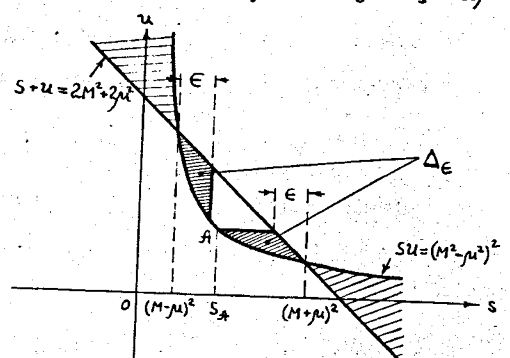

Рис. 2.

Область Δ_ϵ (рис. 2) симметрична относительно $s\leftrightarrow u$ замены. Поэтому интеграл по этой области от произведения комбинации s канальных амплитуд, обладающей определенной симметрией относительно $s\leftrightarrow u$ перестановки на полином $\phi(s,u)$ с противоположной четностью по отношению к той же перестановке, равен нулю. С другой стороны, это приведет к интегральному соотношению на парциальные волны, которое представляет собой перекрестное правило сумм.

Обычно в качестве области Δ_ϵ используют весь гиперболический сектор /3/, что необходимо для вывода правил сумм, включающих конечное число парциальных волн. Такие правила сумм полезны при проверке свойств кроссинг-симметрии различных модельных выражений для парциальных волн. Однако из них трудно получить ограничения на энергетическую зависимость парциальных волн, вытекающие из условий кроссинг-симметрии. Для этой цели более пригодны правила сумм по области интегрирования, зависящей от параметра. Выбранная нами область Δ_ϵ удобна для нахождения поправок $\sim 1/M$ к статическим перекрестным соотношениям /5/ и исследования вопроса о разложении парциальных волн по степеням q_s в окрестности порога перекрестной реакции. Разобьем область Δ_ϵ на две части: область $\Delta_\epsilon^{(1)}$, определенную следующим образом

$$\Delta_\epsilon^{(1)}=\left\{\begin{array}{c}-1\le\cos\theta_s\le 1\\ (M-\mu)^2\le s\le (M-\mu)^2+\epsilon\\ (M+\mu)^2-\epsilon\le s\le (M+\mu)^2\end{array}\right\},$$

и остаток, который обозначим через $\Delta_\epsilon^{(2)}$. Для наших целей необходимо найти линейные комбинации s -канальных амплитуд (с коэффициентами, зависящими от s и u), которые:

1. Имеют определенную s,u -симметрию.

2. При интегрировании по области $\Delta_\epsilon^{(1)}$ приводят к соотношениям между конечным числом парциальных волн.

Эта задача решается /3/ обращением к спиральным амплитудам с определенным изоспином в t -канале (они имеют определенную $s\leftrightarrow u$ симметрию) и выражением их посредством перекрестных соотношений /6/ через спиральные амплитуды s -канала. В результате получаются следующие четыре типа перекрестных правил сумм:

$$\int\limits_{\Delta_\epsilon} ds\,du\, \phi^{(s)}(s,u)\left[M\cos\frac{\theta_s}{2}F_{++}^{(-)} + E\sin\frac{\theta_s}{2}F_{+-}^{(-)}\right] = 0 \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{\Delta_\epsilon} ds\,du\, \phi^{(A)}(s,u)\left[M\cos\frac{\theta_s}{2}F_{++}^{(+)} + E\sin\frac{\theta_s}{2}F_{+-}^{(+)}\right] = 0 \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{\Delta_\epsilon} ds\,du\, q_{s}^2\sqrt{s}\,\sin\theta_s\, \phi^{(s)}(s,u)\left[E\sin\frac{\theta_s}{2}F_{++}^{(+)} - M\cos\frac{\theta_s}{2}F_{+-}^{(+)}\right] = 0 \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\Delta_\epsilon} ds\,du\, q_{s}^2\sqrt{s}\,\sin\theta_s\, \phi^{(A)}(s,u)\left[E\sin\frac{\theta_s}{2}F_{++}^{(-)} - M\cos\frac{\theta_s}{2}F_{+-}^{(-)}\right] = 0, \tag{3.4}$$

где $\phi^{(s)}(s,u)$ и $\phi^{(A)}(s,u)$ - есть симметричный и антисимметричный относительно $s \leftrightarrow u$ замены полиномы; $E=\sqrt{M^2+q_s^2}$ - энергия нуклона в системе центра масс s -канала, а F_{++} и F_{+-} - спиральные амплитуды πN -рассеяния /7/. Верхние значки (+) и (-) означают обычные комбинации амплитуд с определенным изоспином

$$F^{(+)} = \frac{1}{3}(F_{1/2} + 2F_{3/2})$$

$$F^{(-)} = \frac{1}{3}(F_{1/2} - F_{3/2}).$$

Спиральные амплитуды F_{++} и F_{+-} связаны с парциальными волнами $f_{\ell\pm}$ соотношениями

$$F_{+\pm} = 4\pi\sqrt{s}\sum_{J}(2J+1)\left[f_{\ell+}(s) \pm f_{(\ell+1)-}(s)\right] d^{J}_{1/2,\pm 1/2}(\theta_s). \tag{4}$$

При этом парциальные волны имеют нормировку

$$f_{\ell\pm}(s) = \frac{2\ell\pm\, exp(2i\delta_{\ell\pm})-1}{2iq_s}. \tag{5}$$

Перейдем в правилах сумм (3) от интегрирования по s и u к интегрированию по s и $\cos\theta_s = z$. Используя (4) и выражая функции $d^{J}_{1/2,\pm 1/2}(\theta_s)$ через полиномы Лежандра $P_\ell(z)$, получим из (3):

$$\int\limits_{(M-\mu)^2}^{(M-\mu)^2+\epsilon} ds\, \mathcal{J}_i^{(0)}(s) + \int\limits_{(M+\mu)^2-\epsilon}^{(M+\mu)^2} ds\, \mathcal{J}_i^{(0)}(s) + \int\limits_{S_A}^{(M+\mu)^2-\epsilon} ds \int\limits_{-1}^{1+\frac{t(s)}{2q_s^2}} dz\, \mathcal{J}_i(s,z) = 0 \quad (i=1\div 4) \tag{6}$$

где (см. рис. 2)

$$t(s) = (M+\mu)^2 - s - \epsilon \qquad S_A = \frac{(M^2-\mu^2)^2}{(M-\mu)^2+\epsilon}$$

и

$$\mathcal{J}_i^{(0)}(s) = \int\limits_{-1}^{1} dz\, \mathcal{J}_i(s,z) \qquad (i=1\div 4), \tag{7}$$

а $\mathcal{J}_i(s,z)$ имеют вид

$$\mathcal{J}_1 = q_s^2\sqrt{s}\,\phi^{(s)}(s,z)\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\left\{(E+M)\left[f^{(-)}_{\ell+}P_\ell(z) + f^{(-)}_{(\ell+1)-}P_{\ell+1}(z)\right] + (M-E)\left[f^{(-)}_{\ell+}P_{\ell+1}(z) + f^{(-)}_{(\ell+1)-}P_\ell(z)\right]\right\} \tag{8.1}$$

$$\mathcal{J}_2 = q_s^2\sqrt{s}\,\phi^{(A)}(s,z)\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\left\{(E+M)\left[f^{(+)}_{\ell+}P_\ell(z) + f^{(+)}_{(\ell+1)-}P_{\ell+1}(z)\right] + (M-E)\left[f^{(+)}_{\ell+}P_{\ell+1}(z) + f^{(+)}_{(\ell+1)-}P_\ell(z)\right]\right\} \tag{8.2}$$

$$\mathcal{J}_3 = q_s^4 \cdot s\,\phi^{(s)}(s,z)\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\Big\{\left[E(1-z) - M(1+z)\right]\left[f^{(+)}_{\ell+}\cdot P_\ell(z) + f^{(+)}_{(\ell+1)-}\cdot P_{\ell+1}(z)\right] +$$
$$+\left[E(1-z) + M(1+z)\right]\left[f^{(+)}_{\ell+}P_{\ell+1}(z) + f^{(+)}_{(\ell+1)-}P_\ell(z)\right]\Big\} \tag{8.3}$$

$$\mathcal{J}_4 = q_s^4 \cdot s\,\phi^{(A)}(s,z)\sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\Big\{\left[E(1-z) - M(1+z)\right]\left[f^{(-)}_{\ell+}P_\ell(z) + f^{(-)}_{(\ell+1)-}\cdot P_{\ell+1}(z)\right] +$$
$$+\left[E(1-z) + M(1+z)\right]\left[f^{(-)}_{\ell+}P_{\ell+1}(z) + f^{(-)}_{(\ell+1)-}P_\ell(z)\right]\Big\}. \tag{8.4}$$

Явные выражения для $\mathcal{J}_i^{(0)}$, соответствующие простейшим полиномам $\phi^{(s)}$ и $\phi^{(A)}$, приведены в Приложении.

Дифференцируя (6) по ϵ, получим

$$\mathcal{J}_i^{(0)}\left[(M-\mu)^2+\epsilon\right] - \frac{1}{2}\int\limits_{S_A}^{(M+\mu)^2-\epsilon}\frac{ds}{q_s^2}\,\mathcal{J}_i\left[s, 1+\frac{t(s)}{2q_s^2}\right] = 0 \quad (i=1\div 4) \tag{9}$$

В следующих параграфах мы покажем, что хотя соотношения (9), вообще говоря, включают бесконечное число парциальных волн, они оказываются весьма полезными для нахождения ограничений, накладываемых на энергетическую зависимость парциальных волн условиями кроссинг-симметрии. Здесь же заметим, что правила сумм, полученные в работе /3/, в наших обозначениях имеют вид:

$$\int_{(M-\mu)^2}^{(M+\mu)^2} ds\, \mathcal{J}_i^{(0)}(s) = 0 .$$

§ 3. Перекрестные соотношения для парциальных волн в статическом пределе

Рассмотрим соотношения (9) в статическом пределе ($M \to \infty$). При этом парциальные волны удобно рассматривать как функции энергии пиона в л.с.к., которую мы обозначим через ω. В соотношениях (9) мы сохраним члены $\sim 1/M$, отбрасывая члены более высокого порядка. Учитывая, что

$$s = M^2 + \mu^2 + 2M\omega \qquad q_s^2 = \frac{\omega^2 - \mu^2}{1 + \frac{2\omega}{M} + \frac{\mu^2}{M^2}} ,$$

получим

$$\mathcal{J}_i^{(0)}(\delta-\mu) - M \int_{\omega_A}^{\mu-\delta} \frac{d\omega}{q_s^2}\, \mathcal{J}_i\left[\omega, 1 + \frac{M(\mu-\delta-\omega)}{q_s^2}\right] = 0 \quad (i = 1 \div 4), \tag{10}$$

где

$$\delta = \frac{\epsilon}{2M} \qquad \omega_+ = \mu - \delta - 2\delta(2\mu-\delta)\frac{1}{M} + O(1/M^2) .$$

Для дальнейшего удобно перейти в (10) от интегрирования по ω к интегрированию по переменной z, связанной с ω соотношением

$$\omega = \mu - \delta - \frac{1}{M}\delta(2\mu-\delta)(1-z) + O(1/M^2), \tag{11}$$

тогда

$$q_s^2 = -\delta(2\mu-\delta)\left[1 - \frac{2}{M}(\mu-\delta) z\right] + O(1/M^2), \tag{12}$$

$$1 + \frac{M(\mu-\delta-\omega)}{q_s^2} = z - \frac{z}{M}(\mu-\delta)(1-z^2) + O(1/M^2), \tag{13}$$

используя (11) - (13) и заменяя $\mu - \delta \to \omega$ из (10) имеем

$$\mathcal{J}_i^{(0)}(\omega) + \mathcal{J}_i^{(0)}(-\omega) + \frac{2\omega}{M}\int_{-1}^{1} dz(1+z)\mathcal{J}_i(\omega,z) + \frac{q_s^2}{M}\int_{-1}^{1} dz(1-z)\frac{\partial \mathcal{J}_i(\omega,z)}{\partial\omega} - \frac{2\omega}{M}\int_{-1}^{1} dz(1-z^2)\frac{\partial \mathcal{J}_i(\omega,z)}{\partial z} = 0 \quad (i = 1 \div 4). \tag{14}$$

Определим $\tilde{\mathcal{J}}_i(\omega,z) = \mathcal{J}_i(\omega,z)/(\omega^2-\mu^2)$, тогда (14) принимает вид

$$\tilde{\mathcal{J}}_i^{(0)}(\omega) + \tilde{\mathcal{J}}_i^{(0)}(-\omega) + \frac{4\omega}{M}\int_{-1}^{1} dz\,\tilde{\mathcal{J}}_i(\omega,z) + \frac{q_s^2}{M}\int_{-1}^{1} dz(1-z)\frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}_i(\omega,z)}{\partial\omega} - \frac{2\omega}{M}\int_{-1}^{1} dz(1-z^2)\frac{\partial \mathcal{J}_i(\omega,z)}{\partial z} = 0 \quad (i = 1 \div 4). \tag{15}$$

Из общей формы статических перекрестных соотношений (15) легко получить соответствующие выражения для конкретных парциальных волн. Например, формулы (A1) - (A4) Приложения вместе с соответствующими выражениями из (8) приводят к следующим соотношениям для S и P волн

$$S^{(-)}(\omega) + S^{(-)}(-\omega) = -\frac{2\omega}{M}S^{(-)}(\omega) - \frac{q_s^2}{M}\frac{dS^{(-)}(\omega)}{d\omega} + \frac{4\omega}{3M}\left[P_1^{(-)}(\omega) + 2P_3^{(-)}(\omega)\right] + \frac{q_s^2}{3M}\frac{d}{d\omega}\left[P_1^{(-)}(\omega) + 2P_3^{(-)}(\omega)\right] \tag{16}$$

$$P_1^{(-)}(\omega) + 2P_3^{(-)}(\omega) + P_1^{(-)}(-\omega) + 2P_3^{(-)}(-\omega) = \frac{q_s^2}{M}\frac{dS^{(-)}(\omega)}{d\omega} + \frac{6\omega}{M}\left[P_1^{(-)}(\omega) + 2P_3^{(-)}(\omega)\right] -$$
$$- \frac{q_s^2}{M}\frac{d}{d\omega}\left[P_1^{(-)}(\omega) + 2P_3^{(-)}(\omega)\right] + \frac{12\omega}{5M}\left[2D_3^{(-)}(\omega) + 3D_5^{(-)}(\omega)\right] + \frac{2q_s^2}{5M}\frac{d}{d\omega}\left[2D_3^{(-)}(\omega) + 3D_5^{(-)}(\omega)\right] \tag{17}$$

$$S^{(+)}(\omega) - S^{(+)}(-\omega) = -\frac{2\omega}{M}S^{(+)}(\omega) - \frac{q_s^2}{M}\frac{dS^{(+)}(\omega)}{d\omega} + \frac{4\omega}{3M}\left[P_1^{(+)}(\omega) + 2P_3^{(+)}(\omega)\right] + \frac{q_s^2}{3M}\frac{d}{d\omega}\left[P_1^{(+)}(\omega) + 2P_3^{(+)}(\omega)\right] \tag{18}$$

$$P_1^{(+)}(\omega) - P_3^{(+)}(\omega) + P_1^{(+)}(-\omega) - P_3^{(+)}(-\omega) = -\frac{8\omega}{M}\left[P_1^{(+)}(\omega) - P_3^{(+)}(\omega)\right] - \frac{2q_s^2}{M}\frac{d}{d\omega}\left[P_1^{(+)}(\omega) - P_3^{(+)}(\omega)\right] +$$
$$+ \frac{36\omega}{5M}\left[D_3^{(+)}(\omega) - D_5^{(+)}(\omega)\right] + \frac{6q_s^2}{5M}\frac{d}{d\omega}\left[D_3^{(+)}(\omega) - D_5^{(+)}(\omega)\right]. \tag{19}$$

Здесь нижний индекс у P -волн означает удвоенный полный момент $2J$. Сравнение (I6) и (I8) показывает симметрию перекрестных соотношений для $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ волн. Опуская соответствующее доказательство, заметим, что подобная симметрия имеет место и для других парциальных волн. Если в (I5) отбросить члены $\sim 1/M$, то мы приходим к соотношениям

$$\tilde{\mathfrak{I}}_i^{(o)}(\omega) + \tilde{\mathfrak{I}}_i^{(o)}(-\omega) = 0 \,. \tag{20}$$

Можно показать, что соотношения (20) совпадают с известными статическими перекрестными соотношениями /5/, которые имеют вид

$$F(-\omega) = \mathcal{A}\, F(\omega). \tag{2I}$$

Здесь (в обозначениях $f_{\ell\pm}^{2I}$ для парциальных волн)

$$F = \begin{Vmatrix} f_{\ell-}^{1} \\ f_{\ell-}^{3} \\ f_{\ell+}^{1} \\ f_{\ell+}^{3} \end{Vmatrix} \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{3(2\ell+1)} \begin{Vmatrix} -1 & -4 & -(2\ell+2) & 4(2\ell+2) \\ -2 & -1 & 2(2\ell+2) & 2\ell+2 \\ -2\ell & 8\ell & -1 & 4 \\ 4\ell & 2\ell & 2 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Матрица кроссинг-симметрии А есть прямое произведение орбитальной и изоспиновой кроссинг-матриц

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(\ell)} \times \mathcal{A}^{(I)} \qquad \mathcal{A}^{(\ell)} = \frac{1}{2\ell+1} \begin{Vmatrix} -1 & 2\ell+2 \\ 2\ell & 1 \end{Vmatrix} \qquad \mathcal{A}^{(I)} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{23}$$

Эквивалентность (20) и (2I) для S и P волн нетрудно показать, исходя из (I6) - (I9). В случае S волн имеются только две различные волны (соответствующие двум значениям изоспина). Поэтому для S -волн матрица кроссинг-симметрии совпадает с изоспиновой кроссинг-матрицей, явный вид которой приводится в (23). Отсюда для S волн

$$\begin{aligned} S^{(+)}(-\omega) &= S^{(+)}(\omega) \\ S^{(-)}(-\omega) &= -S^{(-)}(\omega). \end{aligned} \tag{24}$$

Для P волн из (2I) и (22) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} P_1^{(+)}(-\omega) - P_3^{(+)}(-\omega) &= -\left[P_1^{(+)}(\omega) - P_3^{(+)}(\omega) \right] \\ P_1^{(-)}(-\omega) + 2P_3^{(-)}(-\omega) &= -\left[P_1^{(-)}(\omega) + 2P_3^{(-)}(\omega) \right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Соотношения (24) и (25) совпадают с (I6) - (I9) в пределе $M \to \infty$. В заключении этого параграфа обратим внимание на то, что уже в порядке I/M соотношения кроссинг-симметрии не только перепутывают парциальные волны с различными ℓ, но и содержат производные парциальных волн /8/.

§ 3. Поведение парциальных волн πN -рассеяния в окрестности кроссинг-порога

Применим теперь результаты § 2 для анализа зависимости парциальных волн от q_s вблизи кроссинг-порога. Расмотрим правила сумм (9) в пределе малых ϵ. Регулярность парциальных волн как функций q_s вблизи упругого порога в силу ϵ -произвола приводит к их регулярности вблизи кроссинг-порога. Поэтому, разлагая парциальную волну с данным ℓ в ряд по степеням q_s в окрестности кроссинг-порога, с помощью (9) удается выразить коэффициенты этого ряда через коэффициенты соответствующих разложений для парциальных волн с $\ell' \leq \ell$ в окрестности упругого порога.

Ограничимся исследованием линейных по q_s членов вблизи обоих порогов и параметризуем парциальные волны в окрестности упругого порога следующим образом:

$$q_s^{2\ell+1} \operatorname{Ctg} \delta_{\ell 2J}^{(\pm)} = a_{\ell 2J}^{(\pm)} + O(q_s^2). \tag{26}$$

Тогда в нормировке (5) имеем, используя спектроскопические обозначения для парциальных волн L_{2J}^{2I}:

$$L_{2J}^{(\pm)}(q_s) = a_{\ell 2J}^{(\pm)} \left(1 + i a_{\ell 2J}^{(\pm)} q_s\right) \cdot q_s^{2\ell} + O(q_s^{2\ell+2}) \tag{27}$$

В окрестности кроссинг-порога используем разложение

$$L^{(\pm)}_{2J}(q_s) = \alpha^{(\pm)}_{\ell 2J} + \beta^{(\pm)}_{\ell 2J}\cdot q_s + O(q_s^2) \qquad (28)$$

(для S волн как и в § 3 индекс $2J$ мы будем опускать). Сделаем сначала некоторые общие заключения относительно коэффициентов α и β в (28). В соответствии с пороговым поведением (27) ясно, что эти коэффициенты зависят только от S волновых длин рассеяния a_s. Причем в силу линейности правил сумм (9) по парциальным волнам коэффициенты α выражаются через a_s линейно, а β квадратично.

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что любой антисимметричный полином $\phi^{(A)}$ можно представить в виде

$$\phi^{(A)}(s,u) = (s-u)\,\phi^{(s)}(s,u),$$

где полином $\phi^{(s)}$ симметричен относительно $s \leftrightarrow u$ замены. Поскольку из (I)

$$s-u = 2[s-M^2-\mu^2] - 2q_s^2(1-\cos\theta_s),$$

то из правил сумм (9) нетрудно показать, что α и β выражаются через a_s одинаковым образом для (+) и (–) волн, исключая общий знак. С этой симметрией мы уже встречались в предыдущем параграфе.

Далее, используя выражения (8) и реккурентные соотношения для полиномов Лежандра, можно показать, что коэффициенты α и β не зависят от полного момента J, то есть

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell+} &= \alpha_{\ell-} \\ \beta_{\ell+} &= \beta_{\ell-}. \end{aligned} \qquad (29)$$

Непосредственное вычисление коэффициентов α и β можно производить, исходя из правил сумм вида

$$\mathcal{J}_1^{(0)}[q_1(\lambda)] = \frac{(M+\mu)^2}{M\mu}\int\limits_{q_1(\lambda)}^{q_2(\lambda)} \frac{dq_s}{q_s}\,\mathcal{J}_1\Big[q_s, -\frac{\lambda^2}{2q_s^2} - \frac{M^2+\mu^2}{2M\mu}\Big] \qquad (30)$$

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon}\,, \quad q_1(\lambda) = \frac{i\lambda\sqrt{M\mu}}{M-\mu}\,, \quad q_2(\lambda) = \frac{i\lambda\sqrt{M\mu}}{M+\mu}\,,$$

которые вытекают из (9) при пренебрежении членами $\sim q_s^2$ в (28). Кроме того, в этом приближении можно заменить E на M, поскольку

$$E = M + \frac{q_s^2}{2M} + O(q_s^4).$$

Полагая в $\mathcal{J}_1$ $\phi^{(s)} = 1$, получим из выражения (A.I) Приложения

$$\mathcal{J}_1^{(0)}(\lambda) = -\frac{4M^3\mu}{M-\mu}\Big[\alpha_s^{(-)} + \beta_s^{(-)}\frac{i\lambda\sqrt{M\mu}}{M-\mu}\Big]\lambda^2 + O(\lambda^4). \qquad (31)$$

С другой стороны, используя (8.I) и обозначая через I_1 интеграл в правой части (30), получим

$$I_1 = -\frac{4M^3\mu(M+\mu)}{(M-\mu)^2}\,a_s^{(-)}\lambda^2 + \frac{4M^2\mu\sqrt{M\mu}\,(3M^2+\mu^2)}{3(M-\mu)^2}\,a_s^{(-)2}\lambda^3 + O(\lambda^4). \qquad (32)$$

Приравнивая в (31) и (32) коэффициенты при одинаковых степенях в соответствии с (30), получим

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(-)} &= -\frac{M+\mu}{M-\mu}\,a_s^{(-)} \\ \beta_s^{(-)} &= -i\,\frac{3M^2+\mu^2}{3M(M-\mu)}\,a_s^{(-)2}. \end{aligned} \qquad (33)$$

В силу указанной выше симметрии между (+) и (–) волнами сразу же заключаем, что

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(+)} &= \frac{M+\mu}{M-\mu}\,a_s^{(+)} \\ \beta_s^{(+)} &= i\,\frac{3M^2+\mu^2}{3M(M-\mu)}\,a_s^{(+)2} \end{aligned} \qquad (34)$$

Полагая теперь в (8.I) $\phi^{(s)} = -\frac{t}{2} = q_s^2(1-z)$, используя (A.2) и (29), получим

$$\begin{aligned} \alpha_{P1}^{(\pm)} &= \alpha_{P3}^{(\pm)} = 0 \\ \beta_{P1}^{(\pm)} &= \beta_{P3}^{(\pm)} = \mp i\,\frac{\mu(5M^2-\mu^2)}{15M^2(M-\mu)}\,a_s^{(\mp)2}. \end{aligned} \qquad (35)$$

Оказывается, что равенство коэффициентов α нулю имеет место и для высших парциальных волн ($\ell \geq 2$). Для доказательства положим в $\mathcal{J}_1$ $\phi^{(s)} = \left(-\frac{t}{2}\right)^n = q_s^{2n}(1-z)^n$ и воспользуемся (29). Тогда (30) даст правило сумм, в котором в левую часть будут входить парциальные волны с $\ell \leq n$, коэффициенты при которых будут отличны от нуля. Поэтому по индукции заключаем, что равенства

$$\alpha^{(\pm)}_{\ell \geq 2} = 0 \qquad (36)$$

имеют место, если вклад S волн в левую часть (30) совпадает с интегралом в правой части в пренебрежении линейными по q_s членами в (27) и (28). Таким образом, требуется доказать равенство

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = I,$$

где

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = 2M(M-\mu)\, q_1^{2n+2}(\lambda)\, \alpha_s^{(-)} \int_{-1}^{1} (1-z)^n dz$$

и

$$I = -\frac{2M(M+\mu)^3}{M\mu} a_s^{(-)} \int_{q_1(\lambda)}^{q_2(\lambda)} dq_s\, q_s^{2n+1} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2q_s^2} + \frac{M^2+\mu^2}{2M\mu}\right)^n.$$

Последний интеграл можно вычислить, если сделать замену переменной

$$z = -\frac{\lambda^2}{2q_s^2} - \frac{M^2+\mu^2}{2M\mu}.$$

В результате вычислений с использованием (33) получаем

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = I = \frac{M(M\mu)^{n+1}(M+\mu)(-1)^n 2^{n+2}}{(n+1)(M-\mu)^{2n+2}} \alpha_s^{(-)} \lambda^{2n+2},$$

что доказывает (36). Подобные рассуждения для коэффициентов $\beta_{\ell \geq 2}$ показывают, что они отличны от нуля. Таким образом, вблизи кроссинг-порога мы получили следующее поведение парциальных волн[9]

$$f_\ell \sim q_s \quad (\ell \geq 1).$$

Приложение

В данном Приложении мы приводим явный вид простейших выражений для $\mathcal{J}_i^{(0)}(s)$, вытекающих посредством (7) из соотношений (8).

Из (8.I) при $\phi^{(s)} = 1; -\frac{t}{2}$ имеем:

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = 2q_s^2\sqrt{s}\left[(E+M)S^{(-)} - (E-M)P_1^{(-)}\right] \qquad (A.I)$$

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = \frac{2}{3}q_s^4\sqrt{s}\left[(2E+M)S^{(-)} - (2E-M)P_1^{(-)} - (E+M)P_3^{(-)} + (E-M)D_3^{(-)}\right]. \qquad (A.2)$$

Из (8.2) при $\phi^{(A)} = s-u$ и (8.3) при $\phi^{(s)} = 1$ имеем:

$$\mathcal{J}_2^{(0)} = \frac{4}{3}q_s^2\sqrt{s}\Big\{3(s-M^2-\mu^2)\left[(E+M)S^{(+)} - (E-M)P_1^{(+)}\right] - -2q_s^2\left[(2E+M)S^{(+)} - (2E-M)P_1^{(+)} - (E+M)P_3^{(+)} + (E-M)D_3^{(+)}\right] \qquad (A.3)$$

$$\mathcal{J}_3^{(0)} = 2q_s^4 s\left[(E-M)S^{(+)} + (E+M)P_1^{(+)} - (E+M)P_3^{(+)} - (E-M)D_3^{(+)}\right]. \qquad (A.4)$$

Положим в (8.I) $\phi^{(s)} = su; \frac{t^2}{4}$, тогда

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = \frac{2}{3}q_s^2 s\sqrt{s}\Big\{3(s-2M^2-2\mu^2)\left[(E+M)S^{(-)} - (E-M)P_1^{(-)}\right] - -4q_s^2\left[(2E+M)S^{(-)} - (2E-M)P_1^{(-)} - (E+M)P_3^{(-)} + (E-M)D_3^{(-)}\right]\Big\} \qquad (A.5)$$

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = \frac{2}{15}q_s^6\sqrt{s}\Big[5(M+3E)S^{(-)} - 5(3E-M)P_1^{(-)} - 4(3E+2M)P_3^{(-)} + +4(3E-2M)D_3^{(-)} + 3(E+M)D_5^{(-)} - (E-M)F_5^{(-)}\Big]. \qquad (A.6)$$

Взяв в (8.2) $\phi^{A} = -\frac{t}{2}(s-u)$, получим

$$\mathcal{J}_2^{(0)} = \frac{8}{15}q_s^4\sqrt{s}\Big\{5(s-M^2-\mu^2)\left[(2E+M)S^{(+)} - (2E-M)P_1^{(+)} - (E+M)P_3^{(+)} + (E-M)D_3^{(+)}\right] - -q_s^2\left[5(M+3E)S^{(+)} - 5(3E-M)P_1^{(+)} - 4(3E+2M)P_3^{(+)} + 4(3E-2M)D_3^{(+)} + 3(E+M)D_5^{(+)} - (E-M)F_5^{(+)}\right]\Big\}. \qquad (A.7)$$

Выбирая в (8.3) $\phi^{(s)} = -\frac{t}{2}$, имеем

$$\mathcal{J}_3^{(0)} = \frac{4}{15} q_s^6 \sqrt{s} \left[5(E-M) S^{(+)} + 5(E+M) P_1^{(+)} - 2(4E+M) P_3^{(+)} - \right. \qquad \text{(A.8)}$$
$$\left. -2(4E-M) \mathcal{D}_3^{(+)} + 3(E+M) \mathcal{D}_5^{(+)} + 3(E-M) F_5^{(+)} \right].$$

Наконец, положив в (8.4) $\phi^{(A)} = s-u$, получим

$$\mathcal{J}_4^{(0)} = \frac{8}{15} q_s^4 s \left\{ 5(s-M^2-\mu^2) \left[(E-M) S^{(-)} + (E+M) P_1^{(-)} - (E+M) P_3^{(-)} - (E-M) \mathcal{D}_3^{(-)} \right] - \right.$$
$$\left. - q_s^2 \left[5(E-M) S^{(-)} + 5(E+M) P_1^{(-)} - 2(4E+M) P_3^{(-)} - 2(4E-M) \mathcal{D}_3^{(-)} + 3(E+M) \mathcal{D}_5^{(-)} + 3(E-M) F_5^{(-)} \right] \right\}. \qquad \text{(A.9)}$$

Литература

1. Balachadran A.P. and Nuyts J. Phys.Rev., 172, 1821 (1968).
2. Roskies R. Phys.Lett. 30B, 42 (1969); Nuovo Cimento 65A, 467 (1970).
3. Basdevant J.C., Cohen-Tannoudji G. and Morel A., Nuovo Cimento 64A, 585 (1969).
4. Cooper C.S. and Pennington M.R. J.Math., Phys. 12, 1509 (1971).
5. Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А. "Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях". Наука, М., 1967.
6. Truemann T.L. and Wick G.C., Ann.Phys. 26, 322 (1964).
7. Jacob M. and Wick G.C., Ann.Phys., 7, 104 (1959).
8. Edwards S. and Metthews P., Phil.Mag. 2, 839 (1957).
9. Hamilton J., in: High energy physics, vol. I, ed. E.H.S. Burhop (Academic Press, New York,(1967).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июня 1973 года.