

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



C324.18

П-58

23/VII-73

P2 - 7219

Х.Д. Попов, Д.Ц. Стоянов

2665/2-73

О ДУАЛЬНЫХ ДИАГРАММАХ

С ЗАМКНУТОЙ ПЕТЛЕЙ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7219

Х.Д. Попов, Д.Ц. Стоянов

О ДУАЛЬНЫХ ДИАГРАММАХ
С ЗАМКНУТОЙ ПЕТЛЕЙ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Попов Х.Д., Стоянов Д.Ц.

P2 - 7219

О дуальных диаграммах с замкнутой петлей

С помощью бесконечного набора пятимерных осцилляторов построено выражение для дуальной диаграммы с одной замкнутой петлей и двумя внешними реджионами. Путем присоединения к ней двух когерентных состояний и на основе дуальности показано, что в промежуточные состояния диаграммы с одной замкнутой петлей и N внешними частицами дают вклад только те операторы, которые соответствуют внешним частицам.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Popov C.D., Stoyanov D.Ts.

P2 - 7219

On the Dual Diagrams with One Closed Loop

We find an expression for the dual diagram with one closed loop and two excited particles with the help of an infinite set of 5-dimensional oscillators.

Joining to the diagram two coherent states and using duality we show, that the only contributions to the intermediate states in the dual diagram with one closed loop and N external particles come from those oscillators, which correspond to the external particles.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

В работах^{/1-3/} был предложен метод факторизации дуальной N -точечной функции B_N с помощью конечного набора пятимерных осцилляторов. В них указано, что в простейшем случае мультипериферических диаграмм этот набор можно дополнить до бесконечного набора таких же осцилляторов. Так как в дуальные состояния^{/2/} при этом входит конечное число операторов рождения, при вычислении B_N лишние операторы исчезают, и результат остаётся таким же, как и при факторизации с конечным набором осцилляторов.

Разработанная диаграммная техника^{/2/} позволила построить планарную диаграмму с одной замкнутой петлей. Полученное для этой диаграммы выражение сходится, в отличие от аналогичного выражения^{/4/}, полученного методом Фубини, Гордона и Венециано^{/5/}. Используемый метод, однако, оставил открытым вопрос об учёте всех необходимых промежуточных состояний.

В настоящей работе показано, что, как и в случае мультипериферических диаграмм, в промежуточных состояниях диаграмм с одной замкнутой петлей дают вклад только те операторы, которые соответствуют внешним частицам. Для этой цели используется свойство дуальности, согласно которому однопетлевая диаграмма с N концами эквивалентна мультипериферической диаграмме с собственно-энергетической поправкой в одной из внутренних линий. Выражение для последней диаграммы получается путем применения формализма, предложенного в работе^{/6/} и позволяющего делать переходы между разными дуальными диаграммами.

Пусть a_i^+ , a_i - пятимерные операторы рождения и уничтожения осцилляторного типа и их компоненты $a_{i\epsilon}^+$, $a_{i\epsilon}$ удовлет-

выяют коммутационным соотношениям:

$$[a_{i\ell}, a_{j\ell}^*] = \delta_{ij} G_{\ell\ell}, [a_{i\ell}, a_{j\ell}] = [a_{i\ell}^*, a_{j\ell}^*] = 0 \quad \ell, c = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$-G_{00} = G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{44} = 1. \quad (I)$$

Согласно развитой в работе [2] диаграммной технике дуальная диаграмма рис. I.

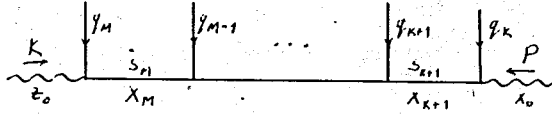


Рис. I.

имеет вид

$$\prod_{i=k+1}^M dx_i \chi_i^{-\lambda(i)-1} \prod_{i=k}^M \prod_{\ell=1}^{i-1} \prod_{\ell=1}^{i-1} \Gamma_i^{\circ} \quad (2)$$

где операторы Γ_i и Γ_i° даются формулами

$$\Gamma_i = \left(\prod_{\ell=1}^i \chi_{\ell} \right)^{H^a} \prod_{n=i+1}^M \left(1 - \prod_{\ell=1}^n \chi_{\ell} a_{i\ell} \right)^{-2i\sqrt{\lambda} \frac{a_i}{a_{i\ell}} \cdot \varphi_n - \beta_{i,n}} e^{(a_i a_i^*)} |0\rangle_{a_i}$$

$$\langle 0| \left(\prod_{\ell=1}^i \chi_{\ell} \right)^{H^a} \prod_{n=i+1}^M \left(1 - \prod_{\ell=1}^n \chi_{\ell} a_{i\ell} \right)^{-2i\sqrt{\lambda} \frac{a_i}{a_{i\ell}} \cdot \varphi_n - \beta_{i,n}}$$

$$\Gamma_i^{\circ} = \left(\prod_{\ell=1}^i \chi_{\ell} \right)^{H^a} \prod_{n=i+1}^M \left(1 - \prod_{\ell=1}^n \chi_{\ell} a_{i\ell} \right)^{-2i\sqrt{\lambda} \frac{a_i}{a_{i\ell}} \cdot \varphi_n - \beta_{i,n}} \quad (3)$$

$$\beta_{i,n} = (1 + \lambda(i) + \lambda' \varphi_i^2 + \lambda \varphi_n^2) \beta_{i,n}$$

В этих формулах a_i — пятимерный вектор с компонентами $(-i\sqrt{\lambda} \varphi_i, 1)$, а $(a_i a_i^*)$ и $a_i \cdot \varphi_n$ обозначают соответственно пятимерное скалярное произведение векторов a_i и a_i^*

$$(a_i a_i^*) = \sum_{\ell=0}^4 G^{\ell\ell} a_{i\ell} a_{i\ell}^*$$

и лоренцовское скалярное произведение

$$\varphi_n \cdot a_i = \sum_{\mu=0}^4 \gamma^{\mu\mu} \varphi_{n\mu} a_{i\mu} \quad \gamma^{00} = -\gamma^{11} = -\gamma^{22} = -\gamma^{33} = 1.$$

Гамильтониан H^a i -того осциллятора имеет вид

$$H^a = (a_i^* a_i) = \sum_{\ell=0}^4 G^{\ell\ell} a_{i\ell}^* a_{i\ell}$$

Подставляя в (2) выражения для Γ_i и Γ_i° из формул (3) и переходя к новым переменным [7]

$$\sigma_i = \prod_{\ell=k+1}^i \chi_{\ell} \quad \sigma_k \equiv 1, \quad \sigma_{M+1} \equiv 0,$$

получаем

$$d\varphi_{M-k+3}(\sigma, \varphi) e^{\sum_{i=k}^M (a_i a_i^*) \frac{\sigma_i}{\sigma_i} \prod_{k \leq \ell < i \leq M} \sigma_{\ell}^{H^a - H_{k\ell}^a} \prod_{k \leq \ell < i \leq M} (1 - \sigma_{\ell} a_{i\ell})^{-2i\sqrt{\lambda} \frac{a_i}{a_{i\ell}} \cdot \varphi_n - \beta_{i,n}}}$$

$$\prod_{i=1}^{k-1} \prod_{n=k}^M (1 - \sigma_n a_{i\ell})^{-2i\sqrt{\lambda} \frac{a_i}{a_{i\ell}} \cdot \varphi_n - \beta_{i,n}}, \quad (4)$$

где введены обозначения

$$H^a = \sum_{i=1}^M H^a, \quad \langle 0|_k = \prod_{i=k}^M \langle 0|_i$$

$d\varphi_{M-k+3}(\sigma, \varphi)$ — подынтегральная функция $(M-k+3)$ -точечной амплитуды:

$$d\varphi_{M-k+3}(\sigma, \varphi) = \prod_{i=k+1}^M d\sigma_i \prod_{k \leq i < n \leq M+1} (\sigma_i - \sigma_n)^{-2i\sqrt{\lambda} \varphi_n - \beta_{i,n}}$$

$$\varphi_{M+1} \equiv k \quad (5)$$

Если ввести второй набор операторов b_i^+ , b_i ($i=1, 2, \dots, M$), удовлетворяющих коммутационным соотношениям (I), выражение (4) принимает вид

$$\hat{B}_{M-k+3} D_{M-k+1, k-1},$$

где

$$D_{M-k+1, k-1} = \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{n=k}^M (1 - a_{i\ell} b_n^*)^{\sum_{\ell=0}^4 \frac{a_{i\ell} b_n^*}{a_{i\ell} b_n^*} - \beta_{i,n}} \quad (6)$$

- оператор, который возникал при факторизации мультипериферических диаграмм и был подробно рассмотрен в работе [2], а \hat{B}_{M-k+3} - оператор

$$\hat{B}_{M-k+3} = d\varphi_{M-k+3}(\sigma, \rho) e^{\sum_{i=k}^M (a_i, a_i^*) \sigma_{i,n}^*} |0\rangle \sum_{a_1, \dots, a_k} e^{\sum_{i=k}^M (a_i, b_i) \sigma_{i,n}} (b_{n+1}^*) \prod_{i=k+1, i \neq M} (1 - a_i, b_{n+1}^*)^{\frac{2a_i \cdot b_{n+1}^*}{a_i b_{n+1}^*}} H^{a_i} H^{b_i} H^{a_i} H^{b_i} \quad (7)$$

Легко проверить, что если импульсы P и K лежат на массовой поверхности внешних частиц (т.е. $P^2 = K^2 = m^2$), то

$$\int_{ab} \langle 0 | \hat{B}_{M-k+3} | 0 \rangle_{ab} = \int d\varphi_{M-k+3}(\sigma, \rho) = B_{M-k+3} \quad (8)$$

Операторы \hat{B} обладают следующим свойством перемножения

$$\hat{B}_{M-k+2} G D_{M-k, k-L} \hat{B}_{k-L+2} D'_{M-k, k-L} = \hat{B}_{M-L+2} \quad (9)$$

где пропагатор G имеет вид

$$G = \frac{1}{H^{a,b} - \alpha(P^2)} = \int_0^1 dx x^{H^{a,b} - \alpha(P^2) - 1} \quad (10)$$

а оператор $D'_{M-k, k-L}$ дается формулой

$$D'_{M-k, k-L} = \prod_{i=k+1}^M \prod_{n=1}^k (1 - a_i, b_{n+1}^*)^{\frac{2a_i \cdot b_{n+1}^*}{a_i b_{n+1}^*} - \beta_{i,n}} \quad (11)$$

Формула (8) показывает, что при получении мультипериферических диаграмм оператор $\prod_{i=k+1}^M \prod_{n=1}^k (1 - a_i, b_{n+1}^*)^{\frac{2a_i \cdot b_{n+1}^*}{a_i b_{n+1}^*} - \beta_{i,n}}$ не даёт вклада, так как справа от него стоит вакуум, при воздействии на который оператор обращается в единицу. Поэтому, пока речь идет о факторизации мультипериферических диаграмм, цепочке рис. I может быть поставлен в соответствие и оператор

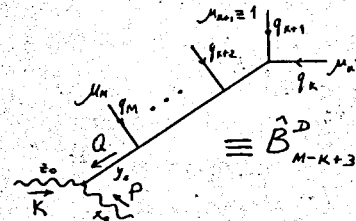
$$R_{M-k+1} = d\varphi_{M-k+3}(\sigma, \rho) e^{\sum_{i=k}^M (a_i, a_i^*) \sigma_{i,n}^*} |0\rangle \sum_{a_1, \dots, a_k} e^{\sum_{i=k}^M (a_i, a_i) \sigma_{i,n}} (b_{n+1}^*) H^{a_i} H^{b_i} \quad (12)$$

Неоднозначность в определении оператора, соответствующего диаграмме рис. I, является следствием того, что мы выделяем этот оператор, зная только значение его вакуумного среднего. Поэтому каждый дополнительный операторный множитель, который, подействовав на вакуум, обращается в единицу, не будет влиять на факторизацию мультипериферических диаграмм. Легко проверить, что операторы R удовлетворяют равенству

$$R_{M-k+1} D_{M-k, k-L} G R_{k-L+1} = R_{M-L+1} \quad (13)$$

т.е. они связаны между собой с помощью обычных D - операторов, заданных формулой (8).

Диаграмму мультипериферического типа с собственно-энергетической поправкой в одной из внутренних линий мы получим путём соединения двух диаграмм следующего типа (рис. 2).



Переход из выражения (7), соответствующего диаграмме рис. I., к \hat{B}_{M-k+3}^D , совершается заменой старых переменных σ_i ($i=k+1, \dots, M$) новыми y_i и μ_i ($i=k+2, \dots, M$) :

$$\sigma_i = \frac{1 - t y_i \frac{\mu_i}{\mu_i}}{1 - x_0 t y_i \frac{\mu_i}{\mu_i}} \quad t = \frac{1 - z_0}{f + x_0 y_0} \quad (14)$$

где f удовлетворяет уравнению^{/8/}

$$(f+x_0 y_0)(f+y_0 z_0)(f+z_0 x_0) = (f+x_0 y_0 z_0)^2 \quad (15)$$

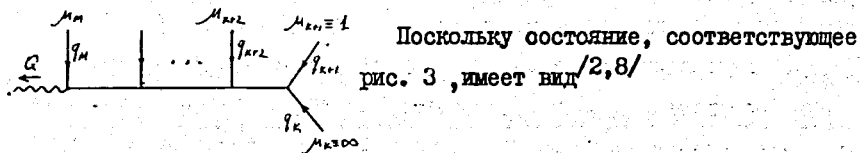


Рис. 3.

$$|\Psi_{M-K+1}^c\rangle = d_{M-K+2}^c(\mu, \eta) e^{\sum_{i=K}^M (a_i^+ c_i^+)} \prod_{i=K}^M \theta_{KM}^b(g_i) |0\rangle_c \quad (16)$$

где c_i^+ , c_i удовлетворяют коммутационным соотношениям (I), то после замены (I4) получаем

$$\hat{B}_{M-K+2}^D = \Gamma_{KM} d(y,t) (y,t)^{H_{KM}^c - \alpha(a^+) - 1} |\Psi_{M-K+1}^c\rangle \quad (17)$$

Оператор Γ_{KM} дается формулой

$$\Gamma_{KM} = \sum_{\alpha} \theta_{KM}^a(g_2) e^{\sum_{i=K}^M (a_i^+ c_i)} |0\rangle_{\alpha} \langle 0|_{\alpha} e^{\sum_{i=K}^M (b_i c_i)} \theta_{KM}^b(g_1) \quad (18)$$

$$(-1)^{H_{KM}^{ab}} (b_{M+1}^+) H_{KM}^{ab} \prod_{K \leq i < j \leq M} (1 - a_{ij} b_{ij}^+) \frac{a_{ij} b_{ij}^+}{a_{ij} b_{ij}^+} \prod_{i=K}^M (1 - c_{i+1})^{-2i b_{i+1}^+ c_i - K - \rho_{i, M+1}} (1 - x_0 c_{i+1})^{-2i b_{i+1}^+ c_i - \rho_{i, M+2}} (1 - x_0)^{-\alpha(Q^2)}$$

Здесь g_1 и g_2 - матрицы, принадлежащие группе $SL(2, R)$:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{1-x_0} & \sqrt{1-x_0} \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\eta x_0^+}{1-x_0}} & \sqrt{\frac{\eta}{1-x_0}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{1-y_0 t}{1-x_0 y_0 t} \quad (19)$$

а $\theta(g)$ - операторы представления этой группы, определённые в работе^{/6/}. Их действие на когерентные состояния задаётся равенством:

$$\theta(g) e^{(za^+)} |0\rangle = e^{(za^+) \frac{1}{z_1} (gz_1)} |0\rangle, \quad (20)$$

где

$$(gz_1) = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R). \quad (20^I)$$

Верхний значок у операторов $\theta(g)$ в формуле (18) указывает, на какой тип операторов действует соответствующее представление (нужно помнить, что все три набора a_i, a_i^+ , b_i, b_i^+ и c_i, c_i^+ коммутируют между собой) и, кроме того, введено обозначение:

$$\theta_{KM}^a(g) = \prod_{i=K}^M \theta^{a_i}(g). \quad (21)$$

Γ_{KM} является оператором трехреджонной вершины, к которой могут быть присоединены когерентные состояния с операторами a_i^+ , b_i^+ и c_i^+ и с полными импульсами K , P и Q . В отличие от трехреджонной вершины, полученной в работе^{/8/}, оператор Γ_{KM} несимметричен. Второе отличие состоит в том, что в Γ_{KM} не включены соответствующие D - операторы, с помощью которых к нему можно присоединять состояния $|\Psi\rangle_a$ и $|\Psi\rangle_b$.

Уже на этом этапе мы можем освободить Γ_{KM} от зависимости от индекса "K", т.е. сделать его зависящим от бесконечного набора операторов. Для этого надо сначала определить действие оператора $\theta(g)$ на вакуум. Воспользуемся тем фактом, что полуплоскость $\text{Im } z_1 > 0$ инвариантна по отношению к дробно-линейным преобра-

зованиям из $SL(2, R)$, т.е., если

$$\text{Im } z_+ > 0, \quad \text{то и} \quad \text{Im } \frac{\alpha z_+ + \beta}{\gamma z_+ + \delta} > 0.$$

Тогда действие $\theta(g)$ на вакуум можно рассматривать как результат действия на произвольное когерентное состояние с $\text{Im } z_+ > 0$, после чего последовательно сделаны предельные переходы $\text{Re } z_+ \rightarrow 0$ и $\text{Im } z_+ \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \theta(g)|0\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{z_+ \rightarrow 0} \theta(g) e^{-z_+ a^+ + (z_+ + i\epsilon) a_+^+} |0\rangle = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{z_+ \rightarrow 0} e^{(-\frac{z_+ a^+}{z_+ + i\epsilon} + a_+^+) \frac{\alpha(z_+ + i\epsilon) + \beta}{\gamma(z_+ + i\epsilon) + \delta}} |0\rangle = e^{\frac{\beta}{\delta} a_+^+} |0\rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь дополним все наборы a_i, a_i^+, b_i, b_i^+ и c_i, c_i^+ такими же операторами, индексы которых пробегает значения от $k-1$ до $-\infty$. Тогда Γ_{KM} можно записать в виде

$$\Gamma_{KM} = \langle 0 | \theta_{KM}^a(g_2) e^{i\sum_{i=1}^M (a_i^+ c_i)} |0\rangle_{ab} \langle 0 | e^{i\sum_{i=1}^M (b_i c_i)} \theta_{KM}^b(g_1). \quad (23)$$

$$(-1)^{H_{KM}^{ab}} (\theta_{KM}^a)^{H_{KM}^{ab}} \prod_{i < n \leq M} (1 - a_{n+1} b_{i+1}^+) \frac{2 a_{n+1} b_{i+1}^+}{a_{n+1} b_{i+1}^+} (1 - x_0)^{-\alpha(Q^2)}$$

где

$$\prod_{i \in M} (1 - c_{i+1})^{-2i\sqrt{\alpha} \frac{c_i}{c_{i+1}} \cdot K - \beta_{i, M+1}} (1 - x_0 c_{i+1})^{-2i\sqrt{\alpha} \frac{c_i}{c_{i+1}} \cdot P - \beta_{i, M+2}}$$

$$\langle 0 | \equiv \langle 0 |_{-\infty}^M, \quad \theta_{KM}^a(g) = \prod_{i \in M} \theta^{a_i}(g), \quad H_{KM}^{ab} = H_{-M, M}^{ab}. \quad (24)$$

Легко проверить, что выражение для \hat{B}_{M-k+3} не изменяется, если в (I7) подставить Γ_{KM} вместо Γ_{KM} и к состоянию (I6) добавить справа все вакуумы $|0\rangle_{i < k}$. Этот факт является

следствием того, что в силу определения (22) все лишние множители, появляющиеся при продолжении, действуя на $|0\rangle_{i < k}$, обращаются в единицу. Таким образом, оператор Γ_{KM} уже не зависит от того, из какой "N-хвостки" был выделен, и к нему можно присоединять состояния с произвольным числом внешних частиц.

Дальше нам понадобится выражение для диаграммы рис. 4. Оно получается из (I7) с помощью эрмитового сопряжения, замены знаков четырехимпульсов внешних частиц и преобразования индексов

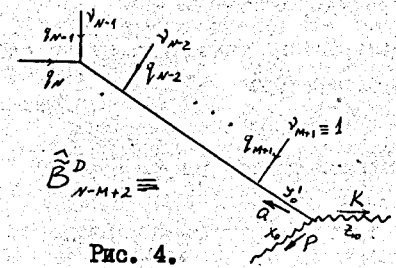


Рис. 4.

как внешних частиц, так и переменных Коба-Нильсена. Другими словами, если \hat{B}_{M-k+3}^D и \hat{B}_{N-M+2}^D содержат одни и те же внешние частицы (т.е. $N = 2M - k + 1$ и $y_i = y_{M-k-1}$), то оба состояния эрмитово сопряжены друг другу.

Таким образом, для \hat{B}_{N-M+2}^D получаем

$$\hat{B}_{N-M+2}^D = \langle \Psi_{N-M} | d(y_i t') (y_0 t')^{H_{M+1}^c - \alpha(Q^2) - 1} \bar{\Gamma}_{M+1}, \quad (25)$$

где

$$\langle \Psi_{N-M} | = dy_{N-M+1} (y_0 t') \langle 0 |_{MN} e^{i\sum_{i \in MN} (a_i c_i) y_i}, \quad y_{M+1} = 1, \quad y_N = 0 \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{M+1} &= (1 - x_0)^{-\alpha(Q^2)} \prod_{i \geq M+1} (1 - x_0 c_{i+1}^+)^{2i\sqrt{\alpha} \frac{c_i^+}{c_{i+1}^+} \cdot P - \beta_{M+1, i}} (1 - c_{i+1}^+)^{2i\sqrt{\alpha} \frac{c_i^+}{c_{i+1}^+} \cdot K - \beta_{M+1, i}} \\ &(\theta_{M+1, y}^{ab})^{H_{KM}^{ab}} \prod_{n \geq M+1} (1 - a_{n+1}^+ b_{n+1}) \frac{2 a_{n+1}^+ b_{n+1}}{a_{n+1}^+ b_{n+1}} (-1)^{H_{M+1}^{ab}} \theta_{M+1}^b(y_i) \\ &e^{i\sum_{i \in MN} (c_i^+ b_i^+)} |0\rangle_{ab} \langle 0 |_{MN} e^{i\sum_{i \in MN} (c_i^+ a_i)} \theta_{M+1}^a(y_i) |0\rangle_{MN} \end{aligned}$$

$$g_1 \equiv g_1, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{x_0^2 \gamma'}{1-x_0}} & \sqrt{\frac{\gamma'}{1-x_0}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\gamma'(1-x_0)}} & \frac{1}{\sqrt{\gamma'(1-x_0)}} \end{pmatrix}, \quad \gamma' = \frac{1-x_0 t'}{1-x_0 \gamma' t'}, \quad t' = \frac{1-z_0}{f'+x_0 \gamma'}$$

$$(f'+x_0 \gamma')(f'+\gamma' z_0)(f'+z_0 x_0) = (f'+x_0 \gamma' z_0)^2 \quad (27)$$

Выражение для мультипериферической диаграммы с собственной-энергетической поправкой в одной из внутренних линий рис. 5 получится путем соединения двух диаграмм рис. 2 и рис. 4. Поскольку, как мы уже отметили, $\Gamma_{\leq M}$ и $\tilde{\Gamma}_{\geq M+1}$ не содержат операторов D для a_i^+, a_i и b_i^+, b_i , то, согласно диаграммной технике, сшивание сводится к взятию следа от произведения операторов \tilde{B}_{M-K+3}^D и \tilde{B}_{M-M+2}^D , пропагаторов и соответствующих D -операторов с последующим интегрированием по внутреннему четырехимпульсу ℓ полученной петли:

$$L^D = \int Sp_{ab} \left\{ \tilde{B}_{M-M+2}^D D_1 \frac{1}{H^{ab} - \alpha(K^2)} \tilde{B}_{M-K+3}^D D_2 \frac{1}{H^{ab} - \alpha(P^2)} \right\} d^4 \ell \quad (28)$$

Из конкретного вида операторов \tilde{B} видно, что сначала нужно подсчитать

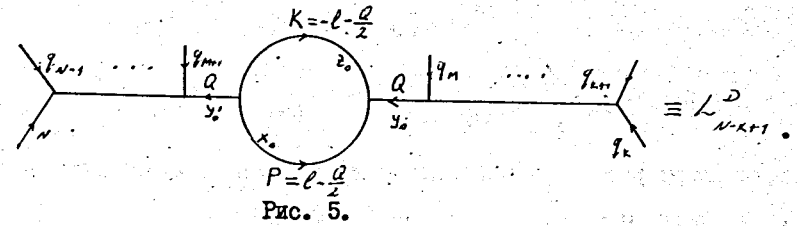
$$Sp_{ab} \left\{ \tilde{\Gamma}_{\geq M+1} \frac{1}{H^{ab} - \alpha(K^2)} D_1 \Gamma_{\leq M} \frac{1}{H^{ab} - \alpha(P^2)} D_2 \right\}, \quad (29)$$

где

$$D_1 = \prod_{i \in M} \prod_{n \geq M+1} (1 - a_{in} b_{ni}^+) \frac{a_{in} a_{ni}^+}{a_{in} a_{ni}^+} - \delta_{in}$$

$$D_2 = \prod_{n \in M} \prod_{i \geq M+1} (1 - b_{in} b_{ni}^+) \frac{b_{in} b_{ni}^+}{b_{in} b_{ni}^+} - \delta_{in} \quad (30)$$

$$\rho = 1 + \alpha' m^2$$



Множитель $(1 - \ell_i^+)^{\rho}$, который выделен в операторе D_2 , появляется из-за способа продолжения выражения (6) с бесконечным набором осцилляторов. Оператор ℓ_i^+ является пятой компонентой одного из операторов \tilde{B}_{ia}^+ , индекс которого опущен и которому в правом состоянии $|\psi_{M-K+1}^{\rho}\rangle$ (формула (16)) не соответствует внешняя частица (сколь много частиц не входило бы в $|\psi_{M-K+1}^{\rho}\rangle$). Как увидим впоследствии, этот множитель превращается в $(1 - x_0)^{\rho}$, изменяя тем самым пропагатор $\chi_{H^{ab} - \alpha(P^2) - 1}$. Такое изменение пропагатора является следствием дуальной замены, как это имело место при переходе из мультипериферической к полумультипериферическим диаграммам^[6]. Отметим ещё, что в случае модели Вирасоро^[9] такой множитель не появляется. Вычисляя Sp_{ab} способом, предложенным в работе^[2], получаем оператор L^c , соответствующий диаграмме рис. 6 в виде

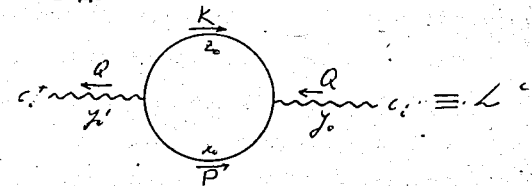


Рис. 6.

$$L^c = \int d^4 \ell d\alpha_0 d z_0 \chi_{H^{ab} - \alpha(P^2) - 1} \chi_{H^{ab} - \alpha(K^2) - 1} (1 - x_0)^{-2\alpha(\alpha^2)} \prod_{i \geq M+1} (1 - \ell_i^+)^{\rho} \prod_{i \in M} (1 - c_{in}^+) \frac{c_{in}^+ c_{ni}^+}{c_{in}^+ c_{ni}^+} - \delta_{in} \prod_{i \in M} \prod_{n \geq M+1} (1 - z_{in} c_{in}) (g_i^+ c_{ni}^+) \frac{c_{in}^+ c_{ni}^+}{c_{in}^+ c_{ni}^+} - \delta_{in} (1 + x_0 (g_i^+ c_{in}))^{-\rho}$$

$$\prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^M (1-x_i g_i c_{i,iv}) (g_i c_{i,iv})^{\frac{\epsilon_i \cdot \epsilon_{iv}}{\epsilon_{iv} \cdot \epsilon_{iv}}} \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^M (1-x_i z_i g_i' c_{i,iv}') (g_i' c_{i,iv}')^{\frac{\epsilon_i \cdot \epsilon_{iv}}{\epsilon_{iv} \cdot \epsilon_{iv}}}$$

$$\prod_{i=1}^M (1-x_i z_i g_i' c_{i,iv}') (g_i' c_{i,iv}')^{\frac{\epsilon_i \cdot \epsilon_{iv}}{\epsilon_{iv} \cdot \epsilon_{iv}}} \left[\prod_{i=1}^M (1-c_{iv})^{-2\epsilon_i \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iv}}} \prod_{i=1}^M (1-x_i c_{iv})^{-2\epsilon_i \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iv}}} \prod_{i=1}^M (1-x_i c_{iv})^{-2\epsilon_i \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{iv}}} \right] \cdot P \cdot \beta_{i,M+2} \quad (31)$$

где, согласно рис. 5, связь между внутренним четырехимпульсом ℓ и импульсами P и K дается формулами:

$$P = \ell - \frac{Q}{2} \quad K = -\ell - \frac{Q}{2} \quad (32)$$

При получении формулы (31) мы воспользовались свойством (20) операторов θ^a , θ^b и обозначения $(g_i c_{i,iv})$, $(g_i' c_{i,iv}')$ и т.д. нужно понимать в смысле формулы (20'). Видно, что \mathcal{L}^c зависит только от номеров частиц, которые будут непосредственно присоединены к нему с обеих сторон, а само число частиц в левом и правом состоянии может быть произвольным.

Если теперь вычислить матричный элемент оператора \mathcal{L}^c между состояниями $\langle \Psi_{N-M+1} |$ и $|\Psi_{M-k+1} \rangle$, то получится выражение для диаграммы рис. 5. Это выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N-k+1}^D &= \int d^4 \ell d^4 p_{N-M+1}(v, q) d^4 p_{M-k+2}(\mu, \eta) d^4 x_\alpha d^4 x_\beta \dots^{-x(P^0)-1} \\ & d^4 z_\alpha d^4 z_\beta \dots^{-x(K^0)-1} d(y_\alpha t)(y_\beta t) \dots^{-x(Q^0)-1} d(y_\alpha t')(y_\beta t') \dots^{-x(Q^0)-1} (1-x_i)^{-2x(Q^0)} \\ & \prod_{i=1}^M (1-x_i y_i t' v_i)^{-2x \beta_i \cdot P - \beta_{M+1, i}} (1-x_i' t' v_i')^{-2x \beta_i' \cdot K - \beta_{M+1, i}'} \prod_{i=1}^M (1-x_i t' \frac{\mu_{ii}}{\mu_i})^{-2x \beta_i \cdot K - \beta_{M+1, i}'} \\ & \prod_{i=1}^M (1-x_i y_i t \frac{\mu_{ii}}{\mu_i})^{-2x \beta_i \cdot P - \beta_{i, M+2}} \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^M (1-z_i g_i y_i t \frac{\mu_{ij}}{\mu_i}) (g_i' t' v_i')^{-2x \beta_i \cdot q_n - \beta_{i, n}} \\ & \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^M (1-x_i g_i y_i t \frac{\mu_{ij}}{\mu_i} X g_i' t' v_i')^{-2x \beta_i \cdot q_n - \beta_{i, n}} \prod_{k \in \{1, \dots, M\}} \prod_{s \in \{1, \dots, M\}} (1-x_i z_i \gamma'(g_i y_i t \frac{\mu_{ij}}{\mu_i})(g_j y_j t \frac{\mu_{jk}}{\mu_j}))^{-2x \beta_i \cdot q_n} \\ & \prod_{M+1 \leq i \leq N} \prod_{M+1 \leq j \leq N} (1-x_i z_i \gamma(g_i' y_i t' v_i')(g_j' t' v_j'))^{-2x \beta_i \cdot q_n} \end{aligned} \quad (33)$$

где положено $\beta_{i, \nu_k} = \beta$.

Легко показать, что выражение (33) совпадает с выражением для однопетлевой диаграммы с $N-k+1$ внешними частями, полученным в работе [2]. Для этого необходимо сделать обратные дуальные замены:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_i}{\mu_i'} &= \frac{1-\sigma_i}{y_i t (1-x_i \sigma_i)} \quad i=k+1, \dots, M \\ \nu_i &= \frac{\gamma' - \tau_i}{y_i t' (x_i \gamma' - \tau_i)} \quad i=M+2, \dots, N, \end{aligned} \quad (34)$$

переобозначить $x_i \equiv x_k$ и $z_i \equiv x_{M+1}$ и перейти к переменным x_i по формулам

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-1}} \quad i=k+1, \dots, M \\ x_i &= \frac{\tau_i}{\tau_{i-1}} \quad i=M+2, \dots, N \end{aligned} \quad (35)$$

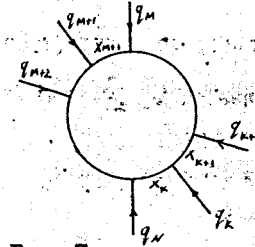


Рис. 7.

В результате получается известное выражение [2], соответствующее диаграмме рис. 7.

Таким образом, в настоящей работе получен оператор \mathcal{L}^c (31) с графическим изображением, данным на рис. 6., в котором учтены все промежуточные состояния. Этот оператор можно рассматривать как собственную энергетическую поправку к старому пропагатору $\frac{D}{N-x(Q^0)}$. При вычислении матричного элемента \mathcal{L}_{N-k+1}^D (33) можно было увидеть, что множители, содержащие c_i и c_i' , которым не соответствуют внешние частицы, обращаются в единицу. В этом случае происходит сокращение вкладов от лишних осцилляторов, аналогичное имевшему место в случае мультипериферических диаграмм.

Авторы выражают свою глубокую благодарность А.Н. Тавхелидзе В.А. Матвееву, Р.М. Мурадян и А.Н. Квинихидзе за многочисленные и весьма полезные обсуждения этой работы.

Литература:

1. А.Н. Квинихидзе, Б.Л. Марковски, Д.Ц. Стоянов, А.Н.Тавхелидзе
ТМЭ, 6, 166 (1971).
2. А.Н. Квинихидзе, Х.Д.Попов, Д.Ц.Стоянов, А.Н.Тавхелидзе
ТМЭ, 9, 190 (1971).
3. A.N.Kvinikhidze, B.L.Marcovski, C.D.Popov, D.Ts.Stoyanov,
A.N.Tavhelidze, Proc.of the Int.Sem.on Binary Reactions,Dubna,
1971, D-6004.
4. D.Amati, C.Bouchiat, J.L.Gervais, Lett.al Nuovo Cim. 2,399
(1969).
5. S.Fubini, D.Gordon, G.Veneziano, Phys.Lett. 29B, 679 (1969).
6. Х.Д. Попов, Д.Ц. Стоянов, А.Н. Тавхелидзе. ТМЭ, 12, 370 (1972).
7. E.Donini, S.Sciuto, Ann.Phys. 58, 388 , 1970.
8. Х.Д. Попов, Д.Ц. Стоянов. Препринт ОИЯИ P2-6740 (1972).
9. M.A.Virasoro, Phys.Rev., 1D, 2933 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июня 1973 года.