ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 7210

М.И.Широков

"ОДЕВАНИЕ" И ТЕОРЕМА ХААГА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7210

М.И.Широков

"ОДЕВАНИЕ" И ТЕОРЕМА ХААГА

Submitted ***to Acta Physica Polonica***

Введение

Для релятивистских локальных теорий взаимодействующих полей хорошо известны две корпускулярные интерпретации: в терминах "голых" и *in-out* частиц. Первая есть корпускулярная интерпретация свободных полей, но используемая в случае, когда между полями включено взаимодействие. Ее недостатки известны. Для корректной формулировки задач рассеяния применяются *in-out* операторы. Однако задача их нахождения в данной лагранжевой теории фактически совпадает с задачей диагонализации полного гамильтониана H. Обычно *in-out* операторы не находятся, а постулируются.

В этой работе обсуждается корпускулярная интерпретация в терминах "одетых" частиц. Под "одетой" будет пониматься частица, описываемая с помощью операторов рождения-уничтожения α^+, α, со следующими свойствами:

а/ Спектр индексов, нумерующих α^+, α, должен быть таким же, как у "голых" операторов a^+, a. Перестановочные соотношения для α^+, α тоже канонические:

$$[\alpha_p, \alpha^+_{p'}] = \delta(p - p'). \qquad /1/$$

Берется обычное фоковское представление /1/ так, что существует оператор числа частиц, необходимый для корпускулярной интерпретации.

б/ Бесчастичный вектор этого представления Ω /$\alpha_p \Omega = 0$ для всех p / совпадает с физическим вакуумом теории /собственный вектор H с наименьшей энергией/.

в/ Одночастичные состояния $a_p^+\Omega$ тоже должны быть собственными векторами H.

К этим основным требованиям /ср. /1/ / следует добавить ряд дополнительных. Например, состояние $a_p^+\Omega$ должно быть собственным вектором полного импульса, должно обладать определенными квантовыми числами типа заряда, четности и т.п. /2/. Для настоящей работы существенными будут только свойства а/, б/.

Существуют и другие определения "одевания", см. конец раздела I. Заметим, что *in – out* операторы удовлетворяют требованиям а/, б/, в/, но, кроме этого, они еще обладают свойством стационарности всех состояний вида $a_{p_1}^+ \dots a_{p_n}^+ \Omega$. Подробнее по поводу связи *in – out* операторов с "одетыми" см. далее раздел I. В основном раздел I посвящен демонстрации нелокальности "одетого поля". Это свойство "одевания" самым существенным образом используется во втором разделе, где обосновывается основное утверждение работы: на основании теоремы Хаага нельзя отвергнуть возможность "одетой" корпускулярной интерпретации релятивистской локальной теории поля. Наоборот, "одевание" есть способ преодоления трудностей, указываемых теоремой Хаага.

I. "Одевание" и нелокальность

Изложим упрощенный вариант формальной процедуры "одевания", принадлежащей Фаддееву /3/. Она приложима к любым релятивистским локальным теориям поля.

Пусть для определенности плотность гамильтониана взаимодействия является произведением трех операторов поля /квантовая электродинамика $\bar\psi \gamma_\mu \psi A_\mu$, взаимодействие Юкавы $\bar\psi\psi\phi$ и т.п./. Операторы уничтожения "голых" частиц /электронов, фотонов, нуклонов мезонов/ обозначаем через a_p. Их бесчастичный вектор Ω_0 / $a_p\Omega_0 = 0$ для всех p / является собственным вектором свободной части гамильтониана H_0, но не полного гамильтониана H, поскольку во взаимодействии есть члены, содержащие произведения одних только /трех/ операторов рождения. Члены взаимодействия, содержащие произведения двух операторов рождения и одного оператора уничтожения /мы их будем называть членами типа /2,1//, препятствуют тому, чтобы одночастичные состояния $a_p^+ \Omega_0$ были собственными векторами H. Остальные члены взаимодействия /тип /0,3/ и /1,2// эрмитово сопряжены к перечисленным.

Введем вместо a_p новые операторы α_p, связанные с a_p формально унитарным преобразованием

$$a_p = W \alpha_p W^+, \qquad a_p^+ = W \alpha_p^+ W^+ \qquad /2/$$

/чтобы выполнялись свойства а/, см. введение/. Один из простейших примеров: $W = \exp\left[\frac{1}{2}\int d^3p\, \chi(|p|)(\alpha_p \alpha_{-p} - \alpha_p^+ \alpha_{-p}^+)\right]$, что соответствует линейному преобразованию:

$$a_p = ch\, \chi(|p|)\alpha_p + sh\, \chi(|p|)\alpha_{-p}^+ . \qquad /3/$$

Обозначим через $H(a^+, a)$ полный гамильтониан, выраженный через "голые" операторы a^+, a. Если в это выражение ввести α^+, α вместо a^+, a, то получится полный гамильтониан как функция α^+, α:

$$H(a^+, a) = H(W\alpha^+W^+, W\alpha W^+) = W H(\alpha^+, \alpha) W^+ = K(\alpha^+, \alpha) \qquad /4/$$

/использованы формулы вида $f(W\alpha W^+) = W f(\alpha) W^+$ /. Теперь надо подобрать такое W, чтобы в полном гамильтониане $K(\alpha^+, \alpha)$ не было "плохих" членов типа /3,0/, /2,1/ и вообще типа $(m,0)$ и $(m,1)$ с $m \geq 2$. Именно эти члены препятствуют тому, чтобы бесчастичный вектор Ω и вектора $\alpha_p^+ \Omega$ были собственными состояниями $K(\alpha^+, \alpha)$*.

Построение W осуществляется следующим образом. Пусть $H(a^+, a) = \mathring{H}(a^+, a) + \lambda V(a^+, a)$, где λ - малая константа связи. Представим W в виде $\exp R(\alpha^+, \alpha)$, где антиэрмитов оператор R имеет вид $R = \Sigma_n \lambda^n R_n$, $R_n^+ = -R_n$ /такое представление W упрощает предложенную в /3/ процедуру/.

---

* Заметим, что члены типа /1,1/ допустимы. Именно из них состоит свободная часть K.

Для нахождения $K(a^+,a) = U H(a^+,a) U^+$ воспользуемся формулой

$$e^{A} B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \dots$$

Получим ряд по степеням λ вида

$$K(a^+,a) = K_0(a^+,a) + \lambda K_1(a^+,a) + \lambda^2 K_2(a^+,a) + \dots; \qquad /5/$$

$$K_1 = [R_1, H_0] + V, \; K_2 = [R_2, H_0] + [R_1, V] + \frac{1}{2}[R_1[R_1, H_0]]; \dots \qquad /6/$$

В K_1 входят члены взаимодействия V. Все они "плохие" в случае трехоператорного взаимодействия. Подбором R_1 можно обратить K_1 в нуль. Для этого возьмем в качестве R_1 трехоператорное выражение той же структуры, что и V, но с другими коэффициентными функциями. Тогда $[R_1, H_0]$ будет тоже трехоператорным выражением, которое может быть сделано равным $-V$ подходящим подбором этих коэффициентных функций /оговоримся, что соотношение между массами частиц должно быть таким, чтобы был невозможен распад одной частицы на две/.

Найдя R_1, можно вычислить все члены в K_2, кроме $[R_2, H_0]$, см. /6/. Среди них есть "плохие". Чтобы их выявить, надо произвести нормальное упорядочение членов $[R_1, V]$ и $[R_1[R_1, H_0]] = -[R_1, V]$ /т.е. переставить все операторы рождения налево от операторов уничтожения, пользуясь коммутационными соотношениями /1//. Получим "плохие" члены типа /2.0/, 4 0/, /3.1/. Если взять R_2 в виде суперпозиции членов того же вида, то соответствующие коэффициентные функции в R_2 можно выбрать такими, чтобы $[R_2, H_0]$ компенсировало "плохие" члены от $[R_1, V]$. Аналогично можно убрать "плохие" члены из K_n с любым n /3/.

В K_2, K_3 и т.д. останутся "хорошие" члены, например вида a^+a^+aa. Они описывают взаимодействия, непосредственно ведущие к рассеянию и более сложным реакциям. Покажем, что эти взаимодействия нелокальны.

Введем формально гейзенберговский оператор "одетого поля"

$$\Phi(\vec{x},t)=(2\pi)^{-3/2}\int d\vec{p}\,\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\{e^{-iE_pt+i\vec{p}\vec{x}}a(\vec{p},t)+e^{iE_pt-i\vec{p}\vec{x}}a^+(\vec{p},t)\},\qquad /7/$$

построенный обычным образом из гейзенберговских "одетых" операторов рождения-уничтожения $a(p,t)=\exp(iHt)a\,\exp(-iHt)$. Как и a^+, a, символ Φ представляет совокупность операторов всех полей рассматриваемой теории.

Если бы четырехоператорная часть взаимодействия была локальной, например вида $gA^4(x)$, то тогда в гамильтониан K наряду с a^+a^+aa должны были бы обязательно входить и члены вида $a^+a^+a^+a^+$ и $a^+a^+a^+a$. Но такие члены мы убрали из K как "плохие".

Описанная нелокальность означает, что если для $A(x)=A(\vec{x},t)$ имеем уравнение вида $(\Box+m^2)A(x)=J(x)$, то ток $J(x)$ нелокален в смысле

$$[J(x),J(y)]\neq 0 \qquad \text{при} \qquad (\vec{x}-\vec{y})^2>(x_0-y_0)^2. \qquad /8/$$

Этот раздел мы закончим тремя замечаниями.

1. Процедура Фаддеева в случае локальных исходных взаимодействий приводит к расходимостям. Например, при нормальном упорядочении $[R_1,V]$ возникали члены вида $\int d^3p\,\Delta(p)\,a^+a$, где $\Delta(p)$ дается расходящимся интегралом. Эти члены являются поправками /порядка λ^2/ к свободной части гамильтониана, а $\Delta(p)$ есть поправка к энергии $E_p=\sqrt{p^2+m^2}$. Ввиду этого необходимо вводить вспомогательное обрезание по импульсам и добавлять перенормировочные контрчлены в первоначальное взаимодействие.

Однако даже и с такими усовершенствованиями выражение $\exp R(a^+,a)$ не является оператором, переводящим векторы гильбертова пространства фоковского представления операторов a в векторы того же пространства. Известно, например, что даже простейшее W, соответствующее преобразованию /3/, не является таким оператором /см. /4/ стр. 19 и /5/, §4/. Однако такого рода выражениям можно придать математический смысл, если придерживаться алгебраической точки зрения, изложенной в /6/ и /2/.

2. Описанная процедура "одевания" позволяет обсудить поставленный в /1/ вопрос о связи "одетых" и $in-out$ операторов.

Процедура получения $in-out$ операторов, очень похожая на фаддеевскую, была одновременно дана Вайдлихом /6/. Она сводится к устранению всех членов взаимодействия из K_n, а не только "плохих", так что в терминах in -операторов полный гамильтониан H должен приобрести свободный вид /предполагается, что у него нет связанных состояний/. Это эквивалентно нахождению всех собственных состояний H, см. также /7/. "Одевание" же эквивалентно нахождению только нескольких первых собственных состояний H /вакуумный вектор и одночастичные состояния/. Вопрос о связанных состояниях просто подлежит дальнейшему исследованию /уже в терминах "одетых" операторов/. Если они есть, то спектр индексов "одетых" операторов будет отличаться от спектра индексов $in-out$ операторов. Отметим, что гейзенберговские "одетые" операторы сходятся к $in-out$ операторам сильно, т.е. по норме /8,9/.

3. Заметим, что в литературе под термином "одевающее" часто понимается преобразование, отличающееся от описанного фаддеевского $W = \exp R$, так что некоторые из требований а/, в/, с/ /см. введение/ не выполняются. В частности, например, в показатель экспоненты включают только некоторые члены из ряда $\Sigma_n \lambda^n R_n$, ввиду чего W может быть даже и формально неунитарным /10,11/.

2. "Одевание" и теорема Хаага

Процедура получения "одетых" операторов, изложенная выше, основана на теории возмущений и является формальной /никакие вопросы сходимости не обсуждались/. Поэтому является актуальным обсуждение возражений против подхода "одевания", основанных на теореме Хаага и аналогичных теоремах /12,13/.

Существует первоначальная форма теоремы Хаага

/см. §4 в /4/,§6 в /14/ и /15// и теорема в форме Холла-Вайтмана, содержащая бо́льшее количество предпосылок /см. книги /16,17/ /.

Сначала покажем, что "одевание" есть один из способов преодоления трудности, указываемой первоначальной теоремой Хаага. Для этого изложим ее доказательство в рамках лагранжевого формализма и несколько иначе, чем в /4,14,15/. Начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма. Имеем евклидовски /т.е. трансляционно и вращательно/ инвариантную теорию поля, записанную с помощью операторов рождения-уничтожения a_p^+, a_p. Пусть задано фоковское представление этих операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ с бесчастичным вектором Ω_0. Тогда в $\mathcal{H}_0$ существует единственное нормируемое собственное состояние оператора полного импульса P, и оно совпадает с Ω_0.

Доказательство состоит в перечислении всех собственных состояний P. Как известно, P при любом взаимодействии имеет свободный вид $P_j = \int d^3p\, p_j\, a_p^+ a_p$ *. Спектр P, как одного из генераторов евклидовской группы, должен быть непрерывным. Любой вектор из $\mathcal{H}_0$ можно разложить по набору Ω_0, $a_p^+\Omega_0, \ldots a_{p_1}^+ \ldots a_{p_0}^+ \Omega_0, \ldots$

Все они являются собственными векторами P. Из них только один, а именно Ω_0, является нормируемым. Все остальные ненормируемы. Ненормируемой является и их произвольная суперпозиция:

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \int d^3p_1 \ldots d^3p_n\, F(p_1, \ldots p_n)\, a_{p_1}^+ \ldots a_{p_n}^+\, \Omega\,, \qquad /9/$$

если она есть собственный вектор P. Действительно, /9/ будет таким вектором, если F содержит δ-функцию вида $\delta(p_1+p_2+\ldots+p_n - P)$. А тогда $\int d^3p_1 \ldots d^3p_n |F(p_1 \ldots p_n)|^2$ расходится.

---

* Имеется в виду "*instant form*" теории/18/,в которой время является параметром /состояния задаются в фиксированный момент времени/.

Замечание по поводу единственности нормируемого собственного вектора P. Запишем теорию в терминах других операторов рождения-уничтожения a^+_p, a_p, таких, что P сохраняет свой вид - $P_j = \int d^3p\, p_j\, a^+_p a_p$ /2/. Например, это будет в случае, когда a связаны с a преобразованием /3/. Бесчастичный вектор Ω' /для которого $a_p \Omega' = 0$ / тоже является нормируемым собственным вектором P. В случае преобразования /3/ можно показать, что Ω' не лежит в гильбертовом пространстве с циклическим вектором Ω_0 //4/, стр. 19/.

Теорема. Пусть выполнены условия леммы и пусть существует единственное нормируемое собственное состояние полного гамильтониана H с наименьшей энергией, т.е. вакуумный вектор Ω. Тогда Ω должен совпадать с Ω_0.

Доказательство. Поскольку $[H, P_j] = 0$, то Ω должен быть общим собственным вектором H и P. Но у P и H_0 есть только одно нормируемое собственное состояние, и оно совпадает с Ω_0. Поэтому $\Omega = \Omega_0$.

Фактически во всех локальных теориях Ω не совпадает с бесчастичным вектором "голых" операторов рождения-уничтожения, диагонализующих H_0. Это значит, что в этих теориях не выполняется какая-то из предпосылок теоремы. Обычный вывод /14/ заключается в том, что мы должны отказаться от фоковского представления для "голых" операторов и использовать для них "странные" представления, где нет оператора числа частиц, см., например, §18, 3 в /19/. Из замечания к лемме вытекает, что теорема не препятствует использованию фоковского представления для таких операторов, чей бесчастичный вектор совпадает с вакуумным Ω. Такими операторами как раз и являются "одетые".

Переходим к обсуждению утверждения О.Гринберга /12/: гейзенберговские "одетые" операторы $a(p,t)$, $a^+(p,t)$, описывающие релятивистскую теорию поля и осуществляющие фоковское представление одновременных перестановочных соотношений $[a(p,t), a^+(p',t)] = \delta(p-p')$, должны подчиняться свободным уравнениям движения. Гринберг основывался на теореме Хаага в форме Холла-Вайтмана. Следуя /16, 17/, теорему для наших целей можно сформулировать следующим образом.

Пусть имеем две теории поля. Одна - свободная и описывается набором свободных полей $A_0(x)$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$. Другая описывается неприводимым набором полей $A(x)$. Пусть далее выполнены следующие условия:

1/ $A(x)$ есть оператор в $\mathcal{H}$, в котором существует унитарное представление сдвигов и вращений

$$U(a,R)A(x)U^{+}(a,R)=A(Rx+a)$$

и 1'/ лоренцовских преобразований

$$U(\Lambda)A(x)U^{+}(\Lambda) = A(\Lambda x)$$

/выписан частный случай скалярного поля/.

2/ В $\mathcal{H}$ существует единственное инвариантное состояние $U\Omega = \Omega$.

3/ Существует унитарный оператор V из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}$, такой, что в момент t имеем

$$A(\bar{x},t) = V(t)A_0(\bar{x},t)V^{+}(t).$$

4/ Спектр энергий ограничен снизу.

Тогда $A(x)$ - свободное поле.

В качестве оператора поля, описывающего теорию с взаимодействием, возьмем "одетый" оператор поля /7/. Гринберг заметил, что унитарная эквивалентность 3/ полей $A(x)$ и $A_0(x)$ вытекает из требования а/ к "одетым" операторам /см. введение/. Действительно, разложим $A_0(x)$ обычным образом по операторам $a_0(p)$, $a_0^+(p)$, ср. /7/. Пусть a_0, a_0^+ осуществляют тоже фоковское представление канонических перестановочных соотношений с бесчастичным вектором $\Omega_0 \in \mathcal{H}_0$. /Заметим, что выбор того или иного представления для вспомогательного оператора A_0 находится в нашем распоряжении/. Тогда, согласно известной теореме, операторы $a(p,t)$, $a^+(p,t)$ должны быть связаны с $a_0(p)$, $a_0^+(p)$ унитарным преобразованием $^* a(p,t)=V(t)a_0V(t)$, см. /20/ и §1,6 в /5/. Следовательно, таким же преобразованием связаны $A(x)$ и $A_0(x)$.

---

* Унитарным называется преобразование, сохраняющее норму и преобразующее $\mathcal{H}_0$ во все пространство $\mathcal{H}$.

Считая, что выполнены остальные предпосылки теоремы Хаага, Гринберг заключил, что "одетое поле" $A(x)$ должно быть свободным. Покажем, что в описываемой ситуации не выполняется условие 1'/ теоремы и поэтому это заключение неверно.

Сначала покажем, что для $A(\bar{x}, x_0)$ несправедливо локальное перестановочное соотношение

$$[A(\bar{x}, x_0), A(\bar{y}, y_0)] = 0 \qquad /10/$$

при всех $(\bar{x}, x_0)$ пространственно-подобных $(\bar{y}, y_0)$. Действительно, если бы /10/ имело место, то применяя оператор $(\Box_x^2 + m^2)$ к /10/, мы бы получили соотношение $[J(\bar{x}, x_0), A(y, y_0)] = 0$ при $(\bar{x}, x_0) = (\bar{y}, y_0)$, противоречащее установленной нелокальности тока J для оператора A, см. /8/. Другое доказательство невозможности /10/ см. в /9/.

Нелокальность $A(\bar{x}, t)$ уже означает, что теорему Хаага в данной ситуации нельзя доказывать с помощью теоремы Йоста-Шроера /теорема 4-15 в /16/. В доказательстве Гринберга условие локальности поля не используется /оно и не было нами включено в условия теоремы Хаага/ /12/.

Теперь покажем, что предположение о справедливости 1'/ для $A(\bar{x}, t)$ ведет к противоречию. Заметим, что нелокальное поле $A(\bar{x}, t)$ таково, что /10/ справедливо для некоторых $(\bar{x}, x_0) = (\bar{y}, y_0)$. А именно, при $x_0 = y_0 = t$ имеем

$$[A(x, t), A(y, t)] = 0. \qquad /11/$$

Это следует из одновременных перестановочных соотношений $[a(p, t), a^+(p', t)] = \delta(p - p')$ для гейзенберговских "одетых" операторов $a(p, t) = exp(iHt)a\, exp(-iHt)$ и из разложения /7/. Если было бы верно 1'/, то из /11/ следовала бы справедливость /10/ при всех $(\bar{x}, x_0) = (\bar{y}, y_0)$, что невозможно.

Из теорем, доказанных в /13,21/, фактически следует аналогичное заключение об "одетом поле": несвободным может быть только нелокальное "одетое" поле

Выражаю благодарность В.Гарчинскому за обсуждения теоремы Хаага.

Литература

1. O.Greenberg, S.Schweber. Nuovo Cim., 8, 378 (1958).
2. М.Широков. Препринт ОИЯИ, Р2-6454, Дубна, 1972.
3. Л.Фаддеев. ДАН СССР, 152, 573 /1963/.
4. R.Haag. Dan.Mat.Fys.Medd., 29, No. 12 (1955).
5. Ф.Березин. Метод вторичного квантования. "Наука", Москва, 1965.
6. W.Weidlich. Nuovo Cimento, 30, 809 (1963).
7. К.Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, "Мир", Москва, 1969.
8. R.Haag. Phys.Rev., 112, 669 (1958).
9. М.Браун, Ю.Новожилов. ЖЭТФ, 39, 1317 /1960/.
10. J.Glimm. Commun.Math.Phys., 5, 343 (1967); 10, 1 (1968).
11. K.Hepp. Theorie de la renormalization. Lecture Notes in Physics, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
12. O.Greenberg. Phys.Rev., 115, 706 (1959).
13. J.Lopuszanski. Journ.Math.Phys., 2, 743 (1961).
14. А.Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. "Наука", Москва, 1968.
15. M.Guenin. Lectures in Theor. Phys., v. 9A, Ed. Barut, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 234.
16. Р.Стритер, А.Вайтман. РСТ, спин, статистика и все такое. "Наука", Москва, 1966.
17. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. "Наука", Москва, 1969.
18. P.Dirac. Rev.Mod.Phys., 21, 392 (1949).
19. Г.Бартон. Дисперсионные методы в теории поля. Атомиздат, Москва, 1968.
20. L.Gårding, A.Wightman. Proc. Nat.Acad.Sci. US, 40, 622 (1954).
21. В.Гачок. Украинский математический журнал., 13, 22 /1961/.

Рукопись поступила в издательский отдел 30 мая 1973 года.