СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7142

В.Ш. Гогохия , А.Т. Филиппов

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ РАССЕЯНИЯ НА СИНГУЛЯРНОМ, НЕРЕНОРМИРУЕМОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7142

В.Ш. Гогохия*, А.Т. Филиппов

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ РАССЕЯНИЯ НА СИНГУЛЯРНОМ, НЕРЕНОРМИРУЕМОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

*Институт математики АН Груз.ССР

§ I. ВВЕДЕНИЕ

Проблема выхода за рамки метода теории возмущений или какой-либо ее модификации приобретает важное значение при исследовании неренормируемых теорий поля (N- теории). В связи с этим, в первую очередь, необходимо понять отличие ренормируемых теорий поля (R - теории), где метод теории возмущений, после выполнения перенормировок, приводит к хорошим количественным результатам,[I], от N - теорий, где метод теории возмущений оказался неприменимым и, по крайней мере, требует какой-то модификации. За последние годы было предложено несколько таких методов вычисления поправок от высших приближений в неренормируемых теориях поля[2-5]. Использование этих методов позволило понять природу отличия R -теорий от N -теорий. Как в R - теориях, так и в N -теориях, члены ряда теорий возмущений как функции константы связи g_0 имеют особенность при $g_0 = 0$, однако характер этой особенности существенно различен. В N - теориях амплитуды рассеяния (функции Грина) имеют точку ветвления по g_0 в точке $g_0 = 0$, тогда как в R- -теориях особенность в точке $g_0 = 0$ позволяет разложить их в асимптотический ряд по степеням g_0.

Наиболее просто понять отличие R -теорий от N -теорий и тем самым проследить принципиальные стороны проблемы вычисления высших приближений в N -теориях, в рамках модели нерелятивистского рассеяния на сингулярном потенциале.

В работе[6] был предложен и сформулирован метод вычисления поправок от высших приближений на примере уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом, позволяющий находить волновую функцию и амплитуду рассеяния в виде рядов по степеням $g_0^{\nu}(\ln g_0)^{n_\nu}$, где n_ν - целое число, а ν, в общем случае, - нецелое число (модифицированный ряд теории возмущений). В данной работе после обоснования метода дифференциальной интерполяции ($MDИ$) и применения его к потенциалу $g_0 V(r) = g^2 r^{-6}$ проводится сравнение приближений, получаемых с помощью $MDИ$ с приближениями, получаемыми с помощью "пeратизации" /3/ и обрезания на унитарном пределе/7/.

§ 2. Метод дифференциальной интерполяции

Нерелятивистское уравнение Шредингера

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \ell(\ell+1) r^{-2} - g_0 V(r)\right] u(r) = 0 \qquad (2.I)$$

с граничным условием $u(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$u(k,r) = Z\, u_0^{(1)}(k,r) - g_0 \frac{\pi}{2k}\int_0^r d\rho\, G(r,\rho) V(\rho) u(k,\rho). \qquad (2.2)$$

Здесь Z - нормировочный множитель, а

$$G(r,\rho) = \left[u_0^{(1)}(k,r)\, u_0^{(2)}(k,\rho) - u_0^{(1)}(k,\rho)\, u_0^{(2)}(k,r)\right] \qquad (2.3)$$

$$u_0^{(1)}(k,r) = j_\ell(kr) \equiv \sqrt{kr}\, J_{\ell+1/2}(kr) \underset{r\to 0}{\sim} r^{\ell+1} \qquad (2.3а)$$

$$u_0^{(2)}(k,r) = n_\ell(kr) \equiv \sqrt{kr}\, N_{\ell+1/2}(kr) \underset{r\to 0}{\sim} r^{-\ell} \qquad (2.3б)$$

$u_0^{(1)}(k,r)$, $u_0^{(2)}(k,r)$ являются решениями уравнения (2.I) при $g_0 = 0$. При $k^2 = 0$ уравнение (2.2) имеет вид

$$u(r) = Z r^{\ell+1} + \frac{g_0}{2\ell+1}\int_0^r d\rho\, V(\rho)\left[r^{\ell+1}\rho^{-\ell} - \rho^{\ell+1} r^{-\ell}\right] u(\rho). \qquad (2.4)$$

Итерируя данные интегральные уравнения, можно найти решение $u(r)$ в виде ряда по степеням константы связи g_0. В случае регулярных потенциалов, удовлетворяющих условию $\int_0^{r_0} dr\, r|V(r)| < \infty$, каждый член ряда выражается через сходящийся интеграл, решение является аналитической функцией от g_0 в некоторой окрестности точки $g_0 = 0$, и ряд теории возмущений равномерно сходится при достаточно малых значениях g_0 и r /8/. В случае же сингулярных потенциалов, удовлетворяющих условию $\int_0^{r_0} dr\, r|V(r)| = \infty$, нетрудно убедиться (например, из уравнения (2.4)), что уже первая итерация приводит к расходящимся выражениям, откуда следует, что ряд теории возмущений перестает сходиться, и решение уже не есть голоморфная функция в точке $g_0 = 0$. Поэтому для правильного вычисления поправок от высших приближений необходимо обрезать ядра уравнений (2.I) и (2.4) на нижнем пределе $\varepsilon \equiv D^{-1} > 0$ (что, например, достигается заменой $V(r) \longrightarrow V_\varepsilon(r) = \Theta(r-\varepsilon) V(r)$). Тогда интегральное уравнение (2.2) с обрезанным ядром

$$u(\varepsilon,k,r) = Z_\varepsilon j_\ell(kr) - g_0 \frac{\pi}{2k}\int_\varepsilon^r d\rho\, G(r,\rho) V(\rho)\, u(\varepsilon,k,\rho) \qquad (2.5)$$

эквивалентно следующей граничной задаче

$$\frac{d^2 u(\varepsilon,\kappa,z)}{dz^2} - \left[\kappa^2 - \ell(\ell+1)z^{-2} - g_0 V(z)\right] u(\varepsilon,\kappa,z) = 0$$

$$u(\varepsilon,\kappa,\varepsilon) = Z_\varepsilon j_\ell(\kappa\varepsilon), \quad \left.\frac{du(\varepsilon,\kappa,z)}{dz}\right|_{z=\varepsilon} = Z_\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} j_\ell(\kappa\varepsilon). \tag{2.6}$$

При $\kappa^2=0$ уравнение (2.5) преобразуется в уравнение

$$u(\varepsilon,z) = Z_\varepsilon z^{\ell+1} + \frac{g_0}{2\ell+1}\int_\varepsilon^z d\rho\, V(\rho)\left[z^{\ell+1}\rho^{-\ell} - \rho^{\ell+1}z^{-\ell}\right] u(\varepsilon,\rho), \tag{2.7}$$

которое эквивалентно граничной задаче

$$\frac{d^2 u(\varepsilon,z)}{dz^2} + \left[\ell(\ell+1)z^{-2} + g_0 V(z)\right] u(\varepsilon,z) = 0$$

$$u(\varepsilon,\varepsilon) = Z_\varepsilon \varepsilon^{\ell+1}, \quad \left.\frac{du(\varepsilon,z)}{dz}\right|_{z=\varepsilon} = Z_\varepsilon(\ell+1)\varepsilon^{\ell}.$$

Из (2.6) следует, что точное решение $u(\varepsilon,\kappa,z)$ можно представить в виде

$$u(\varepsilon,\kappa,z) = Z_\varepsilon\left\{\omega_1(\varepsilon)u_1(\kappa,z) + \omega_2(\varepsilon)u_2(\kappa,z)\right\}, \tag{2.8}$$

где

$$\omega_1(\varepsilon) W\left[u_1(\kappa,\varepsilon), u_2(\kappa,\varepsilon)\right] = j_\ell(\kappa\varepsilon)\frac{du_2(\kappa,\varepsilon)}{d\varepsilon} - u_2(\kappa,\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}j_\ell(\kappa\varepsilon) \tag{2.9}$$

$$\omega_2(\varepsilon) W\left[u_1(\kappa,\varepsilon), u_2(\kappa,\varepsilon)\right] = -j_\ell(\kappa\varepsilon)\frac{du_1(\kappa,\varepsilon)}{d\varepsilon} + u_1(\kappa,\varepsilon)\frac{d}{d\varepsilon}j_\ell(\kappa\varepsilon). \tag{2.10}$$

Используя далее выражения (2.9) и (2.10), а также $u_1(\kappa,z)$ и $u_2(\kappa,z)$, которые являются двумя линейно-независимыми решениями уравнения Шредингера (2.1), нетрудно показать, что $\omega_1(\varepsilon)$ и $\omega_2(\varepsilon)$, а значит, и точное решение $u(\varepsilon,\kappa,z)$, удовлетворяют следующему уравнению по параметру обрезания $\varepsilon \equiv D^{-1} > 0$

$$\frac{d^2\omega}{d\varepsilon^2} - \left[2\frac{j_\ell'(\kappa\varepsilon)}{j_\ell(\kappa\varepsilon)} + \frac{V'(\varepsilon)}{V(\varepsilon)}\right]\frac{d\omega}{d\varepsilon} - g_0 V(\varepsilon)\omega(\varepsilon) = 0, \tag{2.11}$$

при $\kappa^2=0$ данное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\omega}{d\varepsilon^2} - \left[2\frac{\ell+1}{\varepsilon} + \frac{V'(\varepsilon)}{V(\varepsilon)}\right]\frac{d\omega}{d\varepsilon} - g_0 V(\varepsilon)\omega(\varepsilon) = 0. \tag{2.12}$$

Таким образом, для точной волновой функции $u(\varepsilon,\kappa,z)$, представимой в виде ряда теории возмущений с конечным параметром обрезания ε (при итерации уравнений (2.5) или (2.7)[x])

$$u(\varepsilon,\kappa,z) = Z_\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} g_0^n u^{(n)}(\varepsilon,\kappa,z), \tag{2.13}$$

всегда можно записать дифференциальное интерполирующее уравнение по $\varepsilon \equiv D^{-1} > 0$. Тогда, переходя в представлении (2.8) к пределу $\varepsilon \longrightarrow 0$ и вводя константу ренормировки $Z = [Z_\varepsilon\, \omega_1(\varepsilon)]$, получим убывающее точное решение

---

x) При любом конечном значении ε ряды (2.13) и (2.13а) абсолютно сходятся и определяют голоморфную функцию параметра g_0.

$u(k,z) = Z u_1(k,z)$ x). Оказывается, что дифференциальное интерполированное уравнение по ε можно построить, зная только конечное число членов регуляризованной теории возмущений

$$u(\varepsilon,k,z) = Z_\varepsilon \sum_{n=0}^{N_n} g_0^n\, u^{(n)}(\varepsilon,k,z). \tag{2.13a}$$

Действительно, тогда зная только (2.13a), уравнение по ε, в самом общем случае, можно записать в виде

$$P_1(\delta_\varepsilon)\,u(\varepsilon,k,z) + (g_0\varepsilon^{-m})P_2(\delta_\varepsilon)\,u(\varepsilon,k,z) +$$

$$+(g_0\varepsilon^{-m})^2 P_3(\delta_\varepsilon)\,u(\varepsilon,k,z) + \dots + (g_0\varepsilon^{-m})^{N_n} P_n(\delta_\varepsilon)\,u(\varepsilon,k,z) = 0, \tag{2.14}$$

где $P_n(\delta_\varepsilon)$ – операторные многочлены от $\delta_\varepsilon \equiv \varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}$, имеющие вид $P_n(\delta_\varepsilon) = \sum_{\nu}^{\infty} p_n^{(\nu)}(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon^\nu$, а $(g_0\varepsilon^{-m})$ считается безразмерной переменной. Подставляя (2.13a) в (2.14) и приравнивая члены при одинаковых степенях константы связи g_0, получим систему уравнений для операторных функций

$$P_1(\delta_\varepsilon)\,u^{(0)}(\varepsilon,k,z) = 0$$

$$P_1(\delta_\varepsilon)\,u^{(1)}(\varepsilon,k,z) + \varepsilon^{-m}P_2(\delta_\varepsilon)\,u^{(0)}(\varepsilon,k,z) = 0$$

---

x) При предельном переходе $\varepsilon \to 0$, предполагается, что одно из решений уравнения (2.11) или (2.12), например, $\omega_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$, а второе $\omega_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, что, очевидно, всегда выполняется для потенциалов отталкивания.

$$P_1(\delta_\varepsilon)\,u^{(2)}(\varepsilon,k,z) + \varepsilon^{-m}P_2(\delta_\varepsilon)\,u^{(1)}(\varepsilon,k,z) +$$

$$+\varepsilon^{-2m}P_3(\delta_\varepsilon)\,u^{(0)}(\varepsilon,k,z) = 0$$

$$\cdots \tag{2.15}$$

$$P_1(\delta_\varepsilon)\,u^{(N_n)}(\varepsilon,k,z) + \varepsilon^{-m}P_2(\delta_\varepsilon)\,u^{(N_n-1)}(\varepsilon,k,z) + \dots$$

$$\dots + \varepsilon^{-N_n m}P_n(\delta_\varepsilon)\,u^{(0)}(\varepsilon,k,z) = 0.$$

Решая данную систему уравнений, находим операторные многочлены $P_n(\delta_\varepsilon)$, и подставляя затем обратно в (2.14), получаем, таким образом, явный вид дифференциального интерполирующего уравнения. Представим далее $u(\varepsilon,k,z)$ в виде

$$u(\varepsilon,k,z) = Z_\varepsilon \sum_{\mu=1}^{M_\mu} \omega_\mu(\varepsilon)\,\varphi_\mu(k,z), \tag{2.16}$$

где $\omega_\mu(\varepsilon)$ являются линейно-независимыми решениям уравнения (2.14). M_μ определяет порядок этого уравнения, а $\varphi_\mu(k,z)$ определяется сравнением разложения написанной суммы (2.16) по g_0 с рядом регуляризованной теории возмущений (2.13a).

Пусть

$$\omega_\mu(\varepsilon)/\omega_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \qquad \mu = 2, 3 \dots M_\mu. \tag{2.17}$$

Тогда, переходя к пределу $\varepsilon \to 0$ и вводя константу ренормировки $Z=[Z_\varepsilon \ \omega_1(\varepsilon)]$, получим интерполированное решение в виде

$$\mathcal{U}(0,\kappa,z) = Z\,\varphi_1(\kappa,z),$$

которое содержит члены, неаналитически зависящие от g_0, и дает конечное число членов ряда модифицированной теории возмущений. Если интерполированное уравнение подобрано удачно, то интерполированное решение $\mathcal{U}(0,\kappa,z)$ будет довольно близко к точной волновой функции $\mathcal{U}(\kappa,z)$, а особые точки по константе связи g_0 всегда вычисляются точно. Метод в том виде, в каком мы его описали выше, пригоден для многих задач квантовой теории поля с неренормируемым взаимодействием /9/.

В случае же сингулярных потенциалов любого вида оказывается достаточно знать явный вид только двух первых членов регуляризованной теории возмущений (2.I3). Действительно, итерируя (2.5) и ограничиваясь членами первого порядка по константе связи g_0, получим

$$\varphi(\varepsilon,\kappa,z) = Z_\varepsilon\Big\{1 + g_0\int_z^{\varepsilon} d\rho\, V(\rho)\, j_\ell(\kappa\rho)\big[n_\ell(\kappa\rho) - d_\ell(\kappa z)\, j_\ell(\kappa\rho)\big] + \dots\Big\} = \varphi^{(0)} + g_0\,\varphi^{(1)} + \dots, \qquad (2.I8)$$

где $\varphi(\varepsilon,\kappa,z) = \mathcal{U}(\varepsilon,\kappa,z)/j_\ell(\kappa z)$, $d_\ell(\kappa z) = n_\ell(\kappa z)/j_\ell(\kappa z)$.

Тогда дифференциальное интерполирующее уравнение (2.I4) сведется к уравнению

$$P_1(\delta_\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon,\kappa,z) + (g_0\,\varepsilon^{-m})\,P_2(\delta_\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon,\kappa,z) = 0. \qquad (2.I9)$$

Из (2.I8) и (2.I9) следует, что

$$P_1(\delta_\varepsilon)\,\varphi^{(0)} = 0$$
$$P_1(\delta_\varepsilon)\,\varphi^{(1)}(\varepsilon,\kappa,z) + \varepsilon^{-m} P_2(\delta_\varepsilon)\,\varphi^{(0)} = 0. \qquad (2.20)$$

Из первого уравнения системы (2.20) следует, что

$$P_1(\delta_\varepsilon) = P_1'(\delta_\varepsilon)\,\delta_\varepsilon,$$

тогда, используя явный вид $\varphi^{(1)}$ и представляя

$$P_1'(\delta_\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_1^{(\nu)}(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon^{\nu} = p_1^{(0)}(\varepsilon) + p_1^{(1)}(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon + \cdots,$$

из второго уравнения системы (2.20) получим, что

$$p_1^{(0)}(\varepsilon) = -\Big[1 + 2\varepsilon\,\frac{j_\ell'(\kappa\varepsilon)}{j_\ell(\kappa\varepsilon)} + \varepsilon\,\frac{V'(\varepsilon)}{V(\varepsilon)}\Big]\,p_1^{(1)}(\varepsilon)$$
$$P_2(\delta_\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_2^{(\nu)}(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon^{\nu} \equiv p_2^{(0)}(\varepsilon) = \varepsilon^{m+2}\,V(\varepsilon)\,p_1^{(1)}(\varepsilon). \qquad (2.2I)$$

Таким образом, уравнение (2.I9) принимает вид

$$\Big\{-\Big[1 + 2\varepsilon\,\frac{j_\ell'(\kappa\varepsilon)}{j_\ell(\kappa\varepsilon)} + \varepsilon\,\frac{V'(\varepsilon)}{V(\varepsilon)}\Big] + \delta_\varepsilon\Big\}\,\delta_\varepsilon\,\varphi(\varepsilon,\kappa,z) - g_0\,\varepsilon^2\,V(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon,\kappa,z) = 0. \qquad (2.22)$$

Или, вспоминая, что $\varphi(\varepsilon,\kappa,z) = \mathcal{U}(\varepsilon,\kappa,z)/j(\kappa z)$, получим уравнение

$$\frac{d^2\mathcal{U}(\varepsilon,\kappa,z)}{dz^2} - \Big[2\,\frac{j_\ell'(\kappa\varepsilon)}{j_\ell(\kappa\varepsilon)} + \frac{V'(\varepsilon)}{V(\varepsilon)}\Big]\frac{d\,\mathcal{U}(\varepsilon,\kappa,z)}{d\varepsilon} - g_0\,V(\varepsilon)\,\mathcal{U} = 0, \qquad (2.23)$$

которое совпадает с уравнением (2.II). Таким образом, в рамках уравнения Шредингера с любым сингулярным потенциалом при отличных от нуля значениях ℓ и K знание только двух первых членов регуляризованной теории возмущений приводит к точному уравнению по $\mathcal{E}$ для $\mathcal{U}(\mathcal{E},K,z)$. Решение (2.23) можно представить в виде, аналогичном (2.8), (2.I6)

$$\mathcal{U}(\mathcal{E},K,z) = Z_{\mathcal{E}}\left\{\omega_1(\mathcal{E})\,\varphi_1(K,z) + \omega_2(\mathcal{E})\,\varphi_2(K,z)\right\}. \tag{2.24}$$

$\varphi_{1,2}(K,z)$ в общем случае определяются сравнением разложения (2.24) по g_0 с рядом регуляризованной теории возмущений (2.I3а). Выражение (2.24) определяет голоморфную функцию константы связи g_0. Переходя в выражениях (2.24) и (2.8) к пределу $\mathcal{E}\to 0$, получим, что $\mathcal{U}(0,K,z)$ в обоих случаях принимает вид

$$\mathcal{U}(0,K,z) = Z\,\mathcal{U}_1(K,z)$$

$$\mathcal{U}(0,K,z) = Z\,\varphi_1(K,z).$$

Так как $\varphi_1(K,z)$ вычислена с точностью до членов порядка $g_0^{N_n}$, из сравнения этих двух соотношений следует, что интерполированная волновая функция $\varphi_1(K,z)$ совпадает с точным убывающим решением $\mathcal{U}_1(K,z)$ с точностью до членов порядка $g_0^{N_n}$, т.е.

$$\mathcal{U}_1(K,z) = \varphi_1(K,z) + O\left(g_0^{N_n+1}\right). \tag{2.25}$$

Таким образом, с помощью метода дифференциальной интерполяции точная волновая функция восстанавливается с любой точностью. В следующем пункте проводятся прямые вычисления для сингулярного потенциала, естественно возникающего в теории поля.

§ 3. Потенциал $g_0 V(z) = f^4 z^{-6}$

В простейших случаях решение уравнения Бете–Солпитера для рассеяния лептонов друг на друге в четырехфермионной теории сводится к решению уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом $\sim z^{-6}$ /4/. Ряд регуляризованной теории возмущения для потенциала $g_0 V(z) = f^4 z^{-6}$ имеет вид $\left(\varphi(D,z) \equiv \mathcal{U}(D,z)/z^{\ell+1}\right)$

$$\varphi(D,z) = Z_D\left\{1 + \frac{f^4}{2\ell+1}\left[\frac{1}{4}D^4 + \frac{1}{2\ell-3}z^{-2\ell-1}D^{-2\ell+3} - \right.\right. \tag{3.I}$$

$$\left.\left. - \frac{2\ell+1}{4(2\ell-3)}z^{-4}\right] + \ldots\right\} = \varphi^{(0)} + \frac{1}{2\ell+1}f^4\varphi^{(1)}(D,z) + \ldots$$

Если ввести операторные многочлены

$P(\delta_D)$ и $Q(\delta_D)$, где $\delta_D \equiv D\dfrac{d}{dD}$, то дифференциальное интерполирующее уравнение (2.I4) по параметру обрезания D можно записать в виде

$$P(\delta_D)\,\varphi(D,z) + \frac{1}{2\ell+1}(fD)^4 Q(\delta_D)\,\varphi(D,z) = 0. \tag{3.2}$$

Используя далее (3.I), получим

$$P(\delta_D)\left[\varphi^{(0)} + \frac{1}{2\ell+1}f^4\varphi^{(1)} + \ldots\right] + \frac{1}{2\ell+1}(fD)^4 Q(\delta_D)\left[\varphi^{(0)} + \frac{f^4}{2\ell+1}\varphi^{(1)} + \ldots\right] = 0, \tag{3.3}$$

откуда следует следующая система для операторных функций $P(\delta_D)$ и $Q(\delta_D)$

$$
\begin{aligned}
&P(\delta_D)\,\varphi^{(0)} = 0 \\
&P(\delta_D)\,\varphi^{(1)}(D,z) + D^4 Q(\delta_D)\,\varphi^{(0)} = 0 .
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Легко показать, что система (3.4) имеет решение в виде

$$P(\delta_D) = [\delta_D + (2\ell - 3)]\,\delta_D\,, \quad Q(\delta_D) = -(2\ell + 1). \tag{3.5}$$

Тогда уравнение (3.2) преобразуется в уравнение

$$[\delta_D + (2\ell - 3)]\,\delta_D\,\varphi(D,z) - (fD)^4\,\varphi(D,z) = 0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) совпадает с точным уравнением (2.I2) по параметру обрезания $\varepsilon \equiv D^{-1}$ для точной волновой функции (2.8), так как зависимость волновых функций $\varphi(D,z)$ и $u(D,z)$ от параметра обрезания одинакова $u(D,z) = \varphi(D,z)\,z^{\ell+1}$. Точно такая же ситуация, как это отмечалось выше, имеет место для любого сингулярного потенциала отталкивания вида $g_0 V(z) = g^2 z^{-2(n+1)}$ (при $n = 2$ получаем потенциал, рассматриваемый в этом пункте). Таким образом, знание явного вида первого члена регуляризованной теории возмущений (3.I) приводит к точному интерполированному дифференциальному уравнению (3.6). Поэтому в силу совпадения уравнений (3.6) и (2.8) интерполированная волновая функция, вычисленная методом дифференциальной интерполяции, совпадает с точной с точностью до членов первого порядка по константе связи.

Покажем это непосредственным вычислением в случае S - волны. Двумя линейно независимыми решениями уравнения (3.6) являются $(fD)^{3/2} I_{3/4}\left[\frac{1}{2}(fD)^2\right]$ и $(fD)^{3/2} K_{3/4}\left[\frac{1}{2}(fD)^2\right]$. Соотношение (2.24) тогда может быть записано в форме

$$\varphi(D,z) = Z_D\left\{(fD)^{3/2} I_{3/4}\left[\tfrac{1}{2}(fD)^2\right]\varphi_1(z) + (fD)^{3/2} K_{3/4}\left[\tfrac{1}{2}(fD)^2\right]\varphi_2(z)\right\}. \tag{3.7}$$

Можно разложить оба члена в правой части соотношения (3.7) по малым f. Тогда с точностью до членов порядка f^4 получим

$$
\begin{aligned}
\varphi(D,z) = Z_D\Big\{&\left[(fD)^3 + \dots\right]\left[\varphi_1^{(0)} + f\varphi_1^{(1)} + f^4\varphi_1^{(2)} + \dots\right] + \\
&+ \left[1 - b(fD)^3 + \tfrac{1}{4}(fD)^4 + \dots\right]\left[\varphi_2^{(0)} + f^4\varphi_2^{(1)} + \dots\right]\Big\},
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

где $b = \sqrt{2}\,\Gamma^2(1/4)/12\pi$.

Ряд теории возмущений (3.I) удовлетворяет соотношению (3.8), если только

$$\varphi_1^{(0)} = b, \quad \varphi_2^{(0)} = 1, \quad \varphi_1^{(1)} = \frac{-1}{3z}, \quad \varphi_1^{(2)} = b\,\varphi_2^{(1)} = \frac{b}{12 z^4}.$$

Подставляя данные соотношения обратно в (3.8) и переходя к пределу $D \to \infty$, окончательно получим

$$\varphi(\infty, z) = Z\left\{1 - f\frac{1}{3bz} + f^4\frac{1}{12 z^4} + \dots\right\}, \tag{3.9}$$

где $Z = \left\{ \beta Z_D (fD)^{3/2} I_{3/4} \left[\tfrac{1}{2} (fD)^2 \right] \right\}$.

Из формулы (9.а) работы[6] при λ =I/2, n = 2 $(\lambda = \ell + 1/2)$ следует, что убывающее точное решение уравнения (2I) имеет вид $(k^2 = 0)$

$$\varphi(z) = C\, z^{-1/2} K_{1/4}\left(f^2/2z^2\right) = \\ = C\left\{ 1 - f\,\frac{1}{3\ell z} + f^4 \frac{1}{12 z^4} + \dots \right\}. \qquad (3.10)$$

Отсюда следует, что с точностью до членов порядка f^4 интерполированное решение $\varphi(\infty, z)$, найденное методом дифференциальной интерполяции, совпадает с точным решением $\varphi(z)$ x). Более того, для сингулярных потенциалов интерполированная волновая функция $\varphi(\infty, z)$ совпадает с точкой $\varphi(z)$ с точностью до членов g^{N_n}, где N_n определяет число учитываемых поправок в регуляризованной теории возмущений (2.I3а).

§ 4. Сравнение интерполированных решений с приближениями "пертизации" и "обрезанных на унитарном пределе"

На примерах сингулярных потенциалов, исследованных в предыдущих пунктах, удобно проанализировать другие приближенные методы рассмотрения неренормируемых теорий поля, "пертизацию",

x) Как и в случае потенциала $g_0 V(z) = g^2 z^{-4}$, рассмотренного в работе[6], решения $\varphi(\infty, z)$ и $\varphi(z)$ нужно нормировать одинаковым образом.

предложенную в работе[3], и обрезание на унитарном пределе[7].

Для начала рассмотрим общую задачу. Метод пертизации состоит в том, что в уравнении

$$U(\varepsilon, z) = Z_\varepsilon z^{\ell+1} + \frac{g_0}{2\ell+1} \int_\varepsilon^z d\rho\, V(\rho) \left[z^{\ell+1} \rho^{-\ell} - \rho^{\ell+1} z^{-\ell} \right] U(\varepsilon, \rho) \qquad (4.1)$$

удерживают только наиболее расходящиеся при итерации члены. Тогда полученное таким образом "пертизованное" уравнение имеет вид

$$U^p(\varepsilon, z) = z^{\ell+1} \left\{ Z_\varepsilon + \frac{g_0}{2\ell+1} \int_\varepsilon^z d\rho\, V(\rho) \rho^{-\ell} U^p(\varepsilon, \rho) \right\}. \qquad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2) при любом потенциале $g_0 V(z)$ можно представить в виде

$$U^p(\varepsilon, z) = Z_\varepsilon z^{\ell+1} \exp\left\{ \frac{g_0}{2\ell+1} \int_\varepsilon^z d\rho\, \rho V(\rho) \right\}. \qquad (4.3)$$

Если ввести теперь первообразную $f(\rho)$, определяемую условием $f'(\rho) \equiv -\rho V(\rho)$, то решение (4.3) примет вид

$$U^p(\varepsilon, z) = Z_\varepsilon \exp\left\{ \frac{g_0}{2\ell+1} f(\varepsilon) \right\} z^{\ell+1} \exp\left\{ -\frac{g_0}{2\ell+1} f(z) \right\}, \qquad (4.4)$$

где $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$. Полагая далее $Z_\varepsilon \equiv Z \exp\left\{ -\frac{g_0}{2\ell+1} f(\varepsilon) \right\}$, получим конечное решение

$$u^p(r) = Z\, r^{\ell+1} \exp\left\{-\frac{g_0}{2\ell+1} f(r)\right\}, \qquad (4.5)$$

которое стремится к нулю при $r \to 0$. Легко видеть, что асимптотика ператизованного решения сильно отличается от асимптотики точного решения (10) работы[6] и в то же время оно голоморфно по g_0, тогда как точное и интерполированное решения имеют особенности при $g_0=0$. Обычно предполагают, что несмотря на это решение, (4.5) дает хорошее приближение к точному решению при достаточно больших значениях r. На примерах сингулярных потенциалов $g_0 V(r) = g r^{-3},\ g^2 r^{-4},\ f^4 r^{-6}$

легко показать, что это не так. Действительно, большие значения r, например, для потенциала $g_0 V(r) = g^2 r^{-4}$ определяются условием $g^2/r^2 \ll 1$. Тогда в случае $\ell = 0$ ператизованное решение (4.5) есть[x]

$$u^p(,r) = r\left\{1 - \frac{1}{2r^2} g^2 + \cdots\right\}. \qquad (4.6)$$

Сравним это решение с интерполированным решением, полученным в работе[6]

$$u(\infty, r) \equiv u(r) = \left\{1 - g\frac{1}{r} + \frac{1}{2r^2} g^2 + \cdots\right\}. \qquad (4.7)$$

---

x) Нормировка выбирается так, чтобы при $r \to \infty$ асимптотика ператизованных решений совпадала с асимптотикой точных и интерполированных решений.

Таким образом видно, что ператизованное решение не содержит члена с точкой ветвления корневого типа (член $\sim g = \sqrt{g^2}$), который имеется в интерполированном и точном решениях. Аналогичная ситуация имеет место и для потенциалов $g_0 V(r) = g r^{-3},\ f^4 r^{-6}, \ldots$ т.е. и для них первые нетривиальные поправки к интерполированной и ператизованной функции сильно отличаются, поэтому можно сделать вывод о том, что метод ператизации, в отличие от метода дифференциальной интерполяции, не дает хороших приближений даже в простой модели потенциального рассеяния.

Перейдем теперь к краткому обсуждению метода обрезания на унитарном пределе[9], идея которого основана на соображениях размерности. В применении к рассеянию на сингулярном неренормируемом потенциале она сводится к тому, что волновая функция должна быстро убывать на расстояниях, определяемых единственным параметром размерности длины - константой связи. Действительно, для сингулярных потенциалов $g_0 V(r) = g^2 r^{-2(n+1)}$ константа связи g имеет размерность $[g] = [r^n]$ и поэтому на расстояниях $r \lesssim c\, g^{1/n}$ должно происходить такое обрезание. Параметр обрезания $\varepsilon \equiv D^{-1} = g^{1/n}$ называется "унитарным пределом". На унитарном пределе вклад расстояний $r < g^{1/n}$ должен быть малым и мы можем получить грубую оценку поправок от высших приближений, воспользовавшись теорией возмущений при конечном обрезании $D g^{1/n} = 1$. Применим теперь этот метод к потенциалам

$g_0 V(r) = g r^{-3}$ и $g_0 V(r) = f^4 r^{-6}$ при $\ell = 0$.

Для потенциала $\sim r^{-3}$ логарифмическая производная волновой функции (6.37) работы[6] имеет вид[x)]

$$\frac{1}{u(0)}\frac{du}{dz}=\frac{1}{z}\left[1+\frac{g}{z}\ln Dz+O(g^2)\right]_{D=g}=\frac{1}{z}\left[1-\frac{g}{z}\ln\frac{g}{z}+O(g^2)\right]. \tag{4.8}$$

Используя точное решение (43) работы[6], найдем

$$\frac{1}{u(0)}\frac{du}{dz}=\frac{1}{z}\left[1-\frac{g}{z}\ln\frac{g}{z}-1.15\frac{g}{z}+O(g^2)\right]. \tag{4.9}$$

Сравнивая (4.8) и (4.9), убеждаемся, что члены $\sim\frac{g}{z}\ln\frac{g}{z}$ найдены обрезанием на унитарном пределе правильно, а члены $\sim\frac{g}{z}$ неправильно. Для потенциала $\sim f^4 z^{-6}$ с помощью (3.I) и (3.I0) получаем

$$\frac{1}{u(0)}\frac{du}{dz}=1+f^4\left[\frac{1}{3z}D^3-\frac{1}{3z^4}\right]_{D=f}=1+\frac{1}{3}\frac{f}{z}+\dots \tag{4.I0}$$

$$\frac{1}{u(z)}\frac{du}{dz}=\left[1+\frac{1}{3b}\frac{f}{z}+\dots\right]\qquad b\neq 1. \tag{4.II}$$

Сравнивая (4.I0) и (3.II), можно сделать вывод, что метод обрезания на унитарном пределе для потенциала $f^4 z^{-6}$ дает лишь порядок величины поправочных членов. Та же самая ситуация наблюдается для всех сингулярных потенциалов $g_0 V(z)=g^2 z^{-2(n+1)}$, растущих быстрее, чем z^{-3}, т.е. начиная с $n>1/2$.

x) Метод обрезания на унитарном пределе имеет смысл применять к величинам, которые не должны перенормироваться – логарифмической производной волновой функции и т.д.

§ 5. Заключение

На примере уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом дано полное обоснование метода дифференциальной интерполяции MDИ, позволяющего находить члены ряда модифицированной теории возмущений по конечному числу членов ряда обычной теории возмущений с конечным параметром обрезания. Показано, что интерполированная волновая функция может быть найдена с любой точностью, т.е. с точностью до членов g^{N_n} она совпадает с точной, убывающей волновой функцией, в то время как метод "ператизации" [3] не дает правильных выражений для поправочных членов, а обрезание на "унитарном пределе"[7] дает только грубую оценку поправок.

Наиболее просто возникновение сингулярных потенциалов в квантовой теории поля можно понять в рамках квазипотенциального подхода[10, 11]. Известно также, что уравнение Бете-Солпитера в простейших случаях сводится к уравнению типа Шредингера[4]. Поэтому следует ожидать, что MDИ может быть применен и в этих случаях.

В заключение авторам приятно выразить свою глубокую благодарность А.Н. Тавхелидзе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
2. S.Ocubo, Progr. Theor.Phys., 11, 80 (1954)
   T.D.Lee. Phys.Rev. 128, 899 (1962)
3. G.Feinberg, A.Pais, Phys.Rev. 131, 2724 (1963), 133, B477 (1964).
4. B.A.Arbuzov, A.T.Filippov, Phys.Lett., 13, 95 (1964).
   R.Sawyar. Phys. Rev., 134, B448 (1964).
   B.A.Arbuzov, A.T.Filippov, Nuovo Cimento, 38, 796 (1965)
   B.S.Getmanov, A.T.Filippov, Teor. i. Mat. Fiz. (USSR) 8, 3 (1961).
5. A.T.Filippov. Proc Conf., Weak Int preprint CERN 69-7, Geneva, 1969.
6. В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов, Ядерная физика 15, 1294 (1972).
7. W.Heisenberg. Zs.Phys. 110, 251 (1938) 101, 533 (1936).
   Л.Д.Ландау. ЖЭТФ 10, 718 (1940).
8. В.де Альфардо, Т.Редже. Потенциальное рассеяние. "Мир" 1966.
9. В.Ш.Гогохия. Препринт ОИЯИ Р2-6687, Дубна, 1972.
10. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim. 29, 380 (1963).
11. В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. В сб. "Проблемы теоретической физики", Наука, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 мая 1973 года.