ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7129

Л.Г.Заставенко

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ВАКУУМОВ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7129

Л.Г.Заставенко

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ВАКУУМОВ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в ТМФ

В настоящее время считается общепризнанным, что состояния физического и математического вакуумов в квантовой теории поля ортогональны. Однако это мнение основано на рассмотрении разного рода тривиальных примеров /1, 2/. В настоящей работе мы восполняем этот пробел и даем доказательство ортогональности математического и физического вакуумов в модели квантовой теории скалярного нейтрального поля с самодействием $g\phi^4$ в случае одной пространственной и одной временной степенией свободы. Эта модель является простейшей нетривиальной моделью квантовой теории поля: в ней нет расходимостей /за исключением сдвига энергии вакуума/ и есть все черты, свойственные каждой "настоящей" модели квантовой теории поля: есть взаимодействие, есть релятивистская инвариантность /7/, для нее, надо полагать, справедливы все аксиомы, предполагаемые в аксиоматическом подходе к квантовой теории поля.

1. Мы будем пользоваться представлением, в котором оператор поля $\phi(k)$ диагонален. Разновидность функционального подхода к квантовой теории поля, связанная с использованием этого представления, систематически развита в работах /3, 4–6/.

Состояние физического вакуума определяется функционалом $\Omega_0(g)$:

$$\ln \Omega_0(g) = -\frac{1}{2}\{ \int a(k)\phi(k)\phi(-k)\,dk +$$

$$+ \int C_4(k_1, k_2, k_3, k_4) \prod_{i=1}^{4} (\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(\Sigma k_i) + \qquad /1/$$

$$+ \int C_6(k_1, \dots, k_6) \prod_{i=1}^{6} (\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(\Sigma k_i) + \dots \},$$

состояние математического вакуума определяется функционалом $\Omega_0(0)$:

$$\ln \Omega_0(0) = -\frac{1}{2}\int \omega(k)\,\phi(k)\,\phi(-k)\,dk, \qquad /2/$$

здесь $\omega(k) = \sqrt{k^2+m^2}$.

В работе /3/ выписаны уравнения, определяющие коэффициентные функции $a(k)$, C_4, C_6.

Нам, однако, эти уравнения не понадобятся; для нас существенно только, что а/ функции $a(k), C_4, \dots$ могут быть разложены в /асимптотические/ ряды по степен g, б/

$$a(k) = \omega(k) + g\,a_1(k) + g^2 a_2(k) + \dots, \qquad /3/$$

в/ разложение функции C_4 начинается с члена, линейного по g, аналогичные разложения функций $C_0, C_8, \dots$ начинаются с членов квадратичного, кубического и так далее:

$$C_4 = O(g) \qquad /4/$$
$$C_6 = O(g^2)$$
$$\dots\dots$$

2. Для доказательства ортогональности функционалов математического и физического вакуума нам придется подсчитать интегралы вида

$$(g_1, g_2) \equiv \int \Omega_0(g_1)\,\Omega_0(g_2)\,\delta\phi, \qquad /5/$$

где g_1, g_2 принимают значения О или g. Для подсчета интегралов мы заменим нашу систему с континуумом степеней свободы на систему с дискретным набором степеней свободы, разрешив переменной k принимать значения

$$k = hj, \qquad j = 0, \pm 1, \dots;$$

при этом интегралы в /1/, /2/ заменяются на суммы:

$$\int dk\, f(k) = h \sum_j f(k_j),$$

а в интеграле /5/ элемент объема $\delta\phi$ следует понимать как

$$\Pi\, d\phi(k_j).$$

Техника, необходимая для подсчета интеграла /5/, намечена в работе /3/: подинтегральное выражение имеет вид e^{-K}; в экспоненте следует удержать только квадратичный по ϕ член, а остальные разложить в степенные ряды; возникающие при этом интегралы вычисляются аналитически, таким образом, интеграл /5/ представится в виде суммы произведений связных диаграмм; суммирование явно выполняется и приводит к представлению

$$\ln(g_1, g_2) = -\frac{t(g_1, g_2)}{h} + O(1). \qquad /6/$$

Здесь величиниа t определяется аддитивными вкладами связных диаграмм.

Существенно, что величина $t(g_1, g_2)$ в /6/ содержит интегралы, а не суммы, поэтому выражение /6/ неограниченно растет при $h \to 0$: этим и определяется ортогональность состояний $\Omega_0(0)$, $\Omega_0(g)$.

3. Непосредственно интересующей нас величиной является отношение скалярного произведения состояний $\Omega_0(0)$, $\Omega_0(g)$ к произведению корней их норм; согласно /5/, /6/, эта величина может быть представлена в виде

$$\frac{(0,g)}{\sqrt{(0,0)(g,g)}} = e^{-\frac{\tau(g)}{h} + O(1)}. \qquad /7/$$

После этого для доказательства ортогональности физического и математического вакуумов /при $h \to 0$/ остается только убедиться в том, что функция $\tau(g)$ положительна /поскольку величина $r(g)$ по определению неотрицательна, единственная альтернативная возможность состоит в том, что $r(g)$ может тождественно равняться нулю; правая часть /7/ в этом случае определяется не выписанными в ней конечными при $h \to 0$ членами/.

Мы рассмотрим функцию $r(g)$ при $g \to 0$ и покажем, что

$$r(g) = g^2 r + \dots, \qquad /8/$$

где

$$r > 0; \qquad /8а/$$

это завершает доказательство утверждения настоящей работы.

4. Применяя технику работы [3], получаем, с учетом /6/, /1/, /2/:

$$t(g,g) = \frac{1}{2}\int \ln a(k)\,dk + 3\int dk\,dq\,\frac{C\,(k,-k,q,-q)}{2a(k)\,2a(q)}$$

$$+ 15\int dk\,dq\,dp\,\frac{C\,(k,-k,q,-q,p,-p)}{2a(k)\,2a(q)\,2a(p)} +$$

$$-\frac{4!}{2!}\int dk\,dq\,dp\,ds\,\delta(k+q+p+s)\,\frac{C_4^2(k,q,p,s)}{2a(k)\,2a(q)\,2a(p)\,2a(s)} \qquad /9/$$

$$-\frac{4\cdot4\cdot3\cdot3}{2!\,2}\int\frac{C_4(k,-k,q,-q)\,C_4(q,-q,p,-p)}{2\,a(k)(2a(q))^2\,2a(p)}\,dk\,dq\,dp + O(g^3);$$

$$t(0,g) = \frac{1}{2}\int \ln b(k)\,dk + \frac{3}{2}\int dk\,dq\,\frac{C_4(k,-k,q,-q)}{2b(k)\,2b(q)}$$

$$+\frac{15}{2}\int dk\,dq\,dp\,\frac{C_4(k,-k,q,-q,p,-p)}{2b(k)\,2b(q)\,2b(p)}$$

$$-\frac{4!}{2!4}\int dq\,dk\,dp\,ds\,\delta(k+q+p+s)\,\frac{C_4^2(k,q,p,s)}{2b(k)\,2b(q)\,2b(p)\,2b(s)} \qquad /10/$$

$$-\frac{4\cdot4\cdot3\cdot3}{2!\,4\cdot2}\int dk\,dq\,dp\,\frac{C_4(k,-k,q,-q)\,C_4(q,-q,p,-p)}{2b(k)(2b(q))^2\,2b(p)}$$

$$+O(g^3).$$

Здесь

$$2b(k) = a(k) + \omega(k); \qquad /11/$$

наконец,

$$t(0,0) = \frac{1}{2}\int \ln \omega(k)\,dk. \qquad /12/$$

Согласно /6/, /7/, /3/, /4/, получаем

$$r(g) = t(0,q) - \frac{1}{2}\,t(g,g) - \frac{1}{2}\,t(0,0) =$$

$$= \frac{1}{2}\int dk \ln\frac{2b(k)}{\sqrt{2a(k)\,2\omega(k)}} +$$

$$+\frac{3}{2}\int dk\,dq\,C_4(k,-k,q,-q)\left[\frac{(-)1}{2b(k)\,2b(q)} + \frac{1}{2a(k)\,2a(q)}\right]$$

$$+\frac{4!}{2!4}\int dk\,dq\,dp\,ds\,\delta(k+q+p+s)\,\frac{C_4^2(k,q,p,s)}{2\omega(k)\,2\omega(q)\,2\omega(p)\,2\omega(s)}$$

$$+9\int dk\,dq\,dp\,\frac{C_4(k,-k,q,-q)\,C_4(q,-q,p,-p)}{2\omega(k)\,[2\omega(q)]^2\,2\omega(p)}+O(g^3).\qquad /13/$$

Обозначив $\tau_1(g)$ и $\tau_2(g)$ первый и второй член /13/, соответственно, и воспользовавшись разложением /3/, получим

$$\tau_1(g)=\frac{g^2}{16}\int\left[\frac{a_1(k)}{\omega(k)}\right]^2 dk$$

$$-\tau_2(g)=\frac{3g}{16}\int dk\,dq\,C_4(k,-k,q,-q)\,\frac{\dfrac{a_1(k)}{\omega(k)}+\dfrac{a_1(q)}{\omega(q)}}{\omega(k)\,\omega(q)}.$$

Обозначив

$$X(k)=\frac{g}{4}\left(\frac{a_1(k)}{\omega(k)}\right)$$

$$Y(k)=\frac{3}{4}\int dq\,\frac{C\;(k,-k,q,-q)}{\omega(k)\omega(q)},$$

будем иметь,

$$\tau_1(g)+\tau_2(g)=\int dk\,(X^2+2XY)\geq$$

$$\geq-\int Y^2 dk=-9\int dk\,dq\,dp\,\frac{C_4(k,-k,q,-q)\,C_4(q,-q,p,-p)}{2\omega(k)\,(2\omega(q))^2\,2\omega(p)}.$$

Отсюда вместе с /13/, /4/, очевидно, следует /8а/.

5. Таким образом, физический и математический вакуумы в рассматриваемой модели квантовой теории поля ортогональны; несложно доказать и ортогональность порождаемых состояниями $\Omega_0(0)$ и $\Omega_0(g)$ гильбертовых пространств $G(0)$ и $G(g)$.

Нам кажется, однако, что этому обстоятельству придается в настоящее время чрезмерное значение: в действительности ситуация в рассматриваемой модели полностью определяется тем фактом, что теория возмущений в ней конечна /не содержит расходимостей/; пользование этой теорией возмущений не приводит, по-видимому, ни к каким ошибкам или противоречиям *.

Ортогональность же гильбертовых пространств $G(0)$ и $G(g)$ следует рассматривать лишь как любопытное обстоятельство, не имеющее, вероятно, существенного значения.

В заключение автор благодарит М.И.Широкова за интерес к работе и ценное обсуждение.

Литература

1. L. Van Hove. Physica, 18, 145 (1952).
2. Lon Rosen. J.Mat.Phys., 13, 918 (1972).
3. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 7, 20 /1971/.*
4. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 8, 335 /1971/.*
5. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 9, 355 /1971/.*
6. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 10, 58 /1972/.*
7. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ Р2-6000, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 7 мая 1973 года.

*Мы имеем в виду представления в виде рядов теории возмущений для функций Грина или для коэффициентных функций разложения /1/.