СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7120

Г.И.Копылов

КОГЕРЕНТНОСТЬ МЕЗОНОВ, ИСПУСКАЕМЫХ НЕКОГЕРЕНТНЫМ ОБРАЗОМ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

P2 - 7120

Г.И.Копылов

КОГЕРЕНТНОСТЬ МЕЗОНОВ, ИСПУСКАЕМЫХ НЕКОГЕРЕНТНЫМ ОБРАЗОМ

THE MUTUAL COHERENCE OF INCOHERENTLY GENERATED MESONS

G.I. Kopylov

Joint Institute for Nuclear Research, D u b n a, USSR

Summary

The well-known GGLP-effect [2] can be expressed in terms of the mutual coherence function (MCF) of like mesons $\tilde{B}(\vec{r}_1, \epsilon_1, \vec{r}_2, \epsilon_2)$ (formulae (12) and (12')) where ϵ_1, ϵ_2 are the meson energies; $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ are momenta; $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ are the coordinates of meson counters. Some properties of the MCF for like hadrons are demonstrated. The differential equation for the MCF ((4) and (7)) is derived. The MCF is propagating as a wave (as an amplitude) but its modulus can be measured directly. The exact solution of equation (7) is obtained (9) as well as its approximate form (10) for macroscopic distances R_0 from the target. The notions of the coherence angle (17) , that coincides with that measured in the GGLP-effect, and coherence length (18) for like hadrons are introduced. The hadron analog of the optical theorem of Van Cittart-Zernicke based on the reformulation of formula (8) is proved.

При невысоких энергиях мезоны, как правило, рождаются когерентно: можно указать одну или несколько диаграмм, описывающих амплитуду рождения и задающих тем самым фазовые соотношения между волновыми функциями возникающих частиц.

При высоких энергиях возможен и некогерентный механизм рождения, когда фазы волновых функций распределены случайно и процесс надо описывать разными вариантами статистических теорий [1].

Отчего же тождественные частицы, рожденные некогерентным образом, интерферируют между собой - например, у мезонов одного знака заметна тенденция рождаться с близкими друг к другу импульсами [2].

Ответ на этот вопрос был дан в оптике, где давно замечено, что испускаемые звездою фотоны, еще не когерентные у ее поверхности, увеличивают свою когерентность по мере удаления от нее, позволяя нам на Земле наблюдать у пар звездных фотонов интерференционные явления [3]. В оптике создана теория частичной когерентности, в которой вводится мера степени когерентности фотонов и даются способы ее измерения [4-6].

В работе [7] показано, что основное понятие оптики частичной когерентности - так называемую функцию взаимной когерентности - можно ввести и в мезонной физике для вычисления корреляций между тождественными мезонами, рождение которых описывается статистической моделью.

Данная заметка является продолжением работы /7/. В ней более детально прослежены свойства функции взаимной когерентности. Приводится уравнение распространения когерентности. Показано, что для тождественных адронов, в точности как для фотонов, можно ввести понятие о длине когерентности *, С его помощью легко понять условия, в которых может наблюдаться интерференция массивных элементарных частиц. Обобщается на мезонные корреляции оптическая теорема ван Циттарта–Цернике.

Уравнение распространения когерентности. Чтобы ввести функцию взаимной когерентности, надо сначала определить амплитуду $A(\vec{r}, t)$ регистрации частицы в точке $\vec{r}$ в момент t. Она удовлетворяет уравнению

$$D(\vec{r}, t)A(\vec{r}, t) = -4\pi g(\vec{r}, t). \qquad /1/$$

Оператор D есть

$$D(r, t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2. \qquad /2/$$

Ток источника $g(\vec{r}, t)$ рассматривается как случайная функция; это значит, что он зависит от некоторой совокупности случайных параметров, в число которых может входить, например, частота его осцилляций, форма и положение области, где он отличен от нуля и т.п. Когда процесс рождения мезонов очень сложен, разумно, вместо того, чтобы конкретизировать ответственные за рождение процессы, заменить их некоторой совокупностью случайных параметров λ; тогда $g_\lambda(\vec{r}, t)$ - источник, характеризуемый набором параметров λ; $A_\lambda(\vec{r}, t)$ - амплитуда регистрации в 4-точке $(\vec{r}, t)$ частицы, испущенной этим источником.

---

* Но не имеет практического смысла понятие о времени когерентности.

Функцией взаимной когерентности частиц /второго порядка/ в координатно-временном представлении называется произведение двух амплитуд $A_\lambda(\vec{r}_1, t_1)A^*_\lambda(\vec{r}_2, t_2)$, усредненное по совокупности случайных параметров

$$B(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = B^*(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_1, t_1) = \langle A_\lambda(\vec{r}_1, t_1)A^*_\lambda(\vec{r}_2, t_2)\rangle. \qquad /3/$$

Аналогично можно ввести функции четвертого и т.д. порядков. Их фурье-преобразование /по времени/ даст функции взаимной когерентности в координатно-энергетическом представлении/см. ниже/.

Из определения /3/ немедленно получается уравнение для функции взаимной когерентности.

Напишем уравнение /1/ для двух пространственно-временных точек $(\vec{r}_1, t_1)$ и $(\vec{r}_2, t_2)$

$$D(\vec{r}_1, t_1)A_\lambda(\vec{r}_1, t_1) = -4\pi g_\lambda(\vec{r}_1, t_1),$$
$$D(\vec{r}_2, t_2)A^*_\lambda(\vec{r}_2, t_2) = -4\pi g^*_\lambda(\vec{r}_2, t_2).$$

Усреднив их произведение по λ, получим дифференциальное уравнение IV порядка

$$D(\vec{r}_1, t_1)D(\vec{r}_2, t_2)B(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = 16\pi^2 \beta(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2), \qquad /4/$$

которое нужно решать вместе с условиями излучения. Оно связывает функцию взаимной когерентности частиц с функцией взаимной когерентности их источников, определяемой как

$$\beta(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \langle g_\lambda(\vec{r}_1, t_1)g^*_\lambda(\vec{r}_2, t_2)\rangle. \qquad /5/$$

Уравнение /4/ решается обычным путем. Вводятся функции взаимной когерентности $\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2)$ и $\beta(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2)$ в координатно-энергетическом представлении

$$B(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2)\, e^{-i\epsilon_1 t_1 + i\epsilon_2 t_2}\, d\epsilon_1\, d\epsilon_2 \qquad /6/$$

и точно такое же уравнение для пары $\beta - \tilde{\tilde{\beta}}$. Они связаны уравнением

$$D_{\epsilon_1}(\vec{r}_1) D_{\epsilon_2}(\vec{r}_2) \tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2) = 16\pi^2 \tilde{\tilde{\beta}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2), \qquad /7/$$

где
$$D_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} + \epsilon^2 - m^2.$$

Функцию Грнна уравнения

$$D_\epsilon(\vec{r}) \tilde{\tilde{A}}(\vec{r}, \epsilon) = -4\pi \tilde{\tilde{g}}(\vec{r}, \epsilon)$$

обозначим $G_\epsilon(\vec{r}, \vec{r}\,')$. Тогда решение уравнения /7/ есть

$$\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2) = 16\pi^2 \int \tilde{\tilde{\beta}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2) \times$$
$$\times G_{\epsilon_1}(\vec{r}_1, \vec{r}_1\,') G^*_{\epsilon_2}(\vec{r}_2, \vec{r}_2\,')\, d\vec{r}_1\,'\, d\vec{r}_2\,'. \qquad /8/$$

Подставив сюда фурье-преобразование функции $\tilde{\tilde{\beta}}$, выразим функцию взаимной когерентности частиц в координатно-энергетическом представлении через функцию взаимной когерентности источников в координатно-временном представлении

$$\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2) = 8\pi \int \beta(\vec{r}_1\,', t_1'; \vec{r}_2\,', t_2') \times$$
$$\frac{\exp[ip_1 |\vec{r}_1\,' - \vec{r}_1| + i\epsilon_1 t_1']}{|\vec{r}_1\,' - \vec{r}_1|} \; \frac{\exp[-ip_2 |\vec{r}_2\,' - \vec{r}_2| - i\epsilon_2 t_2']}{|\vec{r}_2\,' - \vec{r}_2|} dr_1'\, dt_1'\, dr_2'\, dt_2'. \qquad /9/$$

Пусть расстояние R_0 от области рождения мезонов до точек их регистрации $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ велико, тогда сферические волны можно заменить плоскими

$$\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2) = 8\pi \exp[i(p_1 - p_2)R_0] R_0^{-2} \times \qquad /10/$$
$$\times \int \beta(\vec{r}_1\,', t_1'; \vec{r}_2\,', t_2') \exp(-i\vec{p}_1 \vec{r}_1\,' + i\epsilon_1 t_1') \exp(i\vec{p}_2 \vec{r}_2\,' - i\epsilon_2 t_2')\, d\vec{r}_1\,' dt_1'\, d\vec{r}_2\,' dt_2',$$

где $\vec{r}_1\,', \vec{r}_2\,'$ отсчитываются от некоторой точки близ источника. Завиcнмость функции $\tilde{\tilde{B}}$ от точек регистрации $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ входит лишь через импульсы

$$\vec{p}_1 = \sqrt{\epsilon_1^2 - m^2}\, \vec{r}_1 / r_1, \quad p_2 = \sqrt{\epsilon_2^2 - m^2}\, \vec{r}_2 / r_2, \qquad /11/$$

которые направлены на эти точки. Следовательно, на макроскопических расстояниях функция $\tilde{\tilde{B}}$ зависит не от $\vec{r}_1, \epsilon_1, \vec{r}_2, \epsilon_2$, а от $\vec{p}_1, \epsilon_1, \vec{p}_2, \epsilon_2$, то есть ее можно считать импульсно-энергетическим представлением функции взаимной когерентиости мезонов. С точностью до несущественных факторов

$$\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2) \equiv b(\vec{p}_1, \epsilon_1; \vec{p}_2, \epsilon_2), \qquad /12/$$

если $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ вычислять по формулам /11/. В [7] показано, что, измеряя распределение импульсов пар тождественных мезонов в окрестности той области импульсного пространства, где $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$, мы измеряем модуль функции взаимной когерентности

$$\frac{d^2\sigma}{d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2} \sim 1 + |b(\vec{p}_1, \epsilon_1; \vec{p}_2, \epsilon_2)|^2 .$$

Возвращаясь к дифференциальному уравнению /4/, заметим, что вне области, где $\beta \neq 0$, уравнение для B по каждой переменной $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ есть волновое уравнение; следовательно, функция взаимной когерентности распространяется как волна или как волновая функция мезона /факт, хорошо известный в оптике [4] /. Соответствующим свойством обладает и ее фурье-партнер $b(\vec{p}_1, \epsilon_1; \vec{p}_2, \epsilon_2)$.

Угол и длина когерентности. Нетрудно видеть, что некогерентные, некоррелированные источники мезонного поля могут порождать мезонное поле, обладающее той или иной степенью когерентности, возрастающей по мере того, как мезоны регистрируются все дальше от области генерации. Пусть внутри области генерации источники мезонов совсем не коррелированы:

$$\beta(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\delta(t_1 - t_2) f(\vec{r}_1, t_1) \qquad /13/$$

/например, для независимых точечных осцилляторов с временем жизни $\hbar/\Gamma$ $f = e^{-t\Gamma/2}$ /. Тогда функция взаимной когерентности мезонов в координатно-энергетическом представлении есть

$$\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}_1, \epsilon_1; \vec{r}_2, \epsilon_2) = 8\pi \int d\vec{r}\,'_1\, dt'_1\, f(\vec{r}\,'_1, t'_1) \exp[i(\epsilon_1 - \epsilon_2)t'_1] \times$$

$$\times \frac{\exp[ip_1|\vec{r}\,'_1 - \vec{r}_1| - ip_2|\vec{r}\,'_1 - \vec{r}_2|]}{|\vec{r}\,'_1 - \vec{r}_1||\vec{r}\,'_1 - \vec{r}_2|}, \qquad /14/$$

что при несовпадении двух точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ уже не обращается – в отличие от функции β – тождественно в нуль. Так, для равномерно излучающего диска радиуса R, заполненного осцилляторами, на больших удалениях от него R_0 получим

$$\tilde{\tilde{B}}(r_1, \epsilon_1; r_2, \epsilon_2) = 8\pi \frac{\exp(iq^0 R_0)}{R_0^2} \frac{1}{\Gamma - iq^0} \frac{2J_1(|\vec{q}|R)}{|\vec{q}|R}, \qquad /15/$$

где $q^0 = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\vec{q}$ - проекция $\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ на плоскость, перпендикулярную биссектрисе угла θ между $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$.

Пусть для простоты $\epsilon_1 = \epsilon_2$, а угол θ мал. Тогда $|\vec{q}| = p_1\theta$. Функция $2J_1(x)/x$ равна единице при $x = 0$; следовательно, при $\theta = 0$ корреляция между тождественными мезонами максимальна; с увеличением x эта функция убывает и при $x = 3{,}83$ обращается в нуль; при этом исчезает и корреляция между мезонами; возникнув вновь при $x > 3{,}83$, она уже никогда не достигнет заметной величины. Угол между частицами, при котором

$$\frac{p\,\theta R}{\hbar} = 3{,}83, \qquad /16/$$

можно назвать *углом когерентности:* если счетчики тождественных частиц находятся /частицы разлетаются/ в пределах этого угла, между показаниями счетчиков /импульсами частиц/ всегда будет положительная * корреляция; срабатывания счетчиков будут не независимы /близкие друг к другу значения импульсов частиц будут встречаться чаще, чем положено при независимости испускания/. В формуле /16/ удобно ввести длину волны мезона $\lambdabar = \hbar/p_1$, и переписать ее так /заменяя 3,83 единицей/

$$\theta \sim \frac{\lambdabar}{R}. \qquad /17/$$

Наряду с углом когерентности можно ввести – как это делается в оптике – понятие длины когерентности – предельного расстояния L между двумя счетчиками /расположенными на одном и том же удалении R_0 от мишени/, при котором их показания еще коррелированы. Так как $L = \theta R_0$, то

$$L \sim \frac{\lambdabar}{R} R_0. \qquad /18/$$

Длина когерентности растет по мере удаления от источника - просто потому, что лучи, образующие угол когерентности, расходятся. Этот угол, как мы видели, определяется отношением длины волны де-Бройля мезонов к радиусу R области, в которой они рождаются.

* Для бесспиновых бозонов.

Рассмотрим для примера множественное рождение мезонов на протоне или на ядре, когда это рождение описывается статистической теорией и мы не вправе ожидать, что возникающие мезоны окажутся когерентными друг другу. В этом случае, однако, $\lambda \approx R \approx 10^{-13}$ *см*, так что и угол когерентности θ и длина когерентности L - суть макроскопические величины $(\theta \approx 1,\ L \approx R_0)$. Это означает, что когерентность таких мезонов способна быть замечена в опытах, в которых измеряется корреляция между ними. Зато практически всегда некогерентны мезоны, испускаемые двумя разными ядрами /атомами мишени/, ибо в лучшем случае

$$\theta \approx \frac{10^{-13}}{10^{-8}} = 10^{-5}; \quad L = 10^{-5} R_0. \qquad /19/$$

Счетчики, находящиеся в 1 *см* друг от друга, заметили бы корреляцию между такими мезонами, если бы были отнесены от мишени на 1 *км*.

Именно такая ситуация реализуется в астрономии, где интерференционные измерения размеров макроскопических источников /звезд/ возможны потому, что они чрезвычайно от нас удалены /для звезды солнечных размеров $R \sim 10^{11}$ *см*, $\lambda \sim 10^{-5}$ *см*, $\theta \sim 10^{-16}$, а расстояние до ближайших звезд $R_0 \sim 10^{18}$ *см*/. Совпадение λ/R с L/R_0 в астрономии с этой точки зрения выглядит случайностью, для ядерной же физики оно естественно.

Точность, с какой надо измерять энергию, чтобы не нарушить интерференцию - "длина когерентности в энергетическом пространстве" - от расстояния R_0, естественно, не зависит, она имеет порядок

$$q^0 \sim \min(\Gamma, T^{-1}), \qquad /20/$$

где T - разброс моментов включения источников при их возбуждении, а Γ - характерная адронная ширина /обратное время жизни источника/. Это условие зачастую нисколько не обременительно /не мешает наблюдению интерференции/.

Обратимся к формуле /8/ и попытаемся истолковать ее так: пусть $G^*_{\epsilon_2}(\vec r_2, \vec r\,'_2)$ – амплитуда того, что мезон с энергией ϵ_2, возникнув в точке $\vec r_2$ приемника, обнаружен в точке $\vec r\,'_2$ источника; $\beta(\vec r\,'_1, \epsilon_1; \vec r\,'_2, \epsilon_2)$ – амплитуда того, что источник, поглотив в точке $\vec r\,'_2$ мезон с энергией ϵ_2, породит в точке $\vec r\,'$ мезон с энергией ϵ_1; и, наконец, $G_{\epsilon_1}(\vec r_1, \vec r\,'_1)$ – амплитуда того, что мезон с энергией ϵ_1, возникнув в точке $\vec r\,'_1$, будет обнаружен в точке $\vec r_1$ приемника. Тогда правую часть /8/ можно назвать амплитудой того, что мезон, возникнув в точке $\vec r_2$, достигнет таким сложным путем точки $\vec r_1$, изменив при этом свою энергию с ϵ_2 на ϵ_1. Формула /8/ утверждает, что функция взаимной когерентности /в координатно-энергетическом представлении/ может быть рассчитана как амплитуда названного процесса. Это двойник оптической теоремы Ван-Циттарта–Цернике; однако утверждение наше носит более формальный характер, чем эта теорема, ибо менять местами источники и приемники мезонного поля с той легкостью, с какой это делается со светом, мы не можем. Не исключено, однако, что при распространении мезонного поля внутри области генерации мезонов теорема может приобрести неформальный смысл.

Я благодарю М.И.Подгорецкого за многочисленные критические замечания.

Литература

1. E.L.Feinberg. Phys.Repts., 56, No. 5, 237, 1972; Е.Л.Фейнберг. УФН, 104, 539, 1971.
2. G.Goldhaber, S.Goldhaber, W.Lee, A.Pais. Phys.Rev., 120, 300, 1960.
3. R.Hanbury-Brown, R.Q.Twiss. Phil.Mag., 45, 633, 1954.
4. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики. Изд. "Наука", М., 1970, гл. 10.
5. Дж.Клаудер, Э.Сударшан. Основы квантовой оптики. Изд. "Мир", М., 1970.

6. *М.Франсон, С.Сланский. Когерентность в оптике. Изд. "Наука", М., 1967.*
7. *Г.И.Копылов, М.И.Подгорецкий. ЯФ, 15, 392, 1972.*

Рукопись поступила в издательский отдел 27 апреля 1973 года.