СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7117

В.Н.Стрельцов

К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ СВЕТА И ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ ДЛИНЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Р2 - 7117

В.Н.Стрельцов

К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ СВЕТА И ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ ДЛИНЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§1. Об определении времени

Рассмотрим квадратичную форму

$$- ds^2 = g_{ik} \, dx^i dx^k . \qquad /1/$$

Перейдем затем в специальную галилеевскую систему отсчета K', в которой $dx^a = 0$ *, где $a = 1, 2, 3$. Очевидно, что в системе отсчета K' рассматриваемая квадратичная форма будет определять тогда собою некоторый интервал времени (dt'), измеряемый с помощью обычных покоящихся часов. В то же время по наблюдениям из неинерциальной системы отсчета K, где, скажем, существует гавитационное поле, интервалу времени $dx'_0 = cdt'$ ** будет соответствовать длительность dx^0, определяемая выражением:

$$dx^0 = \frac{dx'_0}{\left[-\left(g_{00} + 2g_{0a}\dfrac{dx^a}{dx^0} + g_{a\beta}\dfrac{dx^a}{dx^0}\cdot\dfrac{dx^\beta}{dx^0}\right)\right]^{1/2}} . \qquad /2/$$

---

* Для того, чтобы переход был возможен, должно выполняться условие $-ds^2 < 0$.

** Здесь для удобства мы перешли к световому времени.

В частном случае слабых полей тяготения /см., например, /1//, когда

$$g_{00} = -1 + \frac{2U}{c^2},$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 + \frac{2U}{c^2},$$

$$\text{а} \quad g_{ik} = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k$$

выражение /2/ упростится и будет иметь вид:

$$dt = dt'(1 + \frac{U}{c^2} + \frac{1}{2}\beta^2), \qquad /3/$$

где $\beta^2 = (dx^\alpha / dx^0)^2$.

Здесь следует подчеркнуть, что показания часов в гравитационном поле будут зависеть не только от величины гравитационного потенциала U, но и от скорости движения материального объекта /в данном случае - часов/ в момент наблюдения. При этом, если в рассмотренном частном случае влияние скорости движения и собственно поля тяготения можно разделить, записав /3/ в форме

$$dt = dt'(1 + \frac{U}{c^2})(1 + \frac{1}{2}\beta^2), \qquad /3'/$$

то в общем случае /как это следует из вида выражения /2// этого сделать нельзя.

§2. О скорости распространения света

Рассмотрим снова квадратичную форму /1/, выделив пространственные и временную координаты:

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + 2g_{0\alpha} dx^0\, dx^\alpha + g_{00}\, dx_0^2. \qquad /4/$$

Решая уравнение $ds^2 = 0$ в случае светового сигнала относительно dx^0, найдем два значения:

$$\underset{\rightarrow}{dx^0} = \frac{1}{-g_{00}}\{g_{0\alpha}dx^\alpha + [(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta]^{1/2}\}, \qquad /5'/$$

$$\underset{\leftarrow}{dx^0} = \frac{1}{-g_{00}}\{g_{0\alpha}dx^\alpha - [(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta]^{1/2}\}, \qquad /5''/$$

описывающие времена распространения света в прямом и обратном направлениях.

Коль скоро величины $\underset{\rightarrow}{dx^0}$ и $\underset{\leftarrow}{dx^0}$ отличаются друг от друга, то это означает, что в рамках общей теории относительности световой сигнал для прохождения некоторого отрезка в прямом и обратном направлениях затрачивает разные времена. Иными словами, это должно означать, что скорости распространения света в прямом (c_1) и обратном (c_2) направлениях различны.

Равенство отмеченных скоростей будет иметь место только для полей тяготения специального вида, когда $g_{01} = 0$* .

Если далее мы будем рассматривать частное $-ds^2/g_{11}$ в случае светового сигнала как величину, образованную произведением уравнений распространения света в прямом и обратном направлениях

$$(dx - c_1 dt)(dx + c_2 dt),$$

то легко найдем, что

$$c_1 = \frac{(g_{01}^2 - g_{00}\, g_{11})^{1/2} - g_{01}}{g_{11}} c, \qquad /6/$$

---

* Здесь и ниже мы ограничимся для наглядности случаем одного пространственного измерения.

$$c_2 = \frac{(g_{01}^2 - g_{00}\, g_{11})^{1/2} + g_{01}}{g_{11}}\, c. \qquad /7/$$

Следует также обратить внимание на одно условие, которое вытекает из требования выполнения принципа причинности и налагает определенные ограничения на величины компонент метрического тензора g_{ik}. Применение указанного принципа к рассматриваемому случаю должно означать, что время распространения в одном направлении, например, в направлении туда $(\underrightarrow{dx}^0)$ не может быть отрицательной величиной:

$$\underrightarrow{dx}^0 \geq 0.$$

В то время как для положительных g_{01} выполнение данного условия очевидно, для отрицательных $g_{01} = -g'_{01}$ на основании /5'/ будем иметь:

$$[(g_{01}^2 - g_{11}\, g_{00})\, dx^2]^{1/2} \geq g'_{01}\, dx. \qquad /8/$$

Откуда с учетом положительности g'_{01} и после возведения в квадрат обеих частей неравенства /8/ найдем, что

$$g_{01}^2 - g_{11}\, g_{00} \geq g_{01}^2$$

или

$$g_{11}\, g_{00} \leq 0. \qquad /9/$$

§3. Об определении понятия длины

Перейдем теперь к вопросу об определении понятия длины масштаба в общей теории относительности. Иными словами, мы рассмотрим измерительную процедуру, позволяющую связать величины dx с показателями некоторых экспериментальных приборов. При этом мы будем

опираться на затронутое выше определение времени и тот факт, что связь величин dx' и dt' с показаниями измерительных приборов известна нам из специальной теории относительности.

Возьмем для этого следующие два выражения

$$dx' - dx'_0 = \mu(dx - c_1\, dx^0), \qquad /10/$$

$$dx' + dx'_0 = \nu(dx + c_2\, dx^0),\ * \qquad /11/$$

определяющие собою связь уравнений распространения света в галилеевской (K') и произвольной (K) системах отсчета. Здесь μ и ν - некоторые неизвестные пока коэффициенты.

Складывая и вычитая /10/ и /11/, получим формулы преобразования для дифференциалов координат при переходе от K' к K-системе:

$$dx = \frac{(\mu c_1 + \nu c_2)\, dx' + (\mu c_1 - \nu c_2)\, dx'_0}{\mu\nu(c_1 + c_2)}, \qquad /12/$$

$$dx^0 = \frac{(\mu + \nu)\, dx'_0 + (\mu - \nu)\, dx'}{\mu\nu(c_1 + c_2)}. \qquad /13/$$

В соответствии с процедурой определения /измерения/ длины масштаба, покоящегося в K'-системе, пошлем световой сигнал, скажем, от его левого конца к правому. Сигнал через время $dx'_0 = dx'$, где dx' - длина данного бесконечно малого масштаба, дойдет до правого конца, отразится там и через время $2dx'_0$ возвратится в исходную точку.

По наблюдениям из K-системы /на основании /12/ и /13// будем иметь, что световой сигнал пройдет туда расстояние

$$\underrightarrow{dx} = \frac{2c_1}{\nu(c_1 + c_2)}\, dx'_0 \qquad /14/$$

* Здесь c_1 и c_2 - безразмерные скорости света.

и затратит при этом время

$$\underrightarrow{dx}^{0} = \frac{2}{\nu(c_1 + c_2)} dx'_0 . \qquad /15/$$

Тогда для обратного направления будем иметь соответственно

$$\underleftarrow{dx} = -\frac{2c_0}{\mu(c_1 + c_2)} dx'_0 , \qquad /16/$$

$$\underleftarrow{dx}^{0} = \frac{2}{\mu(c_1 + c_2)} dx'_0 . \qquad /17/$$

При этом суммарное расстояние, пройденное светом туда и обратно, составит

$$\underrightarrow{dx} - \underleftarrow{dx} = \left(\frac{c_1}{\nu} + \frac{c_2}{\mu}\right) \frac{2dx'_0}{c_1 + c_2} , \qquad /18/$$

а затраченное суммарное время будет равно:

$$dX^0 = \underrightarrow{dx}^{0} + \underleftarrow{dx}^{0} = \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu}\right) \frac{2dx'_0}{c_1 + c_2} . \qquad /19/$$

С учетом того, что $\mu\nu = g_{11}$ и привлекая /2/ и последнее равенство, будем иметь:

$$\mu = \frac{(g_{01}^2 - g_{00} g_{11})^{1/2} \pm \left(g_{01} + g_{11} \frac{dx}{dx^0}\right)}{\left\{-\left[g_{00} + 2g_{01} \frac{dx}{dx^0} + g_{11}\left(\frac{dx}{dx^0}\right)^2\right]\right\}^{1/2}} . \qquad /20/$$

Определяя далее длину рассматриваемого масштаба в K-системе как полусумму растояний, пройденных светом туда и обратно

$$d\ell = \frac{1}{2}(\underrightarrow{dx} - \underleftarrow{dx}) ,$$

найдем формулу преобразования длины, которая будет иметь вид:

$$d\ell = \left\{ (k - g_{01}) \frac{k + g_{01} + g_{11} \frac{dx}{dx^0}}{g_{11} \left\{-\left[g_{00} + 2g_{02} \frac{dx}{dx^0} + g_{11}\left(\frac{dx}{dx^0}\right)^2\right]\right\}^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + (k + g_{01}) \frac{\left\{-\left[g_{00} + 2g_{01} \frac{dx}{dx^0} + g_{11}\left(\frac{dx}{dx^0}\right)^2\right]\right\}^{1/2}}{k + g_{01} + g_{11} \frac{dx}{dx^0}} \right\} \frac{d\ell'}{2k} ,$$

/21/

где $k = (g_{01}^2 - g_{00} g_{11})^{1/2}$, а $d\ell'$ - длина данного масштаба с точки зрения /инерциальной/ K'-системы, в которой масштаб покоится.

В рассмотренном выше частном случае слабых полей тяготения найдем

$$d\ell = \left(1 - \frac{U}{c^2} + \frac{1}{2}\beta^2\right) d\ell' . \qquad /22/$$

Остановимся теперь на самой процедуре измерения $d\ell$ в K-системе. Оказывается, для ее определения можно измерить, например, dX^0 и расстояние $\Delta x = \underrightarrow{dx} + \underleftarrow{dx}$, пройденное левым концом данного масштаба от момента измерения светового сигнала до момента его поглощения. При этом будем иметь, что

$$d\ell = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} dX^0 + \frac{c_1 - c_2}{2(c_1 + c_2)} \Delta x , \qquad /23/$$

где величины c_1 и c_2 определяются, очевидно, значениями компонент метрического тензора g_{ik} в K-системе.

Следует, впрочем, обратить внимание на трудности, связанные, скажем, с возможностью измерения величин

dX^0 и Λx, а следовательно, в конечном счете, и с самой возможностью введения понятия длины в общей теории относительности *. Дело в том, что в рассмотренном "мысленном опыте" фактически предполагается, что гравитационное поле не влияет на показания приборов, измеряющих dX^0 и Λx. Чтобы избежать отмеченных трудностей, необходима или специальная постановка данного опыта **, или можно воспользоваться принципом эквивалентности, который позволяет в некоторых случаях заменить поле тяготения полем ускорений, действующим только на измеряемый масштаб.

Литература

1. *А.Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. 1, "Наука", М., 1966, стр. 500; В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения, ГИТТЛ, М., 1955, §55.*
2. *Н.С.Лебедева, В.М.Морозов. Препринт ИАЭ-1147, Москва, 1966.*

Рукопись поступила в издательский отдел 26 апреля 1973 года.

---

* В этой связи см. также /2/.

** Например, подобной той, которую мы имеем в случае с отклонением светового луча в поле тяготения Солнца и где влиянием гравитационного поля на показания измерительных приборов можно пренебречь.