ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7116

Л.Г.Заставенко

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КЛАССА БЕСКОНЕЧНО-КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7116

Л.Г.Заставенко

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КЛАССА БЕСКОНЕЧНО-КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Введение

В работах [1–4], где рассматривается модель квантовой теории скалярного поля с самодействием $g\phi^4$ в шредингеровском представлении, функционал основного состояния представляется в виде

$$\Omega_0 = e^{-\kappa}, \qquad /1/$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2}\Big[\int a(k)\phi(k)\phi(-k)\,dk + \qquad /2/$$

$$+\int C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\prod_{i=1}^{4}(\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)+\dots\Big];$$

функции $a(k)$, C_4 ... определяются при подстановке /1/, /2/ в уравнение Шредингера. Естественным образом возникает задача о подсчете средних по основному состоянию вида

$$\Delta(p,q\dots) = \frac{\int \phi(p)\phi(-p)\,\phi(q)\phi(-q)\dots e^{-2\kappa}\,\delta\phi}{\int e^{-2\kappa}\,\delta\phi}. \qquad /3/$$

Подсчет величин вида /3/ необходим, например, для построения нормированных одночастичных состояний.

1.1. Диаграммная техника подсчета таких средних по теории возмущений развита в работе [1]. В ряде случаев, однако, такая техника оказывается недостаточной; особенно это относится к случаю двух [3] и трех пространственных размерностей, когда функция $a(k)$ в /2/ оказывается отрицательной в некоторой области изменения параметра k, так что в нулевом приближении, без учета функций C_4, C_6 ... в /2/, интегралы, входящие в числитель и знаменатель формулы /3/, расходятся.

1.2. В настоящей работе мы улучшим теорию возмущений за счет суммирования некоторых бесконечных классов диаграмм. Нашим результатом является выражение /28/ для моментов и уравнение /26/ для функции $\beta(k)$, входящей в /28/.

1.3. Мы перейдем к системе с дискретным набором степеней свободы, так что импульс k будет принимать значения

$$k_j = hj\,, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad /4/$$

При этом интегралы в /2/ перейдут в суммы

$$\int dk \to h \sum_j \;. \qquad /4'/$$

Разделим после этого величину /2/ на две части:

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \;, \qquad /5а/$$

где

$$\kappa_0 = h \sum_j a(k_j)\phi(k_j)\phi(-k_j) +$$
$$+ 3\cdot h^3 \sum_{j_1 j_2} C_4(k_{j_1}, -k_{j_1}, k_{j_2}, -k_{j_2})\, \phi(k_{j_1})\phi(-k_{j_1}) \times$$
$$\times \phi(k_{j_2})\phi(-k_{j_2}) + \qquad /5б/$$
$$+ 5\cdot 3\cdot 1\, h^5 \sum_{j_1 j_2 j_3} C_6(k_{j_1}, -k_{j_1}, k_{j_2}, -k_{j_2}, k_{j_3}, -k_{j_3}) \times$$
$$\times \phi(k_{j_1})\phi(-k_{j_1})\phi(k_{j_2})\phi(-k_{j_2})\phi(k_{j_3})\phi(-k_{j_3}) + \ldots$$

В κ_0 каждая переменная $\phi(k_j)$ входит вместе с комплексно сопряженной величиной $\phi(-k_j)$; $\kappa_1 \equiv \kappa - \kappa_0$.

1.4. Выделенные в κ_0 члены составляют ничтожную часть всех членов κ, однако именно они определяют вклад от каждого члена κ в среднее /3/ в низшем порядке теории возмущений; в высших порядках теории возмущений вклады κ_0 и κ_1 одного порядка величины.

1.5. Функционалы κ_0 и κ_1 дают аддитивные вклады в /26/; величина /20/ определяется κ_0, величина /27/ - κ_1 . Следует отметить существенную разницу между величинами /20/ и /27/: в то время как /20/ содержит каждую функцию $C_4, C_6 \ldots$ только один раз и линейно, /27/ содержит всевозможные степени и произведения функций $C_4, C_6 \ldots$ Таким образом, сведение к замкнутому интегральному уравнению удается лишь для интегралов

$$I(\ell) = \int \phi(\ell)\phi(-\ell)\, e^{-2\kappa_0} \prod_j d\phi(k_j)\,, \qquad /6/$$

полученных из /3/ заменой κ на κ_0. Вообще же для интеграла /3/ достигнутый прогресс ограничивается переходом от старой формы теории возмущений /1/ к новой, полученной суммированием некоторых бесконечных классов диаграмм.

1.6. Возможность свести подсчет интеграла /6/ к решению интегрального уравнения оказывается достаточной для преодоления специфической трудности с подсчетом средних /3/, возникающей в случае двух пространственных степеней свободы; мы рассмотрим этот случай в §3 в целях иллюстрации степени эффективности нашего метода.

1.7. В §4 дан вывод формул /17/-/19/ по методу перевала; этот вывод является неаккуратным, но мы приводим его как своего рода мнемонический прием для быстрого получения результата настоящей работы.

1.8. В §5 мы применим наш метод к подсчету интеграла /35/, определяющего точную функцию Грина частицы в теории с самодействием

$$\delta \mathfrak{L} = -g\phi^4 \;. \qquad /7/$$

Интеграл /35/ принадлежит, очевидно, классу интегралов /3/. Формула /25/-/26/ для интеграла /35/ принимает вид /37/, /38/, совпадающий с просуммированной формой теории возмущений, в которой все линии - жирные, так что остаются только скелетные диаграммы собственной энергии /но вершины надо учитывать все, а не только неприводимые/.

1.9. Формула /3/ охватывает только главные моменты; общая формула имеет вид /выпишем ее только для четырех импульсов/

$$\Delta'(p_1,p_2,p_3,p_4)=\overline{\phi(p_1)\phi(p_2)\phi(p_3)\ \phi(p_4)}=$$

$$=\delta_{p_1+p_2}\ \delta_{p_3+p_4}\ \Delta(p_1,p_3)+\delta_{p_1+p_3}\ \delta_{p_2+p_4}\ \Delta(p_1,p_2)+$$

$$+\delta_{p_1+p_4}\ \delta_{p_2+p_3}\ \Delta(p_1,p_2)+$$

$$+\delta_{p_1+p_2+p_3+p_4}\ X(p_1,p_2,p_3,p_4). \qquad /3a/$$

Здесь черта сверху обозначает усреднение /по состоянию /1/ или, например, /8//; функции $\Delta(p,q)$ определены формулой /3/ /или соответствующей формулой для состояния /8//;

$$\delta_p = \begin{matrix} 1 & p=0 \\ 0 & p\neq 0 \end{matrix}$$

/имеется в виду, что импульсы $p_1, p_2 ..$ принимают дискретные значения - пункт 1.3/. Величина X в формуле /3а/ равна нулю, если усреднение производится по распределению /8/ /ибо оно инвариантно при преобразовании

$$\phi(k)\to e^{ia(k)}\ \phi(k),\ -a(-k)=a(k),$$

а не только при преобразовании трансляции

$$\phi(k)\to e^{ika}\ \phi(k),$$

как распределение /1//, однако для распределения /1/ величина X отлична от нуля. Чтобы убедиться в последнем, достаточно рассмотреть величину /3а/ в случае

одной пространственной и одной временной степени свободы при $g\to 0$, когда пригодна обычная теория возмущений [1]; первый неисчезающий член выражения X равен

$$-4!\,h^3\ \frac{C_4(p_1,p_2,p_3,p_4)}{[2ha(p_1)][2ha(p_2)][2ha(p_3)][2ha(p_4)]}\ .$$

Величина X пропорциональна h^{-1}, в то время как $\Delta(p,q)\sim h^{-2}$; в настоящей работе мы рассматриваем только большую величину Δ; необходимо, однако, иметь в виду, что, например, 4-частичная функция Грина /ее можно подсчитать по методу §5/ определяется именно величиной X.

Подчеркнем, что моменты вида /3а/ следует учитывать при подсчете средних вида

$$\int G(p_1,p_2,p_3,p_4)\ \overline{\prod_{j=1}^{4}\phi(p_j)}\,dp_j\ \delta(\sum_j p_j).$$

1.10. Из формулы вида /3а/, /28/ следует

$$\overline{[\phi(p)\phi(-p)]^n}=\frac{n!}{[2h(a(p)+\beta(p))]^n}+O(h^{1-n}).$$

Вывод этой формулы дается в специальной работе [7].

§2. Суммирование диаграмм

В этом параграфе выведем, методом суммирования диаграмм, формулы /25/, /26/, определяющие моменты /3/ распределения /1/.

Начнем с гораздо более простой задачи подсчета моментов /9/ и получим для этих моментов формулы /14/-/16/ в пунктах 2.1-2.2. Далее /пункт 2.3/ рассмотрим более сложные моменты /6/ распределения

$$\Omega_{00}=e^{-\kappa_0} \qquad /8/$$

/формулы /18/-/20//; только после этого мы будем в состоянии вывести окончательные формулы /25/, /26/.

2.1. Начнем с вычисления интеграла

$$\Delta_{04}(k)=\frac{\int\phi(k)\,\phi(-k)\,e^{-2(\kappa_{02}+\kappa_{04})}\prod_i d\phi(k_i)}{\int e^{-2\kappa_{02}-2\kappa_{04}}\prod_j d\phi(k_j)}, \qquad /9/$$

где κ_{02} и κ_{04} - однородные степени два и четыре соответственно части функционала κ_0 /5/:

$$2\kappa_{02}(\phi)+2\kappa_{04}(\phi)=h\sum_k a(k)\phi(k)\phi(-k)+ \\ +2h^3\sum_{k,p} C_4(k,-k,p,-p)\,\phi(k)\phi(-k)\phi(p)\,\phi(-p). \qquad /10/$$

Имеем, очевидно,

$$\Delta_{04}(k)=\frac{\int\phi(k)\phi(-k)\,e^{-2\kappa_{02}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}(\kappa_{04})^n\prod_j d\phi(k_j)}{\int e^{-2\kappa_{02}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}(\kappa_{04})^n\prod_j d\phi(k_j)}. \qquad /11/$$

Согласно правилам, данным в работе /1/, получаем

$$\Delta_{04}(k)=\frac{1}{2a(k)h}-\frac{4}{1!}\sum_p\frac{3h^3C_4(k,-k,p,-p)}{(2a(k)h)^2\,2a(p)\,h}+ \\ +\sum_{p,q}\frac{8\cdot1\cdot4\cdot1}{2!}\;\frac{3h^3C_4(k,-k,p,-p)\,3h^3C_4(p,-p,q,-q)}{[2ha(k)]^2\,[2ha(p)]^2\,2ha(q)}+ \\ +\frac{8\cdot4}{2!}\sum\frac{3h^3C_4(k,-k,p,-p)\,2h^3C_4(q,-q,k,-k)}{[2ha(k)]^3\,2ha(p)\,2ha(q)}+\ldots \qquad /12/$$

Здесь факториалы в знаменателях возникают от разложения экспоненты, в остальном численный коэффициент определяется числом различных спариваний /см. /1/, пункт 2.7/.

2.2. Графически каждому фактору κ_{04} в /11/ следует поставить в соответствие группу из четырех точек, каждому спариванию - линию, соединяющую две точки. Эти две точки могут принадлежать либо одному и тому же фактору κ_{04} /одной группе/, либо разным факторам /различным группам/. Линию, соединяющую разные группы, будем называть длинной, соединяющую две точки одной группы - короткой. Из всей совокупности связных диаграмм, входящих в n-ый член разложения /11/, расмотрим сначала лишь такие диаграммы, в которых некоторые две точки каждого из факторов κ_{04} связаны /короткой/ линией. Заметим, что короткую линию в данной группе можно провести двумя различными способами. После установления коротких линий в каждой группе κ_{04} остаются две свободные точки; всякая связная* диаграмма, отвечающая n-му члену /11/, имеет вид цепочки из групп точек, связанных длинными линиями; цепочка начинается линией, соединяющей первую группу с $\phi(k)$, и кончается линией, соединяющей последнюю группу с $\phi(-k)$. Число различных диаграмм такого вида равно, очевидно, $2^n n!$; здесь $n!$ - число возможных перестановок факторов κ_{04} вдоль цепочки, 2 - число способов подсоединения длинных линий к двум свободным точкам данной группы. Таким образом, сумма рассмотренной совокупности диаграмм равна

$${}_1\Delta_{04}(k)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(-12)^n\,\frac{1}{2ha(k)}\left[\frac{\int dp\,C_4(k,-k,p,-p)}{2a(k)\,2a(p)}\right]^n= \\ =\frac{1}{h}\left[2a(k)+12\int\frac{dp}{2a(p)}C_4(k,-k,p,-p)\right]^{-1}. \qquad /13/$$

Расширим теперь приведший к /13/ класс диаграмм: представим число n в представлении /11/ в виде

$$n=m+n_1+n_2+\ldots+n_m,$$

---

* Напомним, что в /12/ следует учитывать только связные диаграммы /1/ пункт 2.7/.

где m, n_1, n_2,... - неотрицательные целые числа. Разобьем κ_{04}^n на произведения

$$\kappa_{04}^n = \kappa_{04}^m \kappa_{04}^{n_1} \dots \kappa_{04}^{n_m};$$

это можно сделать $\dfrac{n!}{m!\, n_1! \dots n_m!}$ способами. Если для данного i, $i = 1, 2, \dots m$, $n_i > 0$, составим из $\kappa_{04}^{n_i}$ цепочку наподобие рассмотренных выше, из которой глядят наружу только две свободные точки начала и конца цепочки. Далее в i-м множителе κ_{04} из числа κ_{04}^m разорвем бывшую прежде короткую линию и заменим ее на две длинных, соединяющих данный множитель κ_{04} со свободными точками множителя $\kappa_{04}^{n_i}$. Суммируя по всем неотрицательным значениям m, n_1, n_2,..., получаем для расширенной совокупности диаграмм представление

$$_2\Delta_{04}(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-12)^m}{2h a(k)} \Big[\int \frac{dp\, C_4(k,-k,p,-p)}{2a(k)\; 2a(p)} \times$$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-12)^n \int \frac{dq\, C_4(p,-p,q,-q)}{2a(p)\, 2a(q)} \Big)^n \Big]^m =$$

$$= h^{-1} \{ 2a(k) + 12 \int dp\, C_4(k,-k,p,-p) \cdot$$

$$\cdot \Big[2a(p) + 12 \int \frac{dq}{2a(q)} C_4(p,-p,q,-q) \Big]^{-1} \Big\}^{-1}.$$

Дальнейшее продолжение описанной процедуры, очевидно, дает для суммы соответствующего класса диаграмм:

$$_\infty\Delta_{04} = \frac{1}{2h(a(k) + \eta(k))}. \qquad /14/$$

Здесь $\eta(k)$ - функция, определенная интегральным уравнением:

$$2\eta(k) = 12 \int \frac{dp\, C_4(k,-k,p,-p)}{2\,[\, a(p) + \eta(p)\,]}. \qquad /15/$$

Поскольку рассмотренный класс диаграмм исчерпывает все диаграммы, то

$$_\infty\Delta_{04}(k) = \Delta_{04}(k). \qquad /16/$$

Таким образом, мы показали, что вычисление бесконечномерного интеграла /9/ сводится к решению интегрального уравнения /15/.

2.3. Подобно тому, как это было сделано в пункте 2.2, устанавливается следующий результат: если κ_0 - функционал /5/ и $\Delta_0(k)$ - момент

$$\Delta_0(k) = \frac{\int \phi(k)\, \phi(-k)\, e^{-2\kappa_0} \prod_j d\phi(k_j)}{\int e^{-2\kappa_0} \prod_j d\phi(k_j)}, \qquad /17/$$

то

$$\Delta_0(k) = \frac{1}{2h[\, a(k) + \eta(k)]}, \qquad /18/$$

где величина $\eta(k)$ определяется интегральным уравнением

$$\eta(k) = F_1(\eta) \qquad /19/$$

$$F_1(\eta) = \frac{2\cdot 3!!}{2} \int \frac{C_4(k,-k,p,-p)\, dp}{a(p) + \eta(p)} +$$

$$+ \frac{5!!\,3}{2^2} \int \frac{C_6(k,-k,p,-p,q,-q)\, dp\, dq}{[a(p) + \eta(p)]\; [a(q) + \eta(q)]} + \dots +$$

$$+ \frac{7!!\,4}{2^3} \int \frac{C_8(k,-k,p,-p,q,-q,s,-s)\, dp\, dq\, ds}{[a(p) + \eta(p)][a(q) + \eta(q)][a(s) + \eta(s)]} +$$

$$+ \dots \qquad /20/$$

2.4. Для моментов типа /3/ распределения $e^{-2\kappa_0}$ получаем формулу

$$\Delta_0(k,p,\dots) = \frac{1}{2h[a(k)+\eta(k)]}\cdot\frac{1}{2h[a(p)+\eta(p)]}\cdots \qquad /21/$$

Здесь $\eta(k)$ - функция, определенная уравнением /19/.

2.5. Теперь уже не представляет труда получить формулы типа /18/-/21/ для моментов /3/ распределения /1/. Пользуясь /5/, представим величину $\Delta(k)$ (3) в виде:

$$\Delta(k) = \frac{\int \phi(k)\phi(-k)\, e^{-2\kappa_0} \sum \frac{(-)^n}{n!}\kappa_1^n \prod_j d\phi(k_j)}{\int e^{-2\kappa_0} \sum \frac{(-)^n \kappa_1^n}{n!} \prod_j d\phi(k_j)}, \qquad /22/$$

представим величину κ_1^n в виде многочленов по ϕ и подсчитаем получившиеся интегралы, пользуясь формулой /21/; при этом, как и раньше, величина $\Delta(k)$ определится как сумма только связных диаграмм. Имеем, согласно /5/:

$$\kappa_1 = \kappa_{14} + \kappa_{16} + \dots,$$

где, например,

$$\kappa_{14} = h^3 \sum_{\substack{k_1+k_2\neq 0\\ k_1+k_3\neq 0\\ k_1+k_4\neq 0\\ k_2+k_3\neq 0\\ k_2+k_4\neq 0\\ k_3+k_4\neq 0}} C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\,\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)$$

и так далее. Введем обозначение

$$b(k) = 2[a(k)+\eta(k)]. \qquad /23/$$

Член с $n=0$ дает в /22/ вклад $[h b(k)]^{-1}$, член с $n=1$ вклада не дает; учитывая еще члены с $n=2$ и $n=3$, получаем, согласно /21/ и правилам работы /1/:

$$\Delta(k) = \frac{1}{h\,b(k)} +$$

$$+ \frac{8\cdot 4}{2!\,h}\, 3!\, \frac{1}{[b(k)]^2} \int \frac{C_4^2(k,p,q,r)\,dp\,dq\,dr\,\delta(k+p+q+r)}{b(p)\,b(q)\,b(r)} +$$

$$+ \frac{12\cdot 6}{2!\,h}\, 5!\, \frac{1}{[b(k)]^2} \int \frac{C_6^2(k,p,q,r,s,t)\,dp\,dq\,dr\,ds\,dt\,\delta(k+p+q+r+s+t)}{b(p)\,b(q)\,b(r)\,b(s)\,b(t)} +$$

$$+ \frac{(-)}{3!\,h}\, \frac{12\cdot 8\cdot 3\cdot 3\cdot 4!}{[b(k)]^2} \int \frac{C_4(k,p,q,r)\,\delta(k+p+q+r)\,dp\,dq\,dr}{b(p)\,b(q)\,b(r)}$$

$$\frac{C_4(-k,-p,q',r')\,\delta(-k-p+q'+r')\,dq'\,dr'}{b(q')\,b(r')}\, C_4(-q,-r,-q',-r') + \dots$$

$$/24/$$

Члены с большими значениями n дают а/ новые, более сложные неприводимые диаграммы, б/ цепочки типа рассмотренных в пункте 2.2, образованные из старых диаграмм; эти цепочки суммируются, как в пункте 2.2 и дают для величины /22/ представление

$$\Delta(k) = \frac{1}{2h[a(k)+\beta(k)]}, \qquad /25/$$

где величина $\beta(k)$ определяется интегральным уравнением

$$\beta(k) = F_1(\beta) + F_2(\beta); \qquad /26/$$

здесь $F_1(\beta)$ определяется формулой /20/,

$$F_2(\beta)=-\frac{8\cdot 4}{2!}3!\int\frac{C_4^2(k,p,q,r)dpdqdr\,\delta(p+k+q+r)}{2[a(p)+\beta(p)]2[a(q)+\beta(q)]2[a(r)+\beta(r)]}+\ldots \qquad /27/$$

Следующие члены в /27/ определяются из /24/.

2.6. Подобно /21/ для моментов /3/ получаем представление

$$\Delta(p,q,\ldots)=\frac{1}{2h[a(p)+\beta(p)]2h[a(q)+\beta(q)]}. \qquad /28/$$

Здесь величина $\beta(k)$ определена уравнением /26/.

§3. Случай двух пространственных степеней свободы

В этом случае /3/ первый член правой части /20/ расходится:

$$\beta(k)=3\int\frac{dp\,C_4(p,-p,k,-k)}{[a(p)+\beta(p)]}+\ldots, \qquad /29/$$

где $C_4(p,-p,k,-k)=\dfrac{g}{\omega(p)+\omega(k)}+\ldots,$

$$a(p)=\omega(p)-Z+\ldots,$$

$$Z=3g\int\frac{dk}{\omega^2(k)},$$

$$\omega(k)=\sqrt{k^2+1};$$

точками мы обозначили члены, несущественные при анализе расходимостей в /29/. Интеграл /29/, очевидно, логарифмически расходится.

Введем обозначение

$$\beta(k)-Z=X(k), \qquad /30/$$

тогда /29/ можно переписать в виде

$$X(k)=3g\int\frac{dp}{[\omega(p)+\omega(k)]\omega(p)}-3g\int\frac{dp}{\omega^2(p)}+$$

$$+O(g^2)=-3g\omega(k)\int\frac{dp}{\omega^2(p)[\omega(p)+\omega(k)]}+O(g^2).$$

Таким образом, для величины $X(k)$ мы получили представление, не содержащее расходимостей, а именно величина $X(k)$ входит в знаменатели в выражениях вида /28/ для моментов.

§4. Вывод формул /17/-/20/ по методу перевала

Рассмотрим интеграл /6/, где функционал κ_0 определен формулой /5/. Перепишем /6/ в виде

$$I(k)=\prod_\ell\int\frac{dv(\ell)}{h}\exp\{-3h\Sigma C_4(p,-p,q,-q)v(p)v(q)-$$

$$-5\cdot 3h^2\Sigma C_4(p,-p,q,-q,s,-s)v(p)v(q)v(s)+\ldots\}K(v), \qquad /31/$$

где

$$K(v)=\{\prod_r\int d\phi(r)e^{-ha(r)\phi(r)\phi(-r)}\cdot\delta(\frac{v(r)}{h}-\phi(r)\phi(-r)\}\cdot$$

$$\cdot\phi(k)\phi(-k)$$

Подставим сюда интегральное представление δ-функции

$$\delta[v(r)-\phi(r)\phi(-r)]=\frac{h}{2\pi i}\int da(r)e^{h(\frac{v(r)}{h}-\phi(r)\phi(-r))\,a(r)}$$

и проинтегрировав по ϕ, получим

$$K(v,k)=const \int \frac{1}{2h[a(k)+a(k)]} \prod_r da(r) \cdot$$

$$\cdot \exp\{v(r)a(r) - \frac{1}{2}\ln[a(r)+a(r)]\}. \qquad /32/$$

Положение седла $a=a_0$ выражения в экспоненте определяется уравнением

$$v(r)=\frac{1}{2[a(r)+a_0(r,v)]}. \qquad /33/$$

Выполнив /формально/ интегрирование в /32/ по методу перевала, получим

$$K(v,k)=\frac{const\, e^{\Sigma\{v(r)a_0(r)-\frac{1}{2}\ln[a(r)+a_0(r,v)]}}{2h[a(k)+a_0(k,v)]}.$$

Подставим это выражение в /31/ и снова применив метод перевала, получим с учетом /33/

$$I(k)=\frac{const\, \exp\{\Sigma v_0(r)a_0(r)-\frac{1}{2}\ln[a(r)+a_0(r,v_0)]-}{2h[a(k)+a_0(k,v_0)]} - \qquad /34/$$

$$\frac{-3h\Sigma C_4(p,-p,q,-q)v_0(p)v_0(q)-15h^2\Sigma\ \dots\}}{}.$$

Здесь величина v_0 определяется уравнением седла

$$a_0(p,v_0)=F_1[a_0(\cdot,v_0)], \qquad /34a/$$

эквивалентным уравнению /19/.

4.1. Таким образом, применение метода перевала к интегралу /6/ позволяет получить результат пункта 2.3 без утомительных рассмотрений пункта 2.2. Ясно, однако, что подсчет интегралов /32/ и затем /31/ по методу перевала - незаконны, ибо выражения, стоящие в экспоненте в этих интегралах, не содержат большого параметра, который мог бы оправдать применение метода перевала. Таким образом, правильный результат /34/ получен за счет компенсации двух ошибок. "Вывод" формулы /19/ по методу перевала следует поэтому рассматривать лишь как вспомогательный прием для быстрого получения этой формулы.

§5. *Вычисление фейнмановского интеграла для функции Грина*

Как известно /см., например, /5/ /, функция Грина бозона в квантовой теории бозонного поля с самодействием может быть представлена как отношение интегралов

$$G(k,q)=\frac{\int \phi(k)\phi(q)e^{-i\int\mathfrak{L}(\phi)dp}\,\delta\phi}{\int e^{-i\int\mathfrak{L}(\phi)dp}\,\delta\phi}. \qquad /35/$$

Применим к подсчету этого интеграла формулу /25/. Для определенности примем

$$\int\mathfrak{L}(\phi)dp=\frac{1}{2}\int(p^2+m^2)\phi(p)\phi(-p)dp+$$

$$+g\int\prod_{j=1}^{4}\phi(p_j)dp_j\,\delta(p_1+p_2+p_3+p_4). \qquad /36/$$

Интеграл /35/-/36/ принадлежит классу интегралов /1/-/3/ с

$$a(k)=i\frac{1}{2}(k^2+m^2)$$

$$C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)=g$$

$$C_6=C_8=\dots=0.$$

Таким образом, из /25/ получаем

$$G(k,q)=\frac{\delta(k+q)}{i[\,k^2+m^2+\Sigma(k)\,]}\,. \qquad /37/$$

Здесь функция $\Sigma(k)$, согласно /26/, /27/, определяется интегральным уравнением $(\Sigma=2\beta)$

$$\Sigma(k)=12\int\frac{dp}{p^2+m^2+\Sigma(p)}-$$

$$-\frac{8\cdot4\cdot3!}{2!}\int\frac{dp\,dq\,dr\,\delta(p+q+r+k)}{[p^2+m^2+\Sigma(p)\,][\,q^2+m^2+\Sigma(wq)][\,r^2+m^2+\Sigma(r)]}$$

$$+\ \dots \qquad /38/$$

Это представление функции $\Sigma(k)$ совпадает, очевидно, с хорошо известной просуммированной формой теории возмущений, в которой все линии - жирные, так что остается учесть лишь неприводимые диаграммы собственной энергии /но вершинные диаграммы должны учитываться все, а не только неприводимые/. Функция $\Sigma(k)$ есть, очевидно, не что иное, как собственная энергия бозона /6/.

/Функция $\delta(k+q)$ в /37/ в дискретном представлении пункта 1.3 задается формулой

$$\delta(p)=\left.\begin{matrix}\frac{1}{h} & p=0\\ 0 & p\neq 0\end{matrix}\right\}/\,.$$

Литература

1. Л.Г.Заставенко. ТМФ 7, 20 /1971/.
2. Л.Г.Заставенко. ТМФ, 10, 58 /1972/.
3. Л.Г.Заставенко. ТМФ, 9, 355 /1971/.
4. Л.Г.Заставенко. ТМФ 8, 335 /1971/.

5. Н.П.Коноплева, В.Н.Попов. Калибровочные поля, Москва, Атомиздат, 1972.
6. F.J.Dyson. Phys.Rev., 75, 1756 (1949).
7. Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р2-7114, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел 26 апреля 1973 года.