СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 7114

Л.Г.Заставенко

ОБ ОДНОМ ПРОСТОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА В МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ БОЗОННОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7114

Л.Г.Заставенко

ОБ ОДНОМ ПРОСТОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА В МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ БОЗОННОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ

§1. Введение

В работе /1/ функционал основного состояния в квантовой теории скалярного нейтрального поля с самодействием

$$H' = 2\pi g \int \phi(x)^4 dx$$

при отсутствии вырождения основного состояния представлен в виде

$$\Omega_0 = e^{-\kappa},$$

где κ - "степенной ряд"

$$\kappa(\phi) = \frac{1}{2}\{ \int a(k)\phi(k)\phi(-k)dk +$$

$$+ \int C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\prod_{i=1}^{4}(\phi(k_i)dk_i)\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$+ \dots \}. \qquad /1/$$

Мы будем понимать рассматриваемое скалярное нейтральное поле с самодействием как систему с дискретным набором степеней свободы. Тогда интегралы в /1/ следует понимать как интегральные суммы, например,

$$\int a(k)\phi(k)\phi(-k)dk \to h\sum a(k_i)\phi(k_i)\phi(-k_i),$$

$$k_i = hi, \quad i = 0, \pm 1, \dots .$$

В настоящей работе рассмотрим функцию

$$\rho[k_1, k_2, k_3 \dots],$$

полученную интеграцией плотности вероятности $|\Omega_0|^2/N$ $/N$-норма/ по всем переменным $\phi(k_i)$, за исключением $\phi(p_1), \phi(-p_1), \phi(p_2), \phi(-p_2)$ /и $\phi(0)$, если среди чисел p_1, p_2, p_3 есть нуль/, и получим очень простую формулу

$$\rho(p_1, p_2, p_3 \ldots) = \prod_a \sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta(p_a)}}\; e^{-\frac{\phi(p_a)\phi(-p_a)}{2\Delta(p_a)} + \ldots} \qquad /2/$$

/здесь последовательность p_a предполагается содержащей вместе с данным вектором, например, p, и ему противоположный $-p$, так что в произведении /2/ каждый член, кроме случая $p_a = 0$, входит два раза; величина $\Delta(k)$ определена как момент

$$\Delta(p) = \int \Omega_0^2 \phi(p)\phi(-p) \prod_j d\phi(k_j)/N \qquad /3/$$

распределения Ω_0^2/N. Точками в /2/ обозначены члены, дающие исчезающий в пределе $h \to 0$ вклад в интеграл

$$\int \rho(p_1, p_2, p_3 \ldots) \prod_a d\phi(p_a).$$

1.1 Не представляет труда получить формальные выражения для нормы

$$N = \int \Omega_0^2 \prod_i d\phi(k_i)$$

и всевозможных средних /1/. В экспоненте оставим лишь первый, квадратичный по ϕ, член κ, (1); остальные разложим в степенные ряды. Нам понадобятся интегралы

$$\int exp[-h \sum a(k_i)\phi(k_i)\phi(-k_i)] \prod d\phi(k_i) =$$

$$= \prod_i \sqrt{\frac{\pi}{h a(k_i)}} \equiv N_0$$

$$\int exp[-h \sum a(k_1)\phi(k_1)\phi(-k_1)] \sum_{k_1 k_2 \ldots k_{2n}} C_{k_1 k_2 \ldots k_{2n}}$$

$$\phi(k_1)\phi(k_2)\ldots\phi(k_{2n}) \prod [d\phi(k_1)] =$$

$$= N_0 \Big[\sum_{k_1 k_2 \ldots k_n} C_{k_1, -k_1, k_2, -k_2, \ldots k_n, -k_n} \prod_j^n \frac{1}{2h\, a(k_j)} + \ldots \Big]$$

точками обозначена совокупность $(2n-1)!! - 1$ членов, где спаривание произведено иначе, чем в выписанном первом члене. При подсчете нормы возникает большое число членов,

$$N = N_0 (1 + \Sigma),$$

каждому из которых соответствует определенный способ спаривания, определенная диаграмма; величина $C_{k_1, k_2, \ldots k_{2n}}$ составляется из произведений коэффициентных функций $C_4, C_6 \ldots$. Как оказывается, норма может быть представлена в виде

$$N = N_0\, exp(\Sigma'),$$

где Σ' содержит лишь те члены из Σ, которым соответствуют связные диаграммы.

Рассмотрим далее интеграл

$$Y = \int \Omega_0^2 Z(\phi) \prod_i d\phi(k_i),$$

где

$$Z(\phi) \equiv \sum Y(k_1, k_2 \ldots k_{2n})\phi(k_1)\phi(k_2)\ldots\phi(k_{2n}).$$

Как и раньше, для Y получаем представление в виде суммы большого числа членов, каждому из которых соответствует диаграмма. Можно показать, что величина $\bar{Z} \equiv Y/N$ равна сумме тех членов, которым соответствуют связные диаграммы. Полином, на котором строятся диаграммы, будем называть производящим.

1.2. Нам понадобится следующее определение.
Определение

Связную диаграмму мы будем называть с. несвязной, если связь ее двух некоторых частей осуществляется только через производящий полином; связную диаграмму мы будем называть с. связной, если она не является с. несвязной. Порядком диаграммы будем называть число линий, соединяющих ее с производящим полиномом.

Пример
Диаграмма

$$\sum_{q,p} \frac{h^3 C_4(k,q,p,-k-q-p)\,h^3 C_4(-k,-q,-p,k+q+p)}{[2ha(k)]^2\, 2ha(q) 2ha(p) 2ha(k+q+p)}$$

с производящим полиномом $\phi(k)\phi(-k)$ является с. связной, а диаграмма

$$\sum_{q,\ell} \frac{h^3 C_4(k,-k,q,-q)\,h^3 C_4(p,-p,\ell,-\ell)}{[2ha(k)]^2 [2ha(p)]^2\, 2ha(q) 2ha(\ell)}$$

с производящим полиномом $\phi(k)\phi(-k)\phi(p)\phi(-p)$ – с. несвязной.

С. несвязная диаграмма порядка n является произведением /с комбинаторным коэффициентом/ с. связных диаграмм порядков n_i, $\Sigma n_i = n$. Переходя в приведенных выше и им подобных примерах от сумм к интегралам, легко убедиться, что с. связная диаграмма /любого порядка/ есть величина $\sim h^{-1}$; с. несвязная диаграмма, являющаяся произведением некоторого числа m с. связных диаграмм, очевидно, пропорциональна h^{-m}. При этом имеется в виду, что производящий полином имеет вид

$$Z(\phi) = \prod_a (\phi(k_{i_a})\phi(-k_{i_a}))^{n_a}.$$

Таким образом, при подсчете величины $\bar{Z}$ следует учитывать с. связные диаграммы только второго /наименьшего возможного/ порядка.

1.3. Отметим, что результат /2/ не зависит, очевидно, от конкретного вида самодействия, указанного в начале работы.

1.4. Доказательство, данное в §2, существенно использует положительность функции $a(k)$ при всех k; в действительности, функция $a(k)$ обладает этим свойством только в случае одной пространственной и одной временной степени свободы /1/. Для большего числа пространственных степеней свободы /см., например, /2/ / функция $a(k)$ отрицательна в некоторой области изменения k; в этом случае, для подсчета моментов /4/, следует пользоваться более сложным способом /3,4/, но результат /2/, по-видимому, остается в силе.

1.5. Следует оговориться, что формула /2/ не дает возможности подсчитать, например, интеграл вида

$$\int e^{-2K}\delta\phi \int G(p_1,p_2,p_3,p_4)\Pi(\phi(p_i)dp_i)\delta(\Sigma p_i): \quad /a/$$

члены, выписанные в /2/, дают в /a/ вклад того же порядка величины, что и члены, обозначенные в /2/ точками - эти члены возникают от учета с. связных диаграмм четвертого и более высоких порядков.

1.6. Чтобы лучше понять формулу /2/, перейдем в формуле /1/ /в дискретном представлении/ к новым переменным

$$\sqrt{h}\,\phi(k) = x(k);$$

тогда /1/ примет вид

$$K = \frac{1}{2}\Big[\Sigma a(k)\,x(k)x(-k) +$$

$$+ h\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=0} C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)x(k_1)x(k_2)x(k_3)x(k_4) + \ldots\Big].$$

Таким образом, исходное распределение /1/ само имеет вид /2/ /хотя функции $a(k)$ и $(2\Delta(k))^{-1}$ - разные/.

§2. Доказательство формулы /2/

Рассмотрим величины:

$$d_n(k) = \int \Omega_0^2 \, [\phi(k)\phi(-k)]^n \prod_i d\phi(k_i)/N. \qquad /4/$$

Прежде всего, выпишем явное выражение $d_1(k)$:

$$d_1(k) = \Delta(k) = \frac{1}{2ha(k)} - 4\cdot 3 \sum_q \frac{C_4(k,-k,q,-q)}{[2ha(k)]^2 h2a(q)} +$$

$$+ \frac{6\cdot 8\cdot 4}{2} \sum_{qp} \frac{h^3 h^3 C_4(k,q,p,-k-q-p)\, C_4(-k,-q,-p,k+q+p)}{[2ha(k)]^2\, 2ha(q)\, 2ha(p)\, 2ha(-k-q-p)}$$

$$+ \ldots = A + B + C + \ldots \qquad /5/$$

Здесь мы удержали только члены, зависящие от C_4, и в степени, не выше второй. Удерживая в κ только члены с $a(k)$ и C_4, имеем

$$\Omega_0^2 = e^{-h\sum_k a(k)\phi(k)\phi(-k)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \qquad /6/$$

$$\Big(-h^3 \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=0} C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)\Big)^s.$$

Выделим в выражении /4/ члены, являющиеся степенями входящих в /5/. Представим числа n и s в виде

$$n = a + b + c$$

$$s = b + 2c \qquad /7/$$

так, чтобы получить a множителей вида первого члена /5/, b множителей вида второго члена /5/ и c множителей вида третьего члена /5/. Соответствующее разбиение s-ой степени в /6/ может быть выполнено $\frac{(b+2c)!}{b!\,(2c)!}$ способами; аналогичное разбиение n-ой степени $(\phi(k)\phi(-k)$ в /4/ производится $\left(\frac{n!}{a!\,b!\,c!}\right)^2$ способами; далее, $2c$ множителей

$$\Big(-h^3 \sum C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)\Big)^{2c}$$

можно объединить в пары $(2c-1)!!$ способамн. Далее $[\phi(k)\phi(-k)]^a$ дает в интеграле /4/, /6/

$$a!\,(A)^a,$$

$$[\phi(k)\phi(-k)]^b\, [-h^3 \sum C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4)]^b$$

дает

$$(b!)^2 (B)^b,$$

$$[\phi(k)\phi(-k)]^c [h^6 (\sum C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4))^2]^c$$

дает $(c!)^2\,(2C)^c$.

Здесь A, B и C - первый, второй и третий члены /5/ соответственно. Таким образом, представляем выражение /4/, /6/ в виде

$$d_n(k) = \sum a!\, A^a (b!)^2 B^b (c!)^2 (2C)^c$$

$$\frac{(b+2c)!\,(2c-1)!!}{(b+2c)!\,b!\,(2c)!} \left(\frac{n!}{a!\,b!\,c!}\right)^2.$$

Подставив еще $\frac{(2c-1)!!}{(2c)!} = \frac{1}{2^c c!}$, получим

$$d_n(k) = n! \sum_{a+b+c=n} \frac{n!\, A^a B^b C^c}{a!\, b!\, c!} = n!\,(A+B+C)^n.$$

Таким образом, мы приходим к формуле для моментов

$$d_n(k)=n!\ [\Delta(k)]^n, \qquad /8/$$

соответствующей распределению /2/. Смешанные моменты вида

$$d_{n_1,n_2}(k_1,k_2)=$$

$$\int \Omega_0^2(\phi(k_1)\,\phi(-k_1))^{n_1}\,(\phi(k_2)\phi(-k_2))^{n_2}\prod_i d\phi\,(k_i)/N.$$

подсчитываются аналогично.

В заключение выражаю благодарность академику М.А.Маркову за интерес к работе.

Литература

1. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 7, 20 /1971/.*
2. *Л.Г.Заставенко. ТМФ 9, 355 /1971/.*
3. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ Р2-5760, Дубна, 1971.*
4. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ Р2-7116, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 26 апреля 1973 года.