ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7091

Дао Вонг Дык

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТНОЙ ИНВЕРСИИ В ТЕОРИИ КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7091

Дао Вонг Дык

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТНОЙ ИНВЕРСИИ В ТЕОРИИ КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

Направлено в ТМФ

Возможность применения теории конформной инвариантности в теории элементарных частиц широко обсуждается в последнее время /например, [1–10] и цитированная там литература/, что связано главным образом с успехом гипотезы масштабности в глубоко неупругих процессах [11]. Теория конформной инвариантности дает много интересных следствий, например, она позволяет однозначно определить пропагаторы и вершинные функции с точностью до постоянного множителя [5,7,8,12].

При изучении конформной инвариантности оказывается гораздо удобнее использовать /дискретный/ оператор координатной инверсии [1,13]

$$R_- x^\mu = -\frac{x^\mu}{x^2} \qquad \text{или} \qquad R_+ x^\mu = +\frac{x^\mu}{x^2}, \qquad /1/$$

нежели сам оператор специального конформного преобразования

$$K(c)x^\mu = \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{1 + 2cx + c^2 x^2}. \qquad /2/$$

При этом необходимо знать явный вид оператора $U(R)$. Этому вопросу посвящается п. 1 настоящей работы, где излагается простой метод нахождения закона преобразования полевого оператора без обращения к шестимерному формализму [3,4,6]. Этот метод позволяет также простым образом изучать вопрос нелинейной реализации конформной группы, что будет показано в п. 2.

1. Закон преобразования полей при координатной инверсии

Закон преобразования полевого оператора $\phi(x)$ при координатной инверсии R может быть записан в следующем общем виде /в случае линейного представления/:

$$U(R)\phi(x)U^{-1}(R) = f(x^2)S(x)\phi(Rx), \qquad /3/$$

где $f(x^2)$ - некоторая функция от x^2; $S(x)$ - некоторая матрица; они могут быть определены из свойства R - преобразования

$$R_{\pm}^2 = 1, \qquad /4/$$

из связи между этим преобразованием и преобразованиями конформной группы,

$$U(R_{\pm})DU(R_{\pm}) = -D \qquad /5/$$

$$U(R_{\pm})P_{\mu}U(R_{\pm}) = \mp K_{\mu}, \qquad /6/$$

где D, P_{μ} и K_{μ} - генераторы масштабного преобразования, трансляции и специального конформного преобразования, соответственно, и из закона преобразования поля под действием этих генераторов,

$$e^{-iaD}\phi(x)e^{iaD} = \rho^{-\ell_{\phi}}\phi(\rho x), \quad \rho \equiv e^{a} \qquad /7/$$

$$e^{iaP}\phi(x)e^{-iaP} = \phi(x+a) \qquad /8/$$

$$[K_{\mu}, \phi(x)] = -i\{2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - x^2\partial_{\mu} - 2\ell_{\phi}x_{\mu} - 2ix^{\nu}\Sigma_{\mu\nu}\}\phi(x), \qquad /9/$$

где ℓ_{ϕ} - масштабная размерность поля ϕ, $\Sigma_{\mu\nu}$ - его спиновая матрица.

Прежде чем приступить к нахождению $f(x^2)$ и $S(x)$ в /3/, отметим еще одно свойство преобразований R, которое вытекает прямо из определения /1/:

$$R_{+}R_{-}x^{\mu} = R_{-}R_{+}x^{\mu} = -x^{\mu} = \theta x^{\mu}, \qquad /10/$$

где θ - оператор обращения пространства и времени одновременно. Отсюда можно заключить, что в последовательной теории, которая включает $R_{\pm}$ и θ - инвариантности, только один из операторов $U(R_{+})$ и $U(R_{-})$ унитарный, а другой должен быть антиунитарным. По той причине, которая будет изложена ниже, мы принимаем $U(R_{-})$ за унитарный, а $U(R_{+})$ - антиунитарный.

Получим теперь явный вид $f(x^2)$ и $S(x)$ в /3/ для преобразования R_{-}, имея в виду, что $U(R_{-})$ - унитарный оператор. Прежде всего из свойства /4/ можно положить /с точностью до фазового множителя/

$$f(x^2)f\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1, \qquad /11/$$

$$S(x)S\left(\frac{-x}{x^2}\right) = 1. \qquad /12/$$

Из /5/ и /7/ имеем:

$$\rho^{-\ell_{\phi}}f(x^2)\,f\left(\frac{\rho^2}{x^2}\right)S(x)S\left(-\frac{\rho x}{x^2}\right) = \rho^{\ell_{\phi}}, \qquad /13/$$

которое вместе с /11/ позволяет положить:

$$f(x^2) = (x^2)^{\ell_{\phi}} \qquad /14/$$

и

$$S(x)S\left(-\frac{\rho x}{x^2}\right) = 1. \qquad /15/$$

Уравнения /12/ и /15/ вместе показывают, что $S(x)$ - однородная матрица нулевой степени:

$$S(\rho x) = S(x), \quad \rho > 0. \qquad /16/$$

Далее, используя /6/, /8/ и /9/, можно вывести следующее уравнение:

$$(1+c^2x^2+2cx)^{\ell_\phi}\, S(x)S\left(-\frac{x}{x^2}-c\right)\phi\left(\frac{x+cx^2}{1+2cx+c^2x^2}\right)= \qquad /17/$$

$$=\phi(x)-c^\mu\{2x_\mu x^\nu\partial_\nu-x^2\partial_\mu-2\ell_\phi x_\mu-2ix^\nu\Sigma_{\mu\nu}\}\phi(x)+\dots$$

Разлагая левую часть этого уравнения в ряд по степеням c и учитывая /12/, получим при сравнении членов первого порядка по c в обеих частях:

$$-S(x)\frac{\partial}{\partial y^\mu}S(y)\Big|_{y=-\frac{x}{x^2}}=2ix^\nu\Sigma_{\mu\nu}, \qquad /18/$$

или, в более удобном виде:

$$S\left(-\frac{x}{x^2}\right)\partial_\mu S(x)=2i\frac{x^\nu}{x^2}\Sigma_{\mu\nu}. \qquad /19/$$

Это уравнение вместе с условием /12/ позволяет нам полностью определить матрицу $S(x)$ и, следовательно, закон преобразования полей. Рассмотрим конкретные случаи.

Для бесспинового поля $\Sigma_{\mu\nu}=0$ и уравнения /15/, /16/ и /19/ дают:

$$S(x)=1. \qquad /20/$$

Таким образом, мы имеем:

$$U(R_-)\Phi(x)U^{-1}(R_-)=\delta_\Phi(x^2)^{\ell_\Phi}\,\Phi(R_-x),\ |\delta_\Phi|=1. \qquad /21/$$

Для спинорного поля $\Psi(x)$ мы ищем $S(x)$ в следующем общем виде, удовлетворяющем условиям Лоренц-ковариантности и однородности /16/:

$$S(x)=a+b\frac{\hat{x}}{(x^2)^{1/2}},\quad \hat{x}\equiv x_\mu\gamma^\mu, \qquad /22/$$

где a и b - некоторые постоянные.
Уравнение /12/ дает:

$$a^2-b^2=1,$$

а уравнение /19/ с $\Sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ удовлетворяется только при $a=0$. Следовательно, мы имеем:

$$U(R_-)\Psi(x)U^{-1}(R_-)=\delta_\Psi(x^2)^{\ell_\Psi}S(x)\Psi(R_-x),\ |\delta_\Psi|=1 \qquad /23/$$

$$S(x)=\frac{\hat{x}}{(x^2)^{1/2}}. \qquad /24/$$

Для векторного поля $V^\mu(x)$ мы ищем $S(x)$ в виде:

$$S(x)^\mu{}_\nu=a\delta^\mu_\nu+b\frac{x^\mu x_\nu}{x^2}. \qquad /25/$$

Уравнение /12/ дает:

$$a^2=1,\quad 2ab+b^2=0,$$

а уравнение /19/ с $(\Sigma_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma=i(\delta^\rho_\mu g_{\nu\sigma}-\delta^\rho_\nu g_{\mu\sigma})$ дает

$$ab=-2,\quad 2a+b=0.$$

Следовательно, мы имеем:

$$U(R_-)V^\mu(x)U^{-1}(R_-)=\delta_V(x^2)^{\ell_V}S^\mu_\nu(x)V^\nu(R_-x),\ |\delta_V|=1 \qquad /26/$$

$$S(x)^\mu{}_\nu=\delta^\mu_\nu-\frac{2x^\mu x_\nu}{x^2}. \qquad /27/$$

Для поля Рарита-Швингера $\Psi^\mu(x)$, поступая аналогично, мы получим:

$$U(R_-)\Psi^\mu(x)U^{-1}(R_-)=$$
$$=\delta_\Psi(x^2)^{\ell_\Psi}\left(\delta^\mu_\nu-\frac{2x^\mu x_\nu}{x^2}\right)\frac{\hat{x}}{(x^2)^{1/2}}\Psi^\nu(R_-x),\ |\delta_\Psi|=1. \qquad /28/$$

Обобщение на случай поля произвольного спина представляется уже очевидным.

Следует отметить еще одно свойство матрицы $S(x)$:

$$S(x)S(R_-x-R_-y)S(y)=S(x-y), \qquad /29/$$

которое можно проверить непосредственно из /20/, /24/, /27/, /28/. С помощью этого свойства можно легко найти вид двухточечных функций, удовлетворяющих требованиям конформной ковариантности

$$F^A_B(x-y) \equiv \langle 0 | \phi^A(x) \bar{\phi}_B(y) | 0 \rangle , \qquad /30/$$

где через A, B обозначается совокупность индексов, различающихся по компоненте поля ϕ,

$$\bar{\phi} \equiv \begin{cases} \phi^+ & \text{в случае бозонного поля,} \\ \phi^+ \gamma^0 & \text{в случае фермионного поля.} \end{cases}$$

Масштабная инвариантность требует, чтобы

$$F^A_B(x-y) = \rho^{-2\ell_\phi} F^A_B(\rho(x-y)), \qquad /31/$$

а R_--инвариантность:

$$F^A_B(x-y) = (x^2)^{\ell_\phi} (y^2)^{\ell_\phi} S^A_{A'}(x) F^{A'}_{B'}(Rx-Ry) S^{B'}_B(y) . \qquad /32/$$

Из свойств /16/ и /29/ видно, что общее выражение для $F^A_B(x-y)$, удовлетворяющее /31/ и /32/, имеет вид:

$$F^A_B(x-y) = c[(x-y)^2]^{\ell_\phi} S^A_B(x-y). \qquad /33/$$

Отметим, что при выводе /33/ мы считаем, что вакуум инвариантен относительно преобразования R , т.е. $U(R_-)|0\rangle = |0\rangle$.

Покажем теперь, что если $U(R_+)$-унитарный оператор, то требование R_+-инвариантности приводит к тому, что двухточечные функции от фермионных полей обращаются в нуль. Действительно, в этом случае, как нетрудно видеть, соответствующие формулы преобразования полей остаются теми же, что и /20/ и /28/, но матрицы $S(x)$ для фермионных полей теперь обладают свойством:

$$S(x) S(R_+ x - R_+ y) S(y) = - S(x-y) \qquad /34/$$

вместо /29/, и тогда уже не существует решения $F^A_B(x-y)$, удовлетворяющего /32/, кроме $F^A_B(x-y) \equiv 0$.

Однако положение изменится, если оператор $U(R_+)$– антиунитарен. Чтобы найти закон преобразования полей в этом случае, мы используем соотношение

$$U(R_-) U(R_+) = U(\theta), \qquad /35/$$

вытекающее из /10/, и уже известные законы преобразования $U(R_-)$ и $U(\theta)$. Для иллюстрации рассмотрим случай спинорного поля Ψ. Имеем тогда:

$$U(R_+)\Psi(x)U^{-1}(R_+) = \delta_\Psi (x^2)^{\ell_\Psi} C^{-1} \gamma^0 \gamma_5 \frac{\hat{x}}{(x^2)^{1/2}} \Psi\left(\frac{x}{x^2}\right),$$

$$U(R_+)\bar{\Psi}(x)U^{-1}(R_+) = \delta_\Psi (x^2)^{\ell_\Psi} \bar{\Psi}\left(\frac{x}{x^2}\right) \frac{\hat{x}}{(x^2)^{1/2}} \gamma_5^{-1} \gamma^0 C. \qquad /36/$$

С помощью /6/ путем прямой проверки можно видеть, что двухточеная функция

$$F(x-y) \equiv \langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = c[(x-y)^2]^{\ell_\Psi} \frac{\hat{x} - \hat{y}}{[(x-y)^2]^{1/2}}$$

удовлетворяет требованию R_+ -инвариантности.

§2. Нелинейная реализация

Вопрос нелинейной реализации конформной группы впервые был рассмотрен Саламом и Стратдее [4], которые предложили ее как средство выражения спонтанного нарушения конформной инвариантности. Использование R преобразования существенно облегчит нам рассмотрение этого вопроса.

Как было показано в [4,15], нелинейная реализация конформной группы, которая линейна относительно Пуанкаре подгруппы, выделяет 4-векторное поле V_μ и скалярное поле σ в качестве голдстоновых полей. Из этих полей мы образуем ковариантную производную от любого другого поля ϕ, которая отыскивается в следующем общем виде:

$$D_\mu \phi = f(\sigma)\{\partial_\mu + aV_\mu + b\Sigma_{\mu\nu}V^\nu\}\phi, \qquad /37/$$

где f - некоторая функция от поля σ, а a, b - некоторые постоянные.

Ковариантность $D_\mu\phi$ состоит в том, что при преобразовании Лоренца она ведет себя как $\partial_\mu\phi$, а при масштабном и R преобразованиях - как соответствующий оператор с масштабной размерностью ℓ_ϕ, именно:

$$e^{-iaD} D_\mu\phi(x) e^{iaD} = \rho^{\ell_\phi} D_\mu \phi(\rho x) \qquad /38/$$

$$U(R_-) D_\mu\phi(x) U^{-1}(R_-) =$$
$$= \delta_\phi (x^2)^{\ell_\phi}\left(-\delta_\mu^\nu + \frac{2x_\mu x^\nu}{x^2}\right) S(x) D_\nu\phi(y), \quad y\equiv -\frac{x}{x^2}. \qquad /39/$$

Подставляя /37/ в /38/, мы видим, что последнее уравнение удовлетворяется, если имеет место следующий закон масштабного преобразования для $f(\sigma)$ и V_μ:

$$e^{-iaD} f(\sigma(x)) e^{iaD} = \rho^{-1} f(\sigma(\rho x)), \qquad /40/$$

$$e^{-iaD} V_\mu(x) e^{iaD} = \rho V_\mu(\rho x). \qquad /41/$$

Прежде чем найти коэффициенты a и b в /3.1/, а также закон R-преобразования для полей V_μ и $f(\sigma)$, мы предварительно получим некоторые соотношения между спиновой матрицей $\Sigma_{\mu\nu}$ и матрицей $S(x)$. Из соотношения

$$U(R) M_{\mu\nu} U(R) = M_{\mu\nu}, \qquad /42/$$

где $M_{\mu\nu}$ - генераторы однородного преобразования Лоренца, с использованием /3/, /12/ и /14/ можно вывести следующее коммутационное соотношение:

$$[\Sigma_{\mu\nu}, S(x)] = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)S(x), \qquad /43/$$

а из /12/ и /19/ следует

$$\partial_\mu S(x) = \frac{2ix^\rho}{x^2} S(x)\Sigma_{\mu\rho} = -\frac{2ix^\rho}{x^2}\Sigma_{\mu\rho} S(x), \qquad /44/$$

что вместе с /43/ позволяет нам получить:

$$[\Sigma_{\mu\nu}, S(x)] = \frac{2x^\rho}{x^2}(x_\mu S(x)\Sigma_{\nu\rho} + x_\nu \Sigma_{\mu\rho} S(x)) \qquad /45/$$

и

$$x^\nu\{S(x), \Sigma_{\mu\nu}\}_+ = 0. \qquad /46/$$

Теперь, подставляя /37/ в /39/ и используя /44/-/46/, мы видим, что уравнение /39/ удовлетворяется, если

$$U(R) f(\sigma(x)) U^{-1}(R) = x^2 f(\sigma(y)) \qquad /47/$$

$$U(R)V_\mu(x)U^{-1}(R) = (x^2)^{-1}\left(-\delta_\mu^\nu + \frac{2x_\mu x^\nu}{x^2}\right)V_\nu(y) + \frac{cx_\mu}{x^2}, \qquad /48/$$

где c - произвольное число, и

$$a = -\frac{2\ell_\phi}{c}, \qquad b = \frac{2i}{c}. \qquad /49/$$

Для каждого выбора варианта функции $f(\sigma)$ мы имеем соответствующий закон преобразования для $\sigma(x)$. Так, например, при

$$f(\sigma) = (1+g\sigma)^n \qquad /50/$$

мы имеем:

$$e^{-iaD}\sigma(x)e^{iaD} = \rho^{-\frac{1}{n}}\sigma(\rho x) + \frac{\rho^{-\frac{1}{n}}-1}{g}, \qquad /51/$$

$$U(R)\sigma(x)U^{-1}(R) = (x^2)^{\frac{1}{n}}\sigma(y) + \frac{(x^2)^{\frac{1}{n}}-1}{g}, \qquad /52/$$

а при [4]

$$f(\sigma)=e^{\sigma} \qquad /53/$$

имеем:

$$e^{-iaD}\sigma(x)e^{iaD}=\sigma(\rho x)-a, \qquad /54/$$

$$U(R)\,\sigma(x)\,U^{-1}(R)=\sigma(y)+\ln x^2. \qquad /55/$$

Зная закон R-преобразования для полей σ и V_μ, мы можем найти соответствующий закон конформного преобразования по формуле /6/, Итак, имеем:

$$[K_\mu, \sigma(x)]=-i\{(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu - \frac{2}{n}x_\mu)\sigma(x)-\frac{2}{ng}x_\mu\} \qquad /56/$$

для /50/, и

$$[K_\mu, \sigma(x)]=-i\{(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)\sigma(x)-2x_\mu\} \qquad /57/$$

для /53/.

Для поля V_μ получим:

$$[K_\mu, V_\lambda(x)]=-i\{(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu + 2x_\mu)\times V_\lambda(x)-2x_\lambda V_\mu(x)+2g_{\mu\lambda}x^\rho V_\rho(x)-cg_{\mu\lambda}\}. \qquad /58/$$

Результат работы [4] получается из /58/ при $c=-1$.

Из законов преобразования ковариантных производных /38/, /39/ и законов преобразования полей, найденных в п.1, а также из равенства

$$d^4x=d^4y\,(x^2)^4=\rho^{-4}\,d^4z \qquad (y\equiv -\frac{x}{x^2},\ z\equiv\rho x)$$

сразу следует правило построения эффективного лагранжиана $\mathfrak{L}(x)$, для которого $L\equiv\int d^4x\,\mathfrak{L}(x)$ будет конформно-инвариантным. Из полей ϕ, Ψ, ... и их

ковариантных производных $D_\mu\phi$, $D_\mu\Psi$, ... нужно образовать Лоренц-ковариантный лагранжиан с последующим умножением каждого его члена на $e^{-(\sum_\phi \ell_\phi+4)}$, где ϕ пробегает все поля-множители в этом члене.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Д.И.Блохинцеву за постоянное внимание и интерес к работе.

Литература

1. H.A.Kastrup. Phys.Rev., 142, 1060 (1966).
2. G.Mack. Nucl.Phys., B5, 499 (1968).
3. G.Mack, A.Salam. Ann.Phys., 53, 174 (1969).
4. A.Salam, J.Strathdee. Phys.Rev., 184, 1760 (1969).
5. А.М.Поляков. Письма ЖЭТФ, 12, 538 /1970/.
6. G.Mack, I.T.Todorov. Trieste preprint IC/71/139 (1971).
7. I.T.Todorov. Preprint JINR, E2-6642, Dubna, 1972.
8. A.A.Migdal. Phys.Lett., 37B, 98 (1971).
9. Дао Вонг Дык, Теор. и Мат. физ., 13, 75 /1972/.
10. Дао Вонг Дык. Препринт ОИЯИ, Р2-6979, Дубна, 1973.
11. G.Parisi, L.Peliti. Lett. Nuovo Cim., 2, 627 (1971).
12. S.Ferrara, A.F.Grillo, G.Parisi. Lett. Nuovo Cim., 4, 115 (1972).
13. E.Schreirer. Phys.Rev., D3, 980 (1971).
14. I.Katz. Phys.Rev., D4, 1885 (1971).
15. A.Hankey. Phys.Rev., D3, 2543 (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 апреля 1973 года.