

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



С 324.16  
К-65

2/11-73

P2 - 7086

2434/2-73

Б.З.Копелиович

ПИОННАЯ КОНСТАНТА СВЯЗИ

И ПИОННЫЙ РАДИУС  $^3\text{He}$

**1973**

**ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ**

P2 - 7086

Б.З.Копелиович

ПИОННАЯ КОНСТАНТА СВЯЗИ  
И ПИОННЫЙ РАДИУС  $^3\text{He}$

Направлено в ЯФ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

## SUMMARY

The dispersion relation (4) with subtraction for pionic formfactor of  ${}^3\text{He}$  is analysed. The subtraction constant  $G(0)$  is defined through PCAC and Goldberger-Treiman relation. The contribution to the absorptive part of anomalous cut, corresponding to diagram in fig. 1 is calculated in standard way<sup>/6,7/</sup>. The linear behaviour of nucleon pionic formfactor (10) is assumed. The corresponding correction  $\delta(\mu^2)$  to the  $\pi^- {}^3\text{He}$  coupling (17) is  $\delta(\mu^2) = 0.26$ . This value is significantly larger than value 0.16 of Jarlskog and Yudson<sup>/6/</sup> because they chose the upper limit of integration to be equal  $9\mu^2$  instead of  $4\mu^2$ . These authors neglected also the contribution from the diagram in fig. 2. This contribution is suppressed indeed by phase space of two nucleons but the resonant behaviour of the vertex function  ${}^3\text{He} - p(pn)_S$  at low  $n-p$  masses due to Migdal-Watson final state interaction in the singlet  $pn$ -configuration compensates this suppression. So, the diagram in fig. 3 reproduces the main part of one in fig. 2. We assumed the couplings of  ${}^3\text{He} - pd$  and  ${}^3\text{He} - pd_S$  to be equal because  $p-n$  singlet and triplet states are contained in the dominant  $S$ -state of  ${}^3\text{He}$  with equal weights. The contribution of diagram in fig. 3 to  $\delta(\mu^2)$  turns out to be equal 0.18. Restricting ourselves by above contributions we have (15) and for pseudoscalar and pseudovector coupling squared-(16). The pionic radius of  ${}^3\text{He}$  (17) is equal  $1.52\mu^{-1}$ . Applying above procedure to the charge radius of  ${}^3\text{He}$  (19) we get  $1.33\mu^{-1}$  in excellent agreement with experimental value  $1.35\mu^{-1}$ .

Because of the uncertainties in the behaviour of nucleon formfactor at large  $t$  and  ${}^3\text{He} - Pd_S$  coupling we demonstrate direct calculation of Feynman diagrams in Section 3, which does not contain above uncertainties but another one concerning nucleon formfactor behaviour when nucleon is of the mass shell. We obtain the resulting expression (29) for pionic formfactor of  ${}^3\text{He}$  which is proportional to the charge formfactor (30). For  $\delta(\mu^2)$  we have the value 0.37, which is close to the one of the above-mentioned.

## Введение

В расчетах процессов взаимодействия адронов с ядрами при высоких энергиях, интенсивно изучаемых в последнее время, иногда возникает необходимость в использовании пионного формфактора  ${}^3\text{He}$ .

“Экспериментальное” определение константы связи пиона с  ${}^3\text{He}$ , как и в случае с нуклоном, может быть произведено с помощью дисперсионного соотношения для  $\pi^- {}^3\text{He}$  рассеяния вперед или экстраполяции в нефизическую область дифференциального сечения  $\pi^+ {}^3\text{He}$  рассеяния<sup>/1/</sup>. Однако имеющихся в настоящее время данных для этого недостаточно.

Известны два типа констант связи  $\pi NN$ -псевдоскалярная  $g$  и псевдовекторная  $f$ , связанных соотношением:

$$f = \frac{\mu}{2m} g.$$

Здесь  $\mu$  и  $m$  - массы пиона и нуклона. Рассматривая  ${}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{H}$  как элементарные частицы, введем для них аналогичные константы связи, которые обозначим  $G$  и  $F$ .

$$F = \frac{\mu}{2M} G \quad /1/$$

$M$  - масса  ${}^3\text{He}$ . Различием масс, волновых функций и т.п. для  ${}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{H}$  будем в дальнейшем пренебрегать.

Величину константы связи пиона с ядром можно оценить в импульсном приближении<sup>/2/</sup>, что для  ${}^3\text{He}$  дает

$$\frac{G^2}{g^2} \sim 9. \quad /2/$$

или

$$\frac{F^2}{f^2} \approx 1 \quad /3/$$

Однако в ядре могут оказаться существенными эффекты перенормировки: перерасеяния, обмена нуклонов пионами и т.д. Их можно учесть, записав для пионного формфактора дисперсионное соотношение с вычитанием. Все эффекты перенормировки содержатся в константе вычитания, которую можно найти из соотношения Гольдбергера-Треймана и данных по  $\beta$ -распаду трития. Это сделано во втором разделе, где также учтен вклад главных особенностей в абсорбционную часть.

Ввиду некоторых неопределенностей, содержащихся в таком подходе, в разделе 4 проделано непосредственное вычисление диаграмм, соответствующих рассмотренным особенностям.

## 2. Дисперсионное соотношение для пионного формфактора

Обозначим пионный формфактор  ${}^3\text{He}$  через  $G(t)$ , где  $t$  - квадрат 4-импульса  $\pi$ -мезона. Ясно, что  $G(\mu^2) = G$ . Запишем для  $G(t)$  дисперсионное соотношение по  $t$  с вычитанием в нуле.

$$G(t) = G(0) [1 + \delta(t)] \quad /4/$$

$$\delta(t) = \frac{t}{\pi G(0)} \int_{t_a}^{\infty} \frac{\text{Im} G(t')}{t'(t'-t)} dt' \quad /5/$$

Интегрирование в /5/ ведется от ближайшей особенности  $G(t)$ -аномального порога  $t_a \approx (1,8\mu)^2$ , отвечающего диаграмме на рис. 1. Константу вычитания  $G(0)$  можно найти, воспользовавшись соотношением Гольдбергера-Треймана и гипотезой о частичном сохранении аксиального тока /4/.

$$G(0) = \frac{\sqrt{2} M}{f_\pi} G_A(0) \quad /6/$$

Здесь  $f_\pi$  - константа распада  $\pi$ -мезона;  $G_A(0)$  - аксиальная константа  $\beta$ -распада трития. Подставляя экспериментальные значения /5/, получаем

$$G(0)/g = 2,93 \pm 0,08.$$

Для константы связи  $G$ , согласно /4/, имеем

$$\frac{G}{g} = \frac{G(0)}{g} [1 + \delta(\mu^2)]. \quad /7/$$

Рассмотрим сначала вклад в  $\delta(\mu^2)$  ближайшей особенности, отвечающей диаграмме на рис. 1. Соответствующий аномальный разрез тянется от  $t_a$  до  $4m^2$ , а затем переходит на нефизический лист. Поэтому, если нам нужно вычислить вклад аномального порога, следует вести интегрирование от  $t_a$  до  $4m^2$ . Соответствующий расчет был выполнен Ярлскогом и Индурьяном /6/, однако интегрирование велось только до  $9\mu^2$ , что существенно занижает результат.

Обозначим через  $\delta_1(\mu^2)$  - вклад в абсорбционную часть аномального разреза

$$\delta_1(\mu^2) = \frac{\mu^2}{\pi G(0)} \int_{t_a}^{4m^2} \frac{\rho_1(t')}{t'(t'-\mu^2)} dt' \quad /8/$$

$\rho_1(t')$  - скачок на разрезе, который находится с помощью правила Катковского /7/.

$$\rho_1(t) = \frac{\text{Re} g(t) r^2}{8 \sqrt{t(4M^2-t)}} [2t + (M+m)^2 - m_d^2].$$

Здесь  $r$  - константа связи  ${}^3\text{He}-Pd$ , для которой воспользуемся значением, полученным Лохером /8/. Мы не знаем, как ведет себя  $g(t)$  в интервале, в котором производится интегрирование. Предполагая, что главный вклад в интеграл /8/ дает область малых  $t'$ , и что абсорбционная часть дисперсионного соотношения для

$g(t)$  определяется в основном нуклон-антинуклонными состояниями /4/, примем для  $Re g(t)$  линейную зависимость от  $t$ :

$$Re g(t) = g(0) + \frac{t}{\mu^2} [g(\mu^2) - g(0)]. \quad /10/$$

После этого интеграл /8/ легко вычисляется и для  $\delta_1(\mu^2)$  находим:

$$\delta_1(\mu^2) = 0,26. \quad /11/$$

Отметим, что в работе /6/ для  $\delta_1(\mu^2)$  было получено заниженное значение 0,16. Кроме того, там не был учтен вклад аномального разреза, обусловленного диаграммой на рис. 2. Несмотря на то, что здесь имеется сильное подавление, связанное с малостью фазового объема двух нуклонов при значениях  $t'$ , близких к  $t_a$ , оно может быть скомпенсировано резонансным поведением вершинной функции развала ядра при малой эффективной массе двух кулонов, находящихся в синглетном состоянии /взаимодействие в конечном состоянии Мигдала-Ватсона/. Этот усиленный вклад можно эффективно учесть, рассмотрев диаграмму, показанную на рис. 3.  $d_s$  - синглетный дейтрон, виртуальное состояние с положительной энергией связи  $\sim 70$  кэв, которую ввиду ее малости в дальнейшем будем считать равной нулю. В этом случае аномальный порог, соответствующий диаграмме на рис. 3, находится на реальной оси при  $t'_a \approx (2,1\mu)^2$ . Его вклад в абсорбционную часть /5/ равен

$$\delta_2(\mu^2) = \frac{\mu^2}{\pi G(0)} \int_{t'_a}^{4m^2} \frac{\rho_2(t)}{t(t-\mu^2)} dt, \quad /12/$$

где

$$\rho_2(t) = \frac{Re g(t) s^2}{8\sqrt{t(4M^2-t)}} [(M+m)^2 - m_d^2]. \quad /13/$$

Здесь  $s$  - константа связи  ${}^3He-pd_s$ . Величина ее не известна. Следует, однако, ожидать, что она того же порядка, что и  $r$ . Действительно, если в волновой функции  ${}^3He$  ограничиться доминирующим  $S$ -состоянием, то синглетное и триплетное состояния двух нуклонов входят в нее с одинаковым весом /9/. Положив поэтому  $s=r$  и выполнив в /12/ интегрирование, получаем:

$$\delta_2(\mu^2) = 0,18. \quad /14/$$

Пренебрегая по изложенным выше соображениям другими особенностями  $G(t)$ , находим

$$\delta(\mu^2) = \delta_1(\mu^2) + \delta_2(\mu^2) = 0,44. \quad /15/$$

Подставив этот результат в /7/, приходим к следующему значению константы связи  $\pi$ -мезона с  ${}^3He$

$$G^2/g^2 = 17,8$$

или

$$F^2/f^2 = 1,98. \quad /16/$$

Кроме того, можем вычислить пионный радиус  ${}^3He$ :

$$R_\pi^2 = \frac{6}{\pi G(0)} \int_{t_a}^{\infty} \frac{Im G(t)}{t^2} dt. \quad /17/$$

Удерживая только вклад рассмотренных особенностей, получаем

$$R_\pi \approx 1,52 \mu^{-1}. \quad /18/$$

При получении результатов /16/, /18/ предполагалось, что  $s=r$ . Для того, чтобы убедиться, что это допущение не очень далеко от истины, вычислим вклад рассмотренных аномальных порогов в дисперсионное выражение для зарядового радиуса  ${}^3He$ :

$$R_{ch}^2 = \frac{6}{\pi} \int_{t_a}^{\infty} \frac{\text{Im } F_{ch}(t)}{t^2} dt. \quad /19/$$

Если для зарядового формфактора нуклона использовать линейную зависимость от  $t$  и радиус  $0,5\mu^{-1}$ , то, повторив проведенные выше расчеты, получим

$$R_{ch} \approx 1,33\mu^{-1}, \quad /20/$$

что близко к экспериментальному  $R_{ch} = 1,35\mu^{-1}$  /10/ \*

Из проделанных вычислений видно, что результат  $R_{\pi} > R_{ch}$  обязан происхождением тому, что для нуклона  $r_{\pi} > r_{ch}$ .

Неопределенность в величине  $s$  можно избежать, рассмотрев другой способ вычисления  $G(t)$ , не требующий знания  $r$  и  $s$ . Кроме того, в подходе, излагаемом ниже, не нужно знать поведение формфактора  $g(t)$  при больших  $t$ , вместо этого вводится предположение иного характера.

### 3. Прямой расчет фейнмановских диаграмм

Поскольку аномальные пороги являются главными особенностями фейнмановских диаграмм, изображенных на рис. 1 и 3, можно заменить вычисление их вклада в абсорбционную часть  $G(t)$  прямым расчетом по правилам Фейнмана.

Рассмотрим сначала вклад в  $G(t)$  диаграммы на рис.1.

$$G_I(t) = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} g(t, p_1^2, p_2^2) T \frac{i\Gamma(k_1^2, d^2) \Gamma^*(k_2^2, d^2)}{(p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)(d^2 - m^2)}. \quad /21/$$

\* Отметим для сравнения, что в работе /6/ для зарядового радиуса получается значение  $R_{ch} < R_{\pi} \approx 0,95\mu^{-1}$ .

Здесь 4-импульсы частиц обозначены в соответствии с рис. 1 и, кроме того,

$$q = h_2 - h_1; \quad t = q^2;$$

$$k_1 = \frac{m_d p_1 - m d}{m_d + m};$$

$$k_2 = \frac{m_d p_2 - m d}{m_d + m} = k_1 + \frac{m_d}{m_d + m} q; \quad /22/$$

$$T = \frac{1}{3} \text{Sp} [ (\hat{h}_2 + M) \gamma_5 \gamma_{\mu} (\hat{p}_2 + m) \gamma_5 (\hat{p}_1 + m) \gamma_5 \gamma_{\nu} (\hat{h}_1 + M) \gamma_5 ] (g_{\mu\nu} - \frac{d_{\mu} d_{\nu}}{m_d^2});$$

$\Gamma(k^2, d^2)$  - вершинная функция развала ядра на  $p$  и  $d$ . Далее, пренебрегая величиной  $(\vec{q}^2/2M^2)^2$ , запишем в системе покоя  ${}^3\text{He}$

$$p_1^2 = \left( \frac{mM}{m_d + m} + k_{10} \right)^2 - \vec{k}_1^2$$

$$p_2^2 = \left[ \frac{mM}{m_d + m} \left( 1 + \frac{\vec{q}^2}{2M^2} \right) + k_{20} \right]^2 - \left( \vec{k}_2 + \frac{1}{3} \vec{q} \right)^2$$

$$d^2 = \left( \frac{m_d M}{m_d + m} - k_{10} \right)^2 - \vec{k}_1^2 = \left[ \frac{m_d M}{m_d + m} \left( 1 + \frac{\vec{q}^2}{2M^2} \right) - k_{20} \right]^2 - \left( \vec{k}_2 - \frac{2}{3} \vec{q} \right)^2.$$

Подставляя эти выражения в /16/ и выполняя интегрирование по  $k_{10}$ , получаем

$$G_I(t) = \frac{1}{(M - m_d + m)^2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{g(t, p_1^2, p_2^2)}{\sqrt{\vec{k}^2 + m_d^2}} \rightarrow$$

$$\times T \frac{\Gamma(\vec{k}_1^2) \Gamma^*(\vec{k}_2^2)}{(\epsilon + 3\vec{k}_1^2/4m)(\epsilon + 3\vec{k}_2^2/4m)}. \quad /23/$$

Здесь дейтрон находится на массовой поверхности.  
 $\epsilon = m + m_d - M$ .

$$\Gamma(\vec{k}^2) = \sqrt{2m_d} (\epsilon + 3\vec{k}^2/4m) \psi(k), \quad /11/ \quad /24/$$

$$\psi(k) = \int \psi(\vec{r}, \vec{\rho}) \phi^*(\vec{\rho}) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) d^3\rho d^3r \quad /25/$$

$\psi(\vec{r}, \vec{\rho})$  - волновая функция  ${}^3\text{He}$  в координатах Якоби:  $\rho$  - расстояние между  $p$  и  $n$ ,  $r$  - расстояние от их центра тяжести до третьего нуклона.  $\phi(\vec{\rho})$  - волновая функция дейтрона.

Пользуясь /24/, можно переписать /18/ в виде

$$G_1(t) = \frac{2m_d}{(M - m_d + m)^2} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{g(t, p_1^2, p_2^2)}{\sqrt{k_1^2 + m_d^2}} T \psi(k_1) \psi^*(k_2). \quad /26/$$

Если для  $\psi(r, \rho)$  воспользоваться какой-либо простой параметрической формой /9/, то легко увидеть, что этот интеграл быстро сходится, и, если  $|t| \leq \mu^2$ , то существенна область значений  $k_1 \leq \mu$ . По этой причине будем считать, что в подынтегральном выражении нуклоны находятся на массовой поверхности, так что формфактор  $g(t)$  и кинематические множители можно вынести из-под интеграла, после чего, воспользовавшись /25/, получаем:

$$G_1(t) = g(t) \int \psi(\vec{r}, \vec{\rho}) \psi^*(\vec{r}, \vec{\rho}') \phi^*(\vec{\rho}) \phi(\vec{\rho}') \exp(i\vec{q}\vec{r}) d^3r d^3\rho d^3\rho' \quad /27/$$

Точность сделанного здесь приближения для функции  $g(t, p_1^2, p_2^2)$  можно оценить, написав дисперсионное соотношение для этой вершины по  $p_{1,2}^2$ , что дает ошибку  $\leq \mu/m$ . Члены, опущенные в кинематических множителях, имеют порядок  $\mu^2/m^2$ .

Точно так же производится расчет диаграммы на рис. 3. С той же степенью точности получаем.

$$G_2(t) = g(t) \int \psi(\vec{r}, \vec{\rho}) \psi^*(\vec{r}, \vec{\rho}') \times \times \phi_s^*(\vec{\rho}) \phi_s(\vec{\rho}') \exp(i\vec{q}\vec{r}) d^3r d^3\rho d^3\rho'. \quad /28/$$

Здесь  $\phi_s(\vec{\rho})$  - волновая функция синглетного дейтрона, который мы договорились считать связанным состоянием.

Если теперь предположить, что в ядре  ${}^3\text{He}$  пара нуклонов находится только в состояниях  $d$  и  $d_s$ , что в дисперсионном подходе равносильно ограничению рассмотренными особенностями, и использовать для волновой функции одночастичное приближение, то можно записать сумму /27/ и /28/ следующим образом:

$$G(t) \approx G_1(t) + G_2(t) \approx g(t) \int |\psi(\vec{r})|^2 \exp(i\vec{q}\vec{r}) d^3r, \quad /29/$$

где  $\psi(\vec{r})$  - одночастичная волновая функция нуклона в  ${}^3\text{He}$ . Пользуясь определением формфактора, переписываем /29/ в виде

$$G(t) = g(t) F_{ch}^{3\text{He}} / F_{ch}^p. \quad /30/$$

Здесь  $F_{ch}^{3\text{He}}(t)$  и  $F_{ch}^p(t)$  - зарядовые формфакторы  ${}^3\text{He}$  и протона. Из /30/ и /7/ получаем

$$\delta(\mu^2) \approx 0,37. \quad /31/$$

Это значение согласуется с /15/ в пределах экспериментальных погрешностей и теоретических неопределенностей. Предположения о волновой функции  $\psi(\vec{r}, \vec{\rho})$ , сделанные при получении /30/, не существенны. Можно показать, что расчет диаграмм на рис. 1 и 2, выполняемый аналогично тому, как это делалось выше, и при тех же предположениях, приводит к выражению /30/.

#### 4. Заключение

Мы рассмотрели два способа вычисления пионной константы связи и пионного радиуса  ${}^3\text{He}$ , содержащие предположения различного характера. Полученные значения имеют точность порядка 10%.

Как уже говорилось, величина  $-\delta(\mu^2)$  является поправкой к соотношению Гольдбергера-Треймана, записан-

ному для  $\beta$ -распада трития. Поправка к правой части соотношения Гольдбергера-Треймана в  $\mu$ -захвате вычисляется аналогично и равна

$$\delta(-0,96 m_{\mu}^2) - \delta(\mu^2) \approx -0,6. \quad /32/$$

Опять наш результат существенно превышает величину /0,23/, полученную в работе /6/.

Пионные константы связи для более тяжелых ядер были вычислены в работе Кима и Примакова /12/. Для этого использовалось соотношение Гольдбергера-Треймана и предположение о слабой зависимости пионного формфактора ядра от  $t$  в интервале  $\Delta t = \mu^2$ . Однако, даже для  ${}^3\text{He}$  учет пионного формфактора приводит, как мы видели, к увеличению квадрата константы связи в два раза. С ростом атомного номера ядра этот эффект увеличивается. Так как расчет абсорбционной части для тяжелых ядер затруднителен, для пионного формфактора воспользуемся импульсным приближением:

$$F(t) = f(t) F_{ch}^A(t) / F_{ch}^P(t). \quad /33/$$

Здесь  $F_{ch}^A(t)$  - зарядовый формфактор ядра с атомным номером  $A$ . Таким образом, в выражения для констант связи  $F^A(0)$ , полученных в /12/, следует ввести следующую поправку:

$$\begin{aligned} F^A(\mu^2) &\approx F^A(0) \left[ 1 + \frac{\mu^2}{6} ((R_{ch}^A)^2 - r_{ch}^2 + r_{\pi}^2) \right] \approx \\ &\approx F^A(0) \left( 1 + \frac{\mu^2 r_{\sigma}^2}{6} A^{2/3} \right). \end{aligned} \quad /34/$$

Автору приятно поблагодарить Л.И.Лapidуса и Ю.А.Щербакова, по инициативе которых была выполнена работа, а также О.В.Думбрайса и М.М.Мусаханова за полезные обсуждения.

## Литература

1. О.В.Думбрайс, Ф.Никитиу, Ю.А.Щербаков. Сообщение ОИЯИ, E2-6968, Дубна, 1972.
2. T.E.O.Ericson, M.P.locher. Nucl.Phys., 148A, 1, 1970.
3. R.Karplus, C.M.Sommerfield, E.H.Wichmann. Phys.Rev., III, 1118, 1958.
4. M.L.Goldberger, S.B.Treiman. Phys.Rev., III, 354, 1958. M.Gell-Mann, M.Levy. Nuovo Cimento., 16, 705, 1960.
5. Springer Tracts in Modern Physics., 55, 239, 1970. C.J.Christensen et al. Riso Report, No. 226, March, 1970.
6. C.Jarlskog, F.J.Yndurain. Nuovo Cimento., 12, 801, 1972.
7. R.E.Cutkosky. Journ.Math.Phys., 1, 429, 1960.
8. M.P.Locher. Nucl.Phys., 23B, 116, 1970.
9. L.I.Schiff. Phys.Rev., 133, B802, 1964.
10. J.S.McCarthy et al. Phys.Rev.Lett., 25, 884, 1970.
11. R.Blankenbecler, M.L.Goldberger, F.R.Halpern. Nucl.Phys., 12, 629, 1959.
12. C.W.Kim, M.Primakoff. Phys.Rev., 139, B1447, 1965.



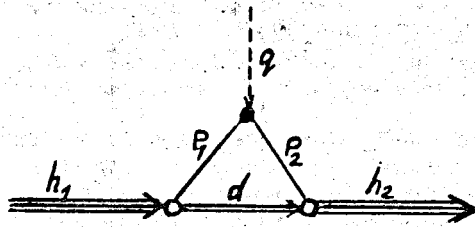


Рис. 1

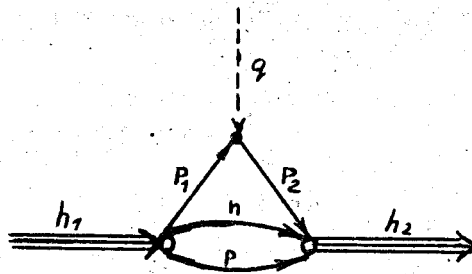


Рис. 2

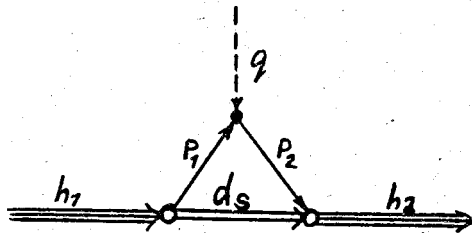


Рис. 3