СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7068

В.Н. Стрельцов

КОВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТЫ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

P2 - 7068

В.Н. Стрельцов

КОВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТЫ

КЛАССИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§1. *Галилеево приближение*

1. Рассмотрим преобразования Галилея:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \qquad /1/$$

Введем далее, как обычно, 4-вектор энергии-импульса

$$p^i = m\frac{dx^i}{ds_1}, \qquad /2/$$

где

$$x^i = x^a (a = 1,2,3), \quad x^4 = ict, \quad icds_1 = ds = \sqrt{(dx^i)^2},$$

а

$$p^a = p^a, \quad p^4 = i\frac{E}{c}. \qquad /3/$$

В результате для формул преобразования энергии и импульса в галилеевом приближении, т.е. с точностью до членов порядка $(\beta^2)^0$, где $\beta = v/c$, согласно /1/, будем иметь

$$(p^x)' = p^x - \frac{v}{c^2}E, \quad (p^y)' = p^y, \quad (p^z)' = p^z, \quad E' = E. \qquad /4/$$

Здесь, может быть, следует специально подчеркнуть, что в галилеевом приближении время является скалярной величиной и не преобразуется при переходе от одной системы отсчета к другой. Поэтому, согласно /2/ и /3/, скалярами будут и величины p^4 и E. Но последнее означает, что в галилеевом приближении энергия E должна выражаться только через скалярные величины m и c^2 /которые не преобразуются при переходе к другой системе отсчета/, т.е. представлять собою энергию покоя, на основании чего первая из формул /4/ может быть приведена к известному виду

$$(p^x)' = p^x - mv. \qquad /4a/$$

Опираясь на /1/ и /4/, нетрудно получить формулы преобразования для компонент тензора "момента-инерции" M^{ik}, которые определятся выражениями:

$$(M^{yz})' = M^{yz},\ (M^{zx})' = M^{zx} + vM^{tz},\ (M^{xy})' = M^{xy} - vM^{ty}, \qquad /5/$$

$$(M^{tx})' = M^{tx},\ (M^{ty})' = M^{ty},\ (M^{tz})' = M^{tz}, \qquad /6/$$

где $M^{ta} = \Sigma(tp^a - \frac{Ex^a}{c^2})$.

Поскольку в галилеевом приближении рассматриваемый тензор M^{ik} расщепляется на два 3-вектора $\vec{M}$ и $\vec{K}$, где $\vec{M}$ определяет собою момент импульса, а $\vec{K}$ описывает движение центра инерции некоторой системы, то формулы /5/ и /6/ могут быть также переписаны в виде

$$M'_x = M_x,\ M'_y = M_y - [\vec{v}\vec{K}]_y,\ M'_z = M_z - [\vec{v}\vec{K}]_z, \qquad /5a/$$

и

$$(K^x)' = K^x,\ (K^y)' = K^y,\ (K^z)' = K^z. \qquad /6a/$$

2. Если далее, как обычно, мы введем 4-импульс как 4-вектор с составляющими $\partial S/\partial x^i$, где S - скалярная функция действия, то, например, для формулы преобразования x -компоненты импульса будем иметь равенство

$$p'_x = p_x, \qquad /7/$$

которое, очевидно, отличается от требуемой формулы преобразования /4a/.

С целью выяснения затронутого вопроса о возможности другого определения энергии и импульса частицы как частных производных по координатам от скалярной функции действия S, рассмотрим, как преобразуется интервал при переходе от K'- к K -системе в галилеевом приближении.

На основании /1/ в частном случае одного пространственного измерения легко найдем, что

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - 2\beta xct - (1-\beta^2)c^2t^2, \qquad /8/$$

откуда можно заключить, что в данном случае в K -системе мы будем иметь метрику, которая отличается от обычной /псевдо/ эвклидовой и характеризуется метрическим тензором g_{ik} с компонентами

$$g_{11} = 1,\ g_{14} = g_{41} = -\beta,\ g_{44} = -(1-\beta^2) \qquad /9/$$

/мы перешли здесь к световому времени $\tau = ct$ /.

Привлекая затем выражения /9/ и используя известную формулу $A_i = g_{ik}A^k$, введем ковариантные координаты. При этом будем иметь

$$X = x - \beta\tau,$$

$$T_1 = -\tau(1-\beta^2) - \beta x = -\tau - \beta(x - \beta\tau). \qquad /10/$$

С учетом того, что в K -системе составляющие X' и T'_1 данного ковариантного вектора равны соответственно

$$X' = x',$$

$$T'_1 = -\tau', \qquad /11/$$

для формул преобразования ковариантных координат на основании /1/,/10/ и /11/, найдем

$$X' = X, \qquad /12.1/$$

$$T' = T + \frac{\beta}{c} X, \qquad /12.2/$$

где $T = T_1 / c$.

Легко видеть, что полученные таким образом выражения /12/ представляют собою /с точностью до знака во второй формуле /12// так называемые простанственно-подобные преобразования в галилеевом приближении, вытекающие из преобразований Лоренца при выполнении условия $x \gg ct$ /см., например, /1/ /.

Если теперь мы введем вектор с компонентами, представляющими собою частные производные от некоторой скалярной функции S по ковариантным координатам, то, на основании формул, обратных /12/, будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial X'} = \frac{\partial S}{\partial X} - \frac{\beta}{c}\frac{\partial S}{\partial T}, \qquad \frac{\partial S}{\partial T'} = \frac{\partial S}{\partial T}, \qquad /13/$$

откуда можно заключить, что если рассматривать производную $\partial S / \partial X$ как x-компоненту импульса, а $\partial S / \partial T$ - как энергию частицы, то вводимые таким образом величины будут уже удовлетворять формулам преобразования для энергии и импульса /4/.

Использование в галилеевом приближении формулы для энергии $E = mc^2$ может быть подкреплено дополннтельным фактом: только в этом случае релятивистское выражение для координат центра инерции $X^a = \Sigma E x^a / \Sigma E$ переходит в обычное классическое выражение $X^a = \Sigma m x^a / \Sigma m$.

2. Квазирелятивистское приближение

1. Рассмотрим квазирелятивистские * преобразования координат /2/ **:

$$x' = (x - \beta c t)\gamma_1, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t\gamma_1 - \frac{\beta}{c} x, \qquad /1'/$$

где $$\gamma_1 = 1 + \frac{1}{2}\beta^2.$$

Вводя снова на основании /2/ и /3/ 4-вектор энергии-импульса и привлекая /1'/ в данном приближении для формул преобразования энергии и импульса, будем иметь

$$(p^x)' = \left(p^x - \frac{\beta}{c}E\right)\gamma_1, \quad (p^y)' = p^y, \quad (p^z)' = p^z, \quad E' = E\gamma_1 - \beta c p^x. \qquad /4'/$$

При этом формулы преобразования для компонент тензора M^{ik} в рассматриваемом приближении будут определяться следующими выражениями:

$$(M^{yz})' = M^{yz}, \quad (M^{zx})' = (M^{zx} + \beta c M^{tz})\gamma_1, \quad (M^{xy})' = (M^{xy} - \beta c M^{ty})\gamma_1 \qquad /5'/$$

$$(M^{tx})' = M^{tx}, \quad (M^{ty})' = M^{ty}\gamma_1 - \frac{\beta}{c} M^{xy}, \quad (M^{tz})' = M^{tz}\gamma_1 + \frac{\beta}{c} M^{zx}. \qquad /6'/$$

Принимая во внимание полученные выше результаты, здесь, может быть, следует специально отметить, что использование, например, в данном приближении формулы преобразования для энергии, учитывающей члены порядка β^4 /см., в частности, /3/ /:

$$E' = E\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4\right) - \beta c p^x\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right), \qquad /4''/$$

---

* Нам кажется, что этот термин более точно отражает суть рассматриваемого приближения, в то время как нерелятивистское приближение в дальнейшем мы будем отождествлять с галилеевым приближением, в рамках которого время абсолютно, т.е. действительно описывается "нерелятивистской" формулой преобразования.

** Как стало известио автору, отмеченные преобразования в свое время рассматривались также в работе Чандрасекара и Контопоулоса /2a/.

или в галилеевом приближении последней формулы /4 ′/, вряд ли можно считать последовательным шагом, так же как нельзя согласиться, скажем, с использованием, наряду с /4 ″/, формул преобразований /6 ′ / [2a].

2. Опираясь на формулы преобразования /1 ′ /, проведем снова процедуру преобразования интервала при переходе от K' - к K -системе. В результате для компонент метрического тензора g_{ik} в данном приближении будем иметь

$$g_{11}=1+\frac{1}{4}\beta^4,\ g_{14}=g_{41}=-\frac{\beta^3}{2}(1+\frac{1}{2}\beta^2),\ g_{44}=-1+\frac{3}{4}\beta^4+\ \frac{1}{4}\beta^6 \ . \qquad /9\ '/$$

При этом для формул преобразования ковариантных координат, описывающих, например, обратный переход от K - к K'-системе, получим

$$X=X'\gamma_1-\beta c T' \qquad T=(T'-\frac{\beta}{c}X')\gamma_1 \ . \qquad /12a\ '/$$

Легко видеть, что, как и в галилеевом случае, преобразования /12a′ / подобны /с точностью до знака/ рассмотренным в свое время /см., например, снова [1] / так называемым пространственноподобным преобразованиям.

Вводя далее снова импульс и энергию с помощью выражений $p^x=\partial S/\partial X$ и $E=\partial S/\partial T$, на основании /12a′/ легко найдем, что указанные величины будут преобразовываться по формулам /4 ′ /.

Следует также отметить, что, поскольку производные $\partial S/\partial X$ и $\partial S/\partial T$ входят в нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби, отражающее собою структуру формулы для энергии в квазирелятивистском приближении, то, очевидно, рассматриваемое уравнение должно представлять собою дифференциальное уравнение в частных производных по ковариантным координатам.

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§3. Оператор координаты в галилеевом приближении

1. Рассмотрим оператор координаты в импульсном представлении

$$\hat{x}=i\hbar\frac{\partial}{\partial p^x}\ . \qquad /14/$$

Воспользовавшись далее формулами преобразования для энергии и импульса /4/:

$$(p^x)'=p^x-mv,\ E'=E\ ,$$

мы сможем установить закон преобразования величины $\hat{x}$ при переходе к другой инерциальной системе отсчета. Он будет определяться известным выражением /см., например, [4] /:

$$\hat{x}'=\hat{x}*. \qquad /15/$$

С другой стороны, если мы обратимся к x -представлению, то тогда, казалось бы, мы должны допустить, что закон преобразования $\hat{x}$ будет уже определяться не равенством /15/, а первой формулой преобразований Галилея /1/:

$$x'=x-vt. \qquad /16/$$

На первый взгляд, создавшуюся трудность можно легко избежать, положив в /16/ просто $t=0$, т.е. зафиксировав временную координату.

---

*Здесь следует специально подчеркнуть, что такой вид формулы преобразования для оператора координаты обеспечивается, в частности, тем, что в галилеевом приближении энергия представляет собою энергию покоя и не преобразуется при переходе к другой системе отсчета.

Однако с таким шагом вряд ли можно согласиться. Дело в том, что "приближенные" преобразования Галилея вытекают из "точных" преобразований Лоренца только при выполнении следующего специального условия:

$$\frac{x}{t} << c.$$

Иными словами, 4-вектор координаты, компоненты которого /в случае малых скоростей движения/ преобразуются по формулам Галилея, является времениподобным вектором. Именно поэтому процедуру фиксирования времени для получения формулы /15/ * в x -представлении нельзя признать удовлетворительной.

Для того, чтобы обеспечить требуемую формулу преобразования для оператора координаты в x -представлении, мы в соответствии с выводами §1 должны обратиться к ковариантным координатам. В этом случае, как легко видеть, величина X действительно будет подчиняться формуле преобразования /12.1/, совпадающей с /15/.

Здесь, может быть, следует отметить, что полученные результаты ставят под сомнение справедливость утверждения /см., например, /5/, а также /6/ / о том, что при переходе от одной системы отсчета к другой $<x>$ должно подчиняться преобразованиям Галилея /16/ *.* Дело в том, что совершенно не ясно, как на основании /15/ может быть доказано подобное утверждение, если только не приписывать при этом волновой функции дополнительной

* А также, например, при определении нормы волновой функции.

** Непосредственным основанием для данного утверждения могут, по-видимому, служить теоремы Эренфеста.

фазы *. Больше того, встает вопрос - почему вообще величина $<x>$ должна подчиняться формуле преобразования Галилея, а не формуле типа /15/?

2. В заключении этого параграфа коснемся вопроса инвариантности перестановочных соотношений Гейзенберга

$$X'(\hat{p}^{x})' - (\hat{p}^{x})'X' = i\hbar \qquad /17/$$

в галилеевом приближении.

На основании /12/ будем иметь, что

$$X' = X,$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial X'} = i\hbar\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\beta}{c}\, i\hbar\frac{\partial}{\partial T}.$$

Откуда инвариантность соотношения /17/ следует непосредственно.

Литература

1. *В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5823, Дубна, 1971.*
2. *а/ S.Chandrasekhar, G.Contopoulos. Proc.Roy.Soc., A 298, 123 (1967);*
   б/ В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4461, Дубна, 1969.
3. *Р.П.Гайда. Препринт ИТФ, 72-91Р, Киев, 1972.*
4. *J.M.Jauch. Foundation of Quantum Mechanics. Sect. 12-5, 13-4, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.*
5. *J.-M.Levy-Leblond. "Group Theory and Its Applications", v. II, AP, N.-Y.-L., 1971, p. 283.*
6. *P.L.Torres. Lett. Nuovo Cimento., 4, 681, 1970.*
7. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963, §15, стр. 66.*

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1973 года.

* Появление у /скалярной/ волновой функции в результате перехода к другой системе отсчета /в случае достаточно малых v / дополнительной фазы /см., например, /7/ /, как было показано ранее /1/, основано на недоразумении. Действительно, рассмотрим, например, волновую функцию плоской волны $\psi' = \exp(iS'/\hbar)$. Для ее фазы $S' = E'T' + (p^{x})'X'$ тогда на основании /4/ и /12/, легко найдем, что $S' = ET + p^{x}X = S = inv.$